第四节　有固定转动轴的物体的平衡

我们学习过杠杆的概念，杠杆就是在力的作用下可以绕固定点转动的一根硬棒。在这一节，我们将加以延伸，得到更一般情况下物体处于转动平衡的条件。

一、转动轴与力矩

日常生活中我们可以见到许多转动的物体，比如，开门或者关门时，门绕着门轴做圆周运动，电风扇转动时，叶片上各个点都做圆周运动，圆周的中心在同一条直线上。像这样物体在转动时，各点做圆周运动的圆心的连线叫做转轴。例如，地球的转轴就是地轴。地球、门、电风扇都在做定轴转动，即绕着固定轴转动。

力使物体转动的效果不仅与力的大小有关，还与转轴到力的作用线的距离有关。从转轴到力的作用线的垂直距离叫做力臂。在纸面内作图时，转轴往往与纸面垂直，与纸面有一个交点，而力往往在纸面内，因此力臂实际上是该交点（即通常所说的支点）到力的作用线的距离，如图 4.173 所示。

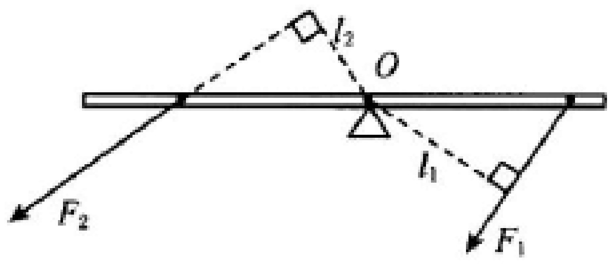

图 4.173

力和力臂的乘积叫做力对转轴的力矩，力矩用 M 表示，表达式为 $M = FL$，其单位为“牛•米”，符号为“$N \cdot m$”。力矩是表示力对物体转动作用大小的物理量。我们学过的“动力乘以动力臂”“阻力乘以阻力臂”实际上都是指力矩。显然，若力的作用线通过转轴，则该力的力矩为零，对物体没有转动效果。

二、有固定转动轴的物体的平衡条件

当有一定大小和形状的物体处于静止状态，或绕某一点匀速转动时，我们就说该物体处于平衡状态。

作用在物体上的力，当力矩不为零时，力就会对物体有转动效果。在纸面内，我们可以把力使杠杆转动的方向分为顺时针和逆时针方向，例如图 4.173 所示，力 F_1 对物体的转动效果是顺时针方向，力 F_2 对物体的转动效果是逆时针方向，这两个力使物体的转动方向是相反的。

结合杠杆的平衡条件不难得知，有固定转动轴的物体的平衡条件，是使物体向逆时针转动的力矩之和，等于使物体向顺时针转动的力矩之和，写成表达式即 $M_{逆} = M_{顺}$，或写成 $F_1 l_1 + F_2 l_2 = F_3 l_3 + F_4 l_4$ 的形式。

值得一提的是，对于处于平衡状态的物体，由于它所受的各个力的合力必为零，因此选取任何位置作为支点，物体所受到的力对该支点的力矩都是平衡的。处理问题时，我们也常常选取合适的支点来列出平衡方程，从而使得解决问题更简便。同时，我们还常常将力矩平衡与共点力平衡相结合，列出平衡方程组来求解未知量。

下面分类举出具体的例子，供读者学习参考。

1．巧取转动轴

对于静止的物体，不仅满足共点力平衡，同时对任意转动轴也都满足力矩平衡。因此我们在分析物体的力矩平衡时，可以选择一些力的交点作为转轴，使这些力的力矩为零，从而使解决问题变得简便。

例 1　（上海第 24 届大同杯初赛）如图 4.174 所示，三根长度均为 L 的轻绳分别连接于 C ，D 两点， A ， B 两端悬挂在水平天花板上，相距为 2L 。现在 C 点悬挂一个质量为 m 的重物，为使 CD 绳保持水平，在 D 点应施加的最小作用力为（　　）。

