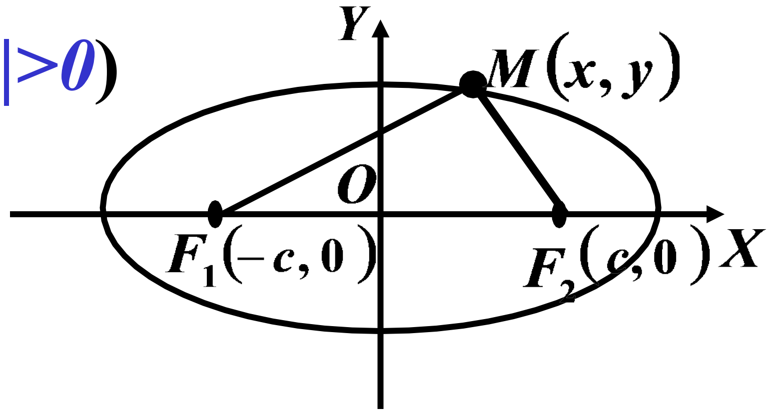
# 关于双曲线的焦点

# 复习

## 1. 椭圆的定义

平面内与两定点$F_1$、$F_2$的距离的 $\boxed{和}$ 等于常数 $2a$ ( $2a>|F_1F_2|>0$) 的点的轨迹.

$|MF_1|+|MF_2|=2a$ ( $2a>|F_1F_2|>0$)




## 2. 引入问题:

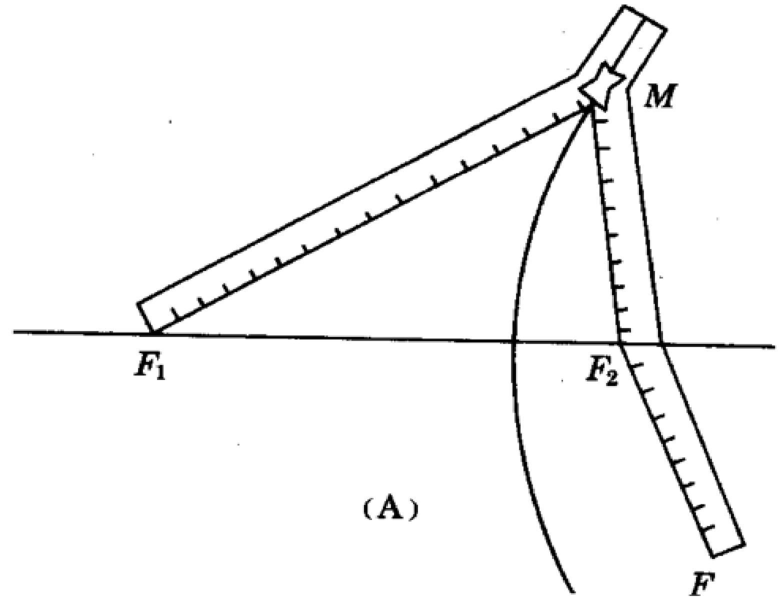
平面内与两定点$F_1$、$F_2$的距离的 $\boxed{差}$ 等于常数的点的轨迹是什么呢?

双曲线图象

拉链画双曲线

①如图(A)，

$|MF_1|-|MF_2|=|F_2F|=2a$



(A)

②如图(B)，

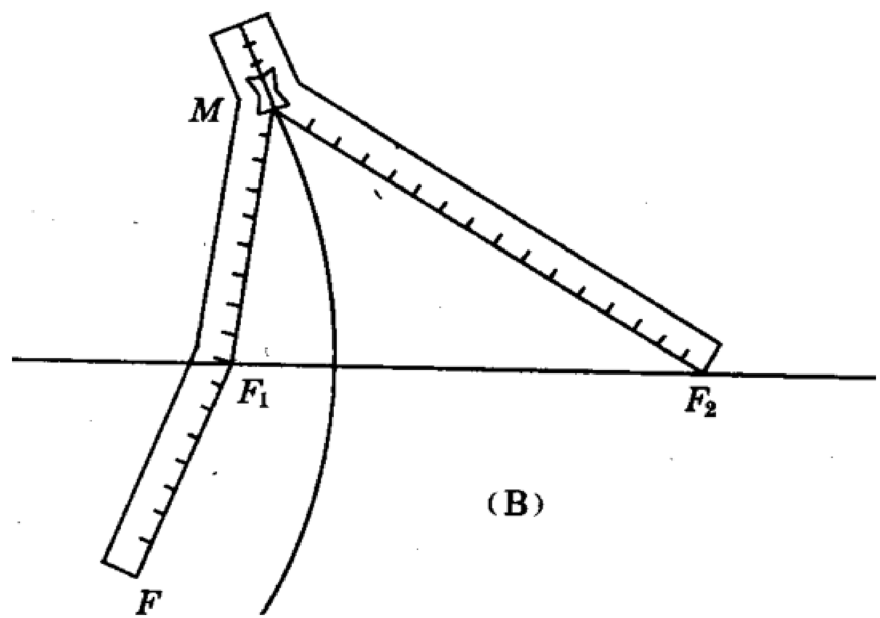
$|MF_2|-|MF_1|=|F_1F|=2a$

由①②可得：

$||MF_1|-|MF_2||=2a$

（差的绝对值）

上面 两条合起来叫做双曲线



(B)