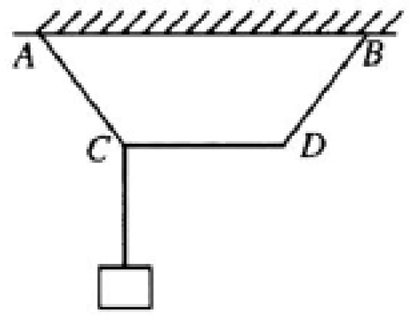

图 4.174

A. mg　　　　B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$mg

C. $\frac{1}{2}$mg　　　　D. $\frac{1}{4}$mg

分析与解　本题可以先分析 C 点的受力情况，得出细线 CD 拉力大小恒定，然后分析 D 点受力情况，画出力的动态三角形，也可以求解拉力的最小值（请读者尝试）。现在我们不妨延长 AC ， BD 交于 O 点，如图 4.175 所示。将 AOB 视为一个杠杆，选取 O 点为转轴，则细线 AC ，BD 的拉力力矩为零。物体通过细线对 C 点的拉力大小为 mg ，由几何关系可知△OCD 为等边三角形，mg 的力臂为 $\frac{1}{2}$L，拉力 F 的力臂的最大值即为 OD 的长度，等于 L ，因此 F 的最小值满足 F_{min}　L　mg　$\frac{L}{2}$，可得 F_{min}　$\frac{1}{2}$mg ，本题正确选项为 C。

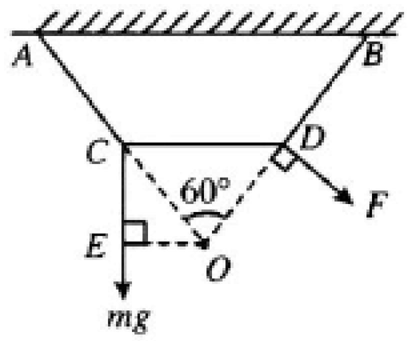

图 4.175

例 2　如图 4.176 所示,长为 L 的轻绳一端固定在倾角为　的粗糙斜面上,另一端系着半径为 r、质量为 m 的均匀球顶部，绳子恰与圆球相切，且绳子水平。求：绳子对球的拉力 F 、斜面对球的支持力 N 以及斜面对球的静摩擦力 f 。

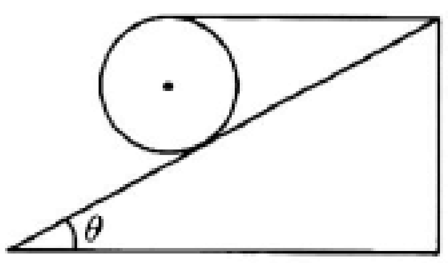

图 4.176

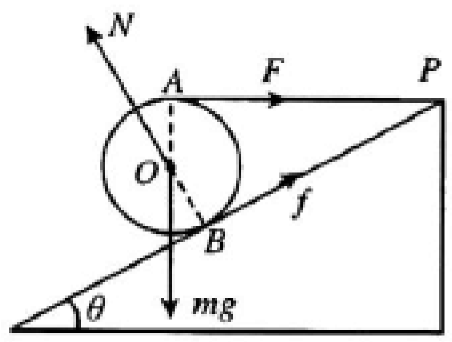

图 4.177

分析与解　如图 4.177 所示，画出球体所受各个力的示意图。其中静摩擦力 f 沿斜面向上，可以选 O 点为转轴，如果 f 沿斜面向下的话，球不会平衡。同时，选 O 为转轴，发现重力与支持力的力矩为零，而绳子拉力 F 与摩擦力 f 的力臂均为球的半径 R ，因此可得 F　f 。再选绳子与斜面的交点 P 为转轴，则绳子拉力 F 与摩擦力 f 的力矩为零。重力与支持力 N 的力臂分别为 PA ，PB ，而 PA　PB ，因此可得 N　mg 。接下来将支持力 N 、摩擦力 f 沿水平、竖直方向上分解，在竖直

方向上有 $N\cos \quad f\sin \quad mg$ ，将 $N \quad mg$ 代入，解得 $f \quad \frac{mg \ 1 \ \ \cos}{\sin}$ 。综上所述，可知 $N \quad mg$ ，$F \quad f \quad \frac{mg \ 1 \ \ \cos}{\sin}$ 。

2．力的最小值问题

我们在前面的章节里讨论了利用力平衡时的动态三角形求解力最小值的问题，下面介绍利用力矩平衡来求解最小力的问题。当某一个力的力矩大小 $M \quad FL$ 为恒定值时，若使得 F 取最小值，只需要力臂 L 取最大值即可。因此问题的关键就是找到最长的力臂。

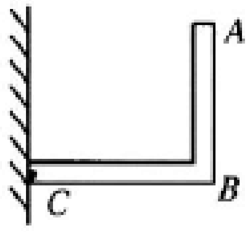

图 4.178

例 3　如图 4.178 所示，ABC 为质量均匀的等边直杆，总质量为 $2m$ ，C 端由铰链与墙相连，当 AB 处于竖直、BC 处于水平静止状态时，施加在 A 端的作用力至少为________，最小力的方向为________。

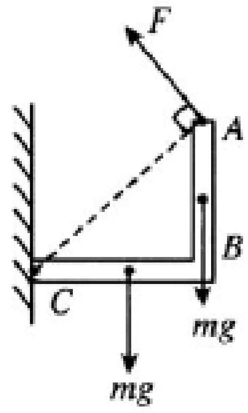

图 4.179

分析与解　由于，AB ，BC 杆的重力及重力力臂不变，因此要使杠杆平衡时作用在 A 点的力 F 最小，只需使力 F 的力臂最大即可，连接转轴 C 与力 F 的作用点 A ，则 CA 的长度就是力 F 最长的力臂，最小的力 F 即作用在 A 点且与 CA 垂直斜向上，如图 4.179 所示。设 AB ，BC 杆的长度均为 L ，则有 $F \quad \sqrt{2}L \quad mg \quad \frac{L}{2}$ $mg \quad L$ ，解得 $F \quad \frac{3\sqrt{2}}{4}mg$ 。

例 4　(上海第 21 届大同杯复赛)如图 4.180 所示，重力为 G 的物体挂在水平横杆的右端 C 点。水平横杆左端有一可转动的固定轴 A ，轻杆 AC 长为 L 。轻绳的 B 端可固定在 AC 杆上的任一点，绳的 D 端可固定在竖直墙面上的任一点，绳 BD 长为 L ，轻杆始终保持水平。则当 AB 间的距离为________时，绳 BD 的拉力取得最小值，最小值为________。

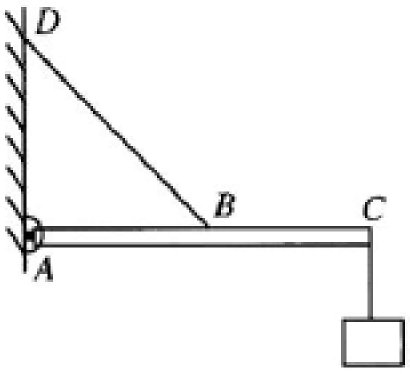

图 4.180

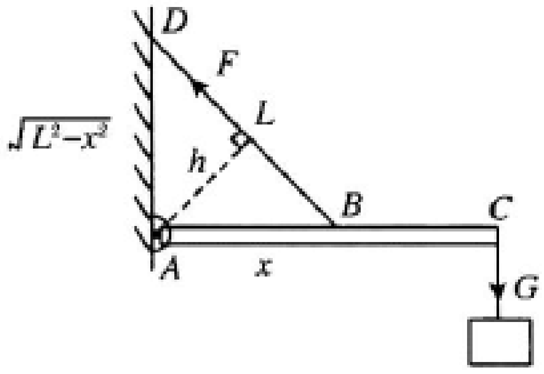

图 4.181

分析与解　先找出绳 BD 的拉力 F 的力臂 h ，如图 4.181 所示，由勾股定理可求得 $AD \quad \sqrt{L^2 \quad x^2}$ ，$h \quad \frac{x\sqrt{L^2 \quad x^2}}{L}$ ，则以 A 点为转轴，有 $F \quad \frac{x\sqrt{L^2 \quad x^2}}{L} \quad G \quad L$ 。

套近乎用不等式知识，当 $a \quad 0$ ，$b \quad 0$ 时，有 $a^2 \quad b^2 \quad 2ab$ ，可得 $ab \quad \frac{a^2 \quad b^2}{2}$ 。因此

$x\sqrt{L^2 \quad x^2} \quad \dfrac{x^2 \quad L^2 \quad x^2}{2} \quad \dfrac{L^2}{2}$，当且仅当 $x^2 \quad L^2 \quad x^2$，即 $x \quad \dfrac{\sqrt{2}}{2}L$ 时（对应的 $h \quad \dfrac{L}{2}$），不等式取等号。则 $F \quad \dfrac{G \quad L^2}{x\sqrt{L^2 \quad x^2}} \quad 2G$，解得 $F \quad 2G$，因此绳 BD 的拉力最小值为 $2G$ 。

3．转动物体的动态平衡问题

转动物体的动态平衡分为两种，一种是缓慢转动，此种情况下物体不仅处于力矩平衡，同时也处于共点力平衡。另一种是物体匀速转动，这种情况下只适用于力矩平衡。

例 5　如图 4.182 所示，一根均匀直棒 AB，A 端用光滑铰链固定于顶板上，B 端搁在一块表面粗糙的水平板上，滑动摩擦系数 $\quad 1$，且一开始 $\quad 45$，现设板向上运动而棒 AB 匀速转动，则关于木板对棒的弹力，下列说法正确的是（　　）