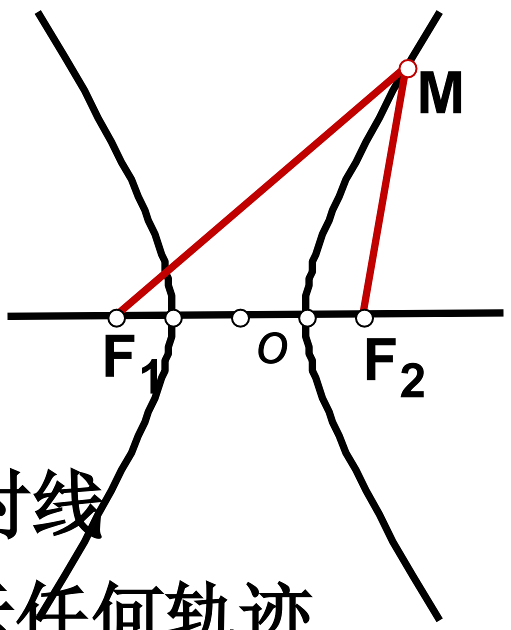
# 双曲线定义

平面内与两个定点$F_1$，$F_2$的距离的差的绝对值等于常数（小于｜$F_1F_2$｜)的点的轨迹叫做双曲线.

$$||MF_1| - |MF_2|| = 2a$$

① 两个定点$F_1$、$F_2$——双曲线的**焦点**;

② $|F_1F_2|=2c$ ——**焦距**.




说明

（1）$2a<2c$；

（2）$2a>0$；

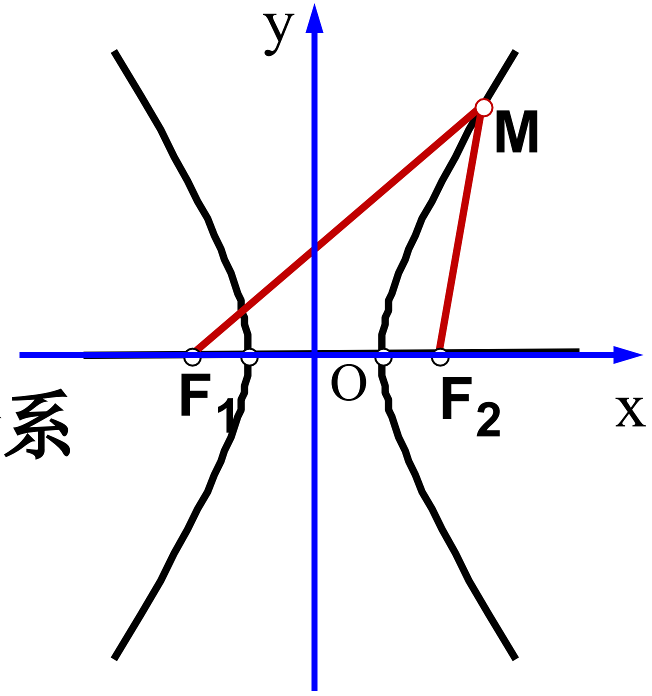
思考:

（1）若$2a=2c$,则轨迹是什么？ (1)两条射线

（2）若$2a>2c$,则轨迹是什么？ (2)不表示任何轨迹

（3）若$2a=0$,则轨迹是什么？ (3)线段$F_1F_2$的垂直平分线

# 双曲线的标准方程




**求曲线方程的步骤:**

**1. 建系.**

以$F_1$,$F_2$所在的直线为x轴，线段$F_1F_2$的中点为原点建立直角坐标系

**2. 设点.**

设M（x , y）,则$F_1(-c,0)$,$F_2(c,0)$

**3. 列式** $|MF_1| - |MF_2| = \pm 2a$

即 $$\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}=\pm 2a$$

**4. 化简**

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}=\pm 2a$$

$$\left(\sqrt{(x+c)^2+y^2}\right)^2=\left(\pm 2a+\sqrt{(x-c)^2+y^2}\right)^2$$

$$cx-a^2=\pm a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

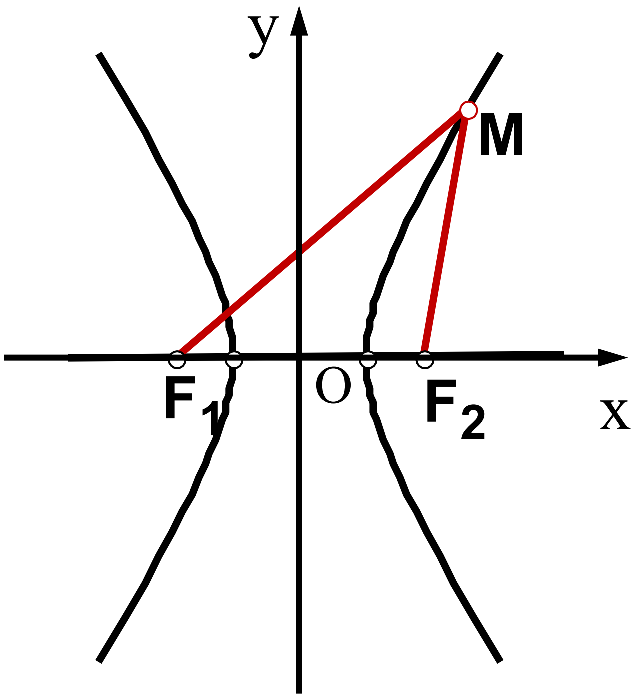
$$(c^2-a^2)x^2-a^2y^2=a^2(c^2-a^2)$$

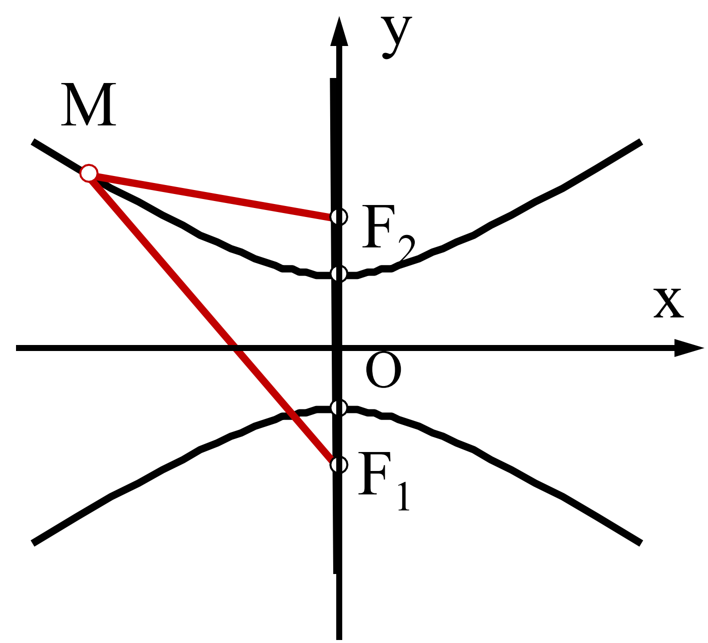
$$c^2-a^2=b^2$$

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$$

此即为焦点在x轴上的双曲线的标准方程

# 若建系时,焦点在y轴上呢?




$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

$$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$$

$$(a>0,\ \ b>0)$$

# 问题

1、如何判断双曲线的焦点在哪个轴上？

看 $x^2, y^2$ 前的系数，哪一个为正，则在哪一个轴上

2、双曲线的标准方程与椭圆的标准方程有何区别与联系？

# 双曲线与椭圆之间的区别与联系

| | 椭　圆 | 双曲线 |
|---|---|---|
| 定 义 | $\|MF_1\|+\|MF_2\|=2a$ | $\|\|MF_1\|-\|MF_2\|\|=2a$ |
| 方 程 | $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$<br>$\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1(a>b>0)$ | $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$<br>$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ |
| 焦 点 | F（±c，0）<br>F（0，±c） | F（±c，0）<br>F（0，±c） |
| a.b.c的关系 | a>b>0，$a^2=b^2+c^2$ | a>0，b>0，但a不一定大于b，$c^2=a^2+b^2$ |

例 1（参考课本 $P_{58}$ 例）

已知两定点 $F_1(-5,0)$，$F_2(5,0)$．动点 $P$ 满足 $\left||PF_1|-|PF_2|\right|=6$，求动点 $P$ 的轨迹方程.

解：$\because |F_1F_2|=10>6$，$\left||PF_1|-|PF_2|\right|=6$

$\therefore$ 由双曲线的定义可知，点 $P$ 的轨迹是一条双曲线，

$\because$ 焦点为 $F_1(-5,0),F_2(5,0)$

∴可设所求方程为：

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \quad (a>0,\ b>0).$$

$\because 2a=6,\ 2c=10,\ \therefore a=3,\ c=5.$

所以点 $P$ 的轨迹方程为 $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{16}=1$

**变式训练 1**:已知两定点 $F_1(-5,0)$ , $F_2(5,0)$ ,动点 $P$ 满足 $\left||PF_1|-|PF_2|\right|=10$ ,求动点 $P$ 的轨迹方程.

解: $\because |F_1F_2|=10$ , $\left||PF_1|-|PF_2|\right|=10$

$\therefore$ 点 $P$ 的轨迹是两条射线,

轨迹方程为 $y=0(x\geqslant 5$ 或 $x\leqslant -5)$

**变式训练 2**:已知两定点 $F_1(-5,0)$ , $F_2(5,0)$ ,动点 $P$ 满足 $|PF_1|-|PF_2|=6$ ,求动点 $P$ 的轨迹方程.

变式2答案