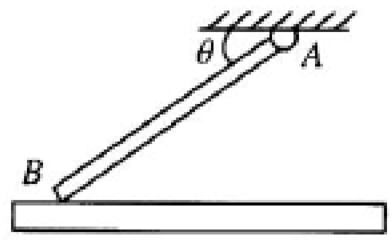

图 4.182

A．逐渐变大　　　　B．先变大后变小

C．先变小后变大　　　　D．逐渐变小

分析与解　棒匀速转动过程中，受三个力：重力 G、板对棒的弹力 N 和滑动摩擦力 f，由于棒的 B 端相对于板向左滑动，因此 f 的方向水平向右，如图 4.183 所示。由于棒匀速转动，上述三个力的力矩和为零，有 $N \quad L\cos \quad f \; L\sin \quad G\;\dfrac{L}{2}\cos$，结合 $f \quad N$，代入上式，整理得 $N \quad \dfrac{\frac{1}{2}G\cos}{\cos \quad \sin} \quad \dfrac{\frac{1}{2}G}{1 \quad \tan}$，由题意，$\quad 1$，且一开始 $\quad 45$，则 $1 \quad \tan \quad 0$。随着木棒转动，逐渐减小，$\tan$ 逐渐减小，$1 \quad \tan$ 逐渐增大。因此 N 逐渐增大。本题正确选项为 D。

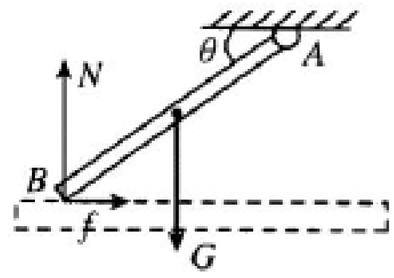

图 4.183

例 6　如图 4.184 所示，均匀光滑直棒一端铰于地面，另一端搁在一个立方体上，杆与水平面间的夹角 为 30 左右。现将立方体缓慢向左推，则棒对立方体的压力大小将（　　）。

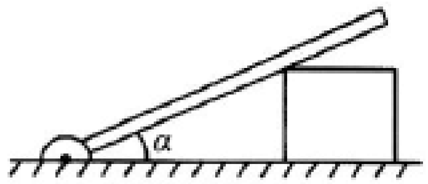

图 4.184

A．逐渐增大　　　　B．逐渐减小

C．先增大后减小　　　　D．先减小后增大

分析与解　如图 4.185 所示，不妨以棒为研究对象，杆受重力 G 和立方体对杆的弹力 F 作用，其中弹力 F 垂直于棒斜向上。当立方体缓慢向左推时，杆缓慢转动，重力 G 与弹力 F 力矩平衡。不妨设立方体高为 h，杆长为 L，则力 F 的力臂为 $\dfrac{h}{\sin}$，则 $F\;\dfrac{h}{\sin} \quad G\;\dfrac{L}{2}\cos$，解得 $F \quad \dfrac{GL}{2h}\sin\;\cos$，结合倍角公式 $\sin 2 \quad 2\sin\;\cos$，得 $F \quad \dfrac{GL}{4h}\sin 2$，当 $\quad 45$ 时，$\sin 2 \quad 1$，

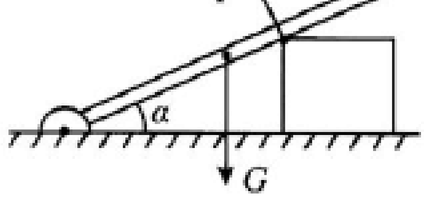

图 4.185

可见，当 由30 左右逐渐增大到45 时，F 变大；当 45 时，F 取得最大值$F \quad \frac{GL}{4h}$；当

由45 左右逐渐增大到接近90 时，F 减小。因此，本题正确选项为 C。

4．轻杆问题分析

轻杆是指质量忽略不计的杆（未必是直杆）。当轻杆可以绕其一端A自由转动时，要维持轻杆的平衡，轻杆另一端B受到的力必沿着AB 所在直线的方向，否则轻杆不可能平衡，如图 4.186 所示。

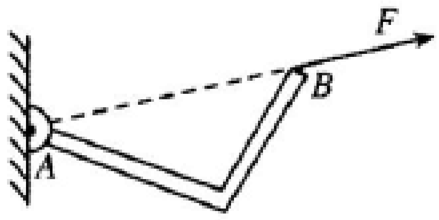

图 4.186

例 7　如图 4.187 所示，AB 为匀质杆，其重力为$8N$，与竖直墙面成37 角；BC 为支撑AB的水平轻杆，A，B，C 三处均用铰链连接且位于同一竖直平面内。则BC 杆对B端铰链的作用力的方向为________，该力的大小为________N。($\sin 37 \quad 0.6$，$\cos 37 \quad 0.8$)

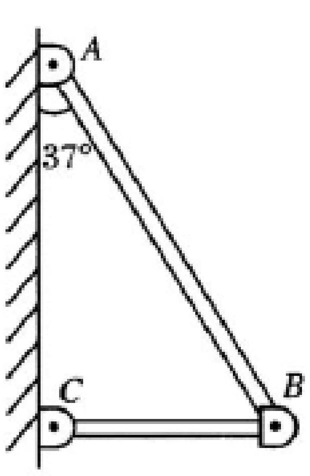

图 4.187

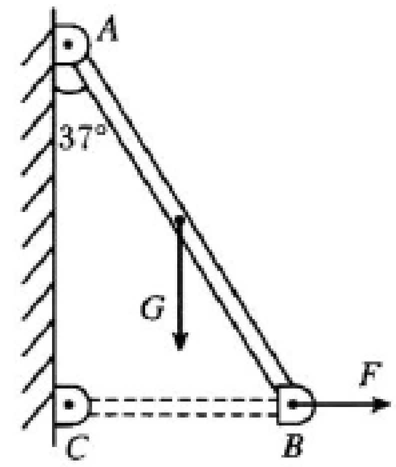

图 4.188

分析与解　由于BC 杆为轻杆，且C 端可以自由转动，因此BC 平衡时其B端受力方向必然由B指向C，因此BC 杆对AB 杆的反作用力F 沿着CB 方向，即水平向打开，如图 4.188 所示。以A点为转轴，设AB 杆长为L，对AB 杆应用力矩平衡，有$F \quad L\cos 37 \quad G \quad \frac{L}{2}\sin 37$，解得

$F \quad \frac{1}{2}G\tan 37^\circ \quad 3N$。

例 8　（上海第 30 届大同杯初赛）如图 4.189 所示，光滑轻质细杆AB，BC 处在同一竖直平面内，B处用铰接连接，A，C 处用铰链铰于水平地面上，BC 杆与水平面夹角为37。一质量为$3.2kg$的小球穿在BC 杆上，对小球施加一个水平向左的恒力使其静止在BC 杆中点处，AB 杆恰好竖直，则（　　）。

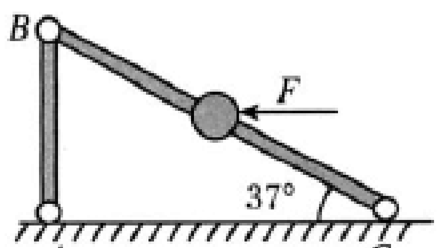

图 4.189

A．F 的大小为$40N$

B．小球对BC 杆的作用力大小为$40N$

C．AB 杆对BC 杆的作用力大小为$25N$

D．地面对BC 杆的作用力大小为$25N$

分析与解　画出小球的受力情况如图 4.190 所示，将小球所受各力沿平行于斜面和垂直于斜面的方向正交分解，平行于斜面方向有$F\cos 37 \quad G\sin 37$，解得$F \quad G\tan 37 \quad 24N$，在垂直于斜面上方有$N \quad F\sin 37 \quad G\cos 37 \quad 40N$。由于两杆均为轻杆，因此$AB$ 杆所受压力必沿着AB

向下，AB 杆对 BC 杆的弹力必沿着 AB 向上，BC 杆受到小球对其的压力 $N \quad N \quad 40N$ 垂直于 BC 杆斜向下，BC 杆受力如图 4.191 所示。以 C 点为转轴，设 BC 杆长为 L，则对 BC 杆有 $F_B L\cos37 \quad N \frac{L}{2}$，解得 $F_B \quad \frac{N}{2\cos37} \quad 25N$。同样以 BC 杆为研究对象，如图 4.192 所示，设地面对 BC 杆的水平、竖直作用力分别为 F_x，F_y，则水平方向有 $F_x \quad N\sin37 \quad 24N$，竖直方向有 $F_y \quad N\cos37 \quad F_B \quad 7N$，因此地面对 BC 杆的作用力大小 $F_C \quad \sqrt{F_x^2 \quad F_y^2} \quad 25N$。综上所述，本题正确选项为 BCD。

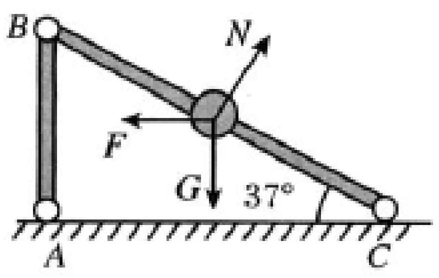

图 4.190

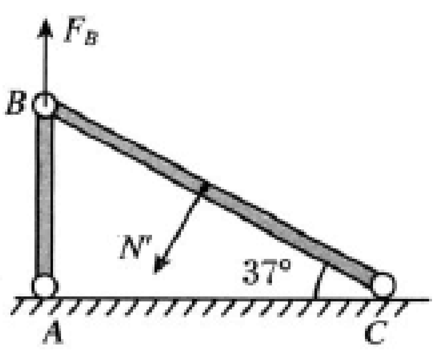

图 4.191

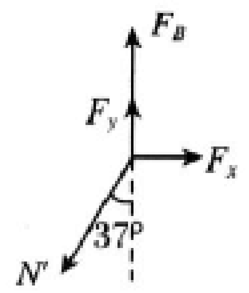

图 4.192

5．物体的平衡与稳定

如图 4.193 所示，平放和竖放的砖都处于平衡状态，但是竖放的砖与平放的砖相比较容易倒下，可见它们的稳定程度不同，我们把物体稳定平衡的程度叫做稳度。

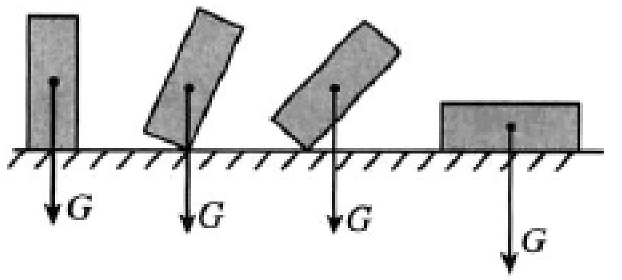

图 4.193

竖放的砖稳度小，平放的砖稳度大。由图可知其原因是：竖放砖的底面积小，重心高，当其偏离一个小角度时，重力的作用线很容易超出底面的四条边之外，容易向外侧倒下，而平放的砖底面积大，重心低，当偏离平衡位置一个小角度时，重方的作用线不容易超出底面的四条边之外，不容易向外侧倒下，可见，增大物体的稳度可以分别采用增大底面积和降低重心高度，或者同时采用增大底面积和阵低重心高度的方法。

例 9 （上海第 27 届大同杯复赛）有一个“不倒翁”，形状可以简化成由半径为 R 的半球与顶角为 74 的圆锥体组成，如图 1 以所示，它的重心在对称轴上。为了使“不倒翁”在任意位置都能恢复竖直状态，则该“不倒翁”的重心到半球体的球心 O 的距离必须大于（　　）。

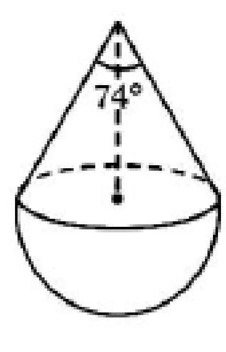

图 4.194

A．0　　　　B．$\frac{2}{3}R$

C．$\frac{3}{5}R$　　　　D．$\frac{3}{4}R$

分析与解　将“不倒翁”扳倒，使圆锥的侧面母线 AB 紧贴地面，如图 4.195 所示。若放倒后“不倒翁”恰能恢复竖直，则其重力的作用线（C 为重心）必恰好通过图中 B 点，B 点为底部半球与地面的切点。根据几何

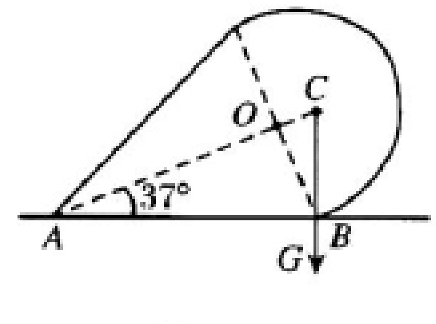

图 4.195

关系， OBC 37 、在直角△COB 中，tan37 $\frac{OC}{OB}$ $\frac{3}{4}$，则OC $\frac{3}{4}$OB $\frac{3}{4}$R 。当OC $\frac{3}{4}$R 时，重力的作用线在支撑面以外，“不倒翁”必能恢复竖直状态，本题正确选项为 D。

例 10 如图 4.196 所示，一只圆柱形均质木块，上、下底面圆的直径为 a ，高为 b 。现将木块置于倾角为 的粗糙斜面上，木块底部与斜面间的动摩擦因数为 ，已知木块重心在几何中心，最大静摩擦力等于滑动摩擦力。试求出木块在斜面上既不滑动也不翻转的条件。

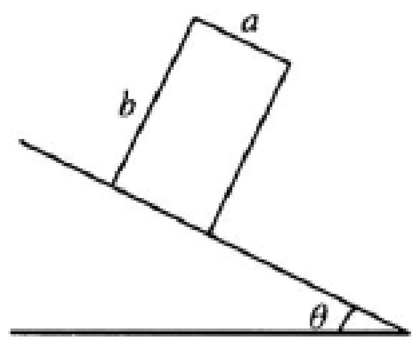

图 4.196

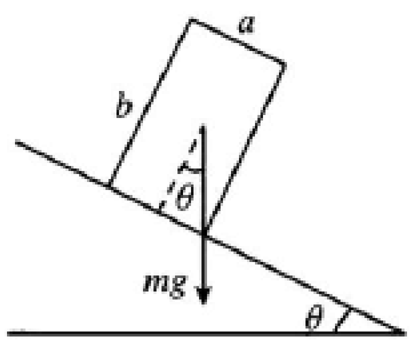

图 4.197

分析与解 木块不滑动的条件是重力沿斜面向下的分力 mg sin 不大于最大静摩擦力，即 mg sin ⩽ mg cos ，解得 tan ⩽ 。木块不翻转的条件是重力的作用线不能超出底面圆面积范围，当重力作用线恰通过底面圆边缘时，木块恰不翻倒，如图 4.197 所示，由几何关系，不翻倒的条件应为 tan $\leqslant \frac{\frac{1}{2}a}{\frac{1}{2}b}$ $\frac{a}{b}$。可见，若要木块既不滑下又不翻到，需要同时满中上述两个式于（即 tan 小于 与 $\frac{a}{b}$ 中较小的一个）。因此讨论如下：①若 $\geqslant \frac{a}{b}$，需 tan $\leqslant \frac{a}{b}$，②若 $\frac{a}{b}$，需 tan ⩽ 。

三、平衡综合问题

当物体处于静止时，不仅满足力矩平衡，同时也满足共点力平衡，在解决此类问题时，要根据需要列出不同的平衡方程。

例 11 （上海第 31 届大同杯初赛）如图 4.198 所示，质量分布均匀的直杆 AB 置于水平地面上，现在 A 端施加外力 F ，缓慢抬起直杆直至竖直，B 端始终和地面之间保持相对静止，F 的方向始终和直杆垂直，则：

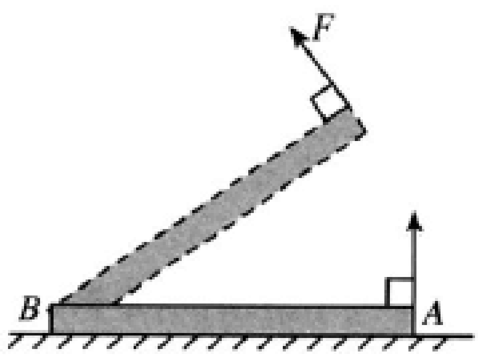

图 4.198

（1）该过程中直杆 B 端受到的摩擦力的变化情况是（ ）。

A. 保持不变　　B. 先减小后增大

C. 逐渐减小　　D. 先增大后减小

（2）在缓慢抬起直杆的过程中，要确保直杆 B 端始终和地面保持相对静止，直杆和地面之间的摩擦因数至少为（ ）。

A. $\frac{1}{3}$　　B. $\frac{1}{4}$　　C. $\frac{\sqrt{2}}{4}$　　D. $\frac{\sqrt{3}}{5}$

分析与解 （1）杆在外力作用下绕着底部端点 B 缓慢转动，对杆受力分析，杆受拉力 F 、重力 G 以及地面对杆底部的支持力 N 和静摩擦力 f 。为了简便，以 B 为转轴，则支持力与静摩擦力的力矩为零。拉力 F 与重力 G 力矩平衡。设杆长为 L ，杆与地面的夹角为 ，如图 4.199 所示，则有 $FL \quad G\ \frac{L}{2}\cos$ ，得

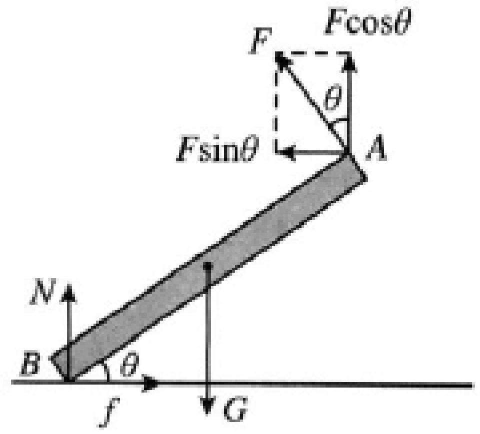

图 4.199

$$F \quad \frac{1}{2}G\cos \qquad ①$$

由几何关系，拉力 F 与竖直方向的夹角等于 ，将拉力 F 沿水平和竖直方向正交分解，对杆列出平衡方程。

竖直方向：

$$N \quad G \quad F\cos \qquad ②$$

水平方向：

$$f \quad F\sin \qquad ③$$

将①式代入③式，可得

$$f \quad \frac{1}{2}G\sin\ \cos \qquad ④$$

结合三角公式 $\sin 2 \quad 2\sin\ \cos$ ，可得

$$f \quad \frac{1}{4}G\sin 2 \qquad ⑤$$

可见，当 $2 \quad 90$ ，即 45 时， f 取得最大值 $f_{max} \quad \frac{1}{4}G$ 。因此正确选项为 D。

（2）在缓慢抬起直杆的过程中，若直杆 B 端始终不滑动，则对任一角度 需满足最大静摩擦力 $f \quad F\sin$ ，由于最大静摩擦力认为等于滑动摩擦力，设动摩擦因数为 ，则最大静摩擦力 $f \quad N$ ，又 $N \quad G \quad F\cos$ ，将 $F \quad \frac{1}{2}G\cos$ 代入，得

$$f \quad G\ 1\ \frac{1}{2}\cos^2 \quad F\sin \quad \frac{1}{2}G\sin\ \cos \qquad ⑥$$

⑥式取等号，即解得

$$\frac{\sin\ \cos}{2\ \ \cos^2} \quad \frac{\sin\ \cos}{2\sin^2\ \ \cos^2} \quad \frac{1}{2\tan\ \ \cot} \qquad ⑦$$

由于 $2\tan\ \ \cot \quad 2\sqrt{2\tan\ \ \cot} \quad 2\sqrt{2}$ ，因此 $\frac{1}{2\tan\ \ \cot} \quad \frac{1}{2\sqrt{2}} \quad \frac{\sqrt{2}}{4}$ ，可见，要使得杆不滑动，动摩擦因数至少要为 $\frac{\sqrt{2}}{4}$ ，选项 C 正确。

当然，本题第（2）问也可以采用三力交汇原理处理，应先将支持力N 与摩擦力 f 合成为全反力R，并设R 与支持力N 的夹角为 ，如图4.200所示，则有 $\tan \quad \frac{f}{N}$，当杆恰未滑动时，静摩擦力达到最大，f N，此时 $\tan \quad \frac{f}{N}$ ， 的值也达到最大，即为摩擦角。只要在杆逐渐转动过程中， 的值满足 tan ，杆即不会滑动。现使 取最大值，延长全反力R、重力G、拉力F 的作用线交于D 点，并设杆的重心为C，过B 作BE 垂直于重力G 的作用线于E，几何关系如图 4.200 所示。则 $BE \quad \frac{L}{2}\cos$ ，

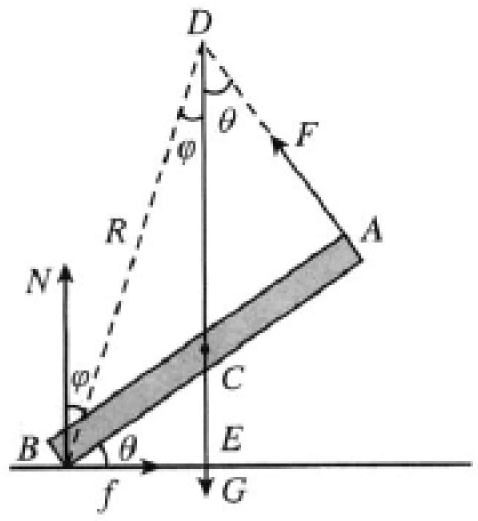

图 4.200

$DE \quad \frac{BE}{\tan} \quad \frac{\frac{L}{2}\cos}{\tan}$ ， $CE \quad \frac{L}{2}\sin$ ， $DC \quad \frac{\frac{L}{2}}{\sin}$ 。因 DE CE DC ， 可 得 $\frac{\frac{L}{2}\cos}{\tan} \quad \frac{L}{2}\sin \quad \frac{\frac{L}{2}}{\sin}$，解得

$$\tan \quad \frac{\cos}{\sin \quad \frac{1}{\sin}} \quad \frac{\sin\ \cos}{\sin^2 \quad 1} \quad \frac{\sin\ \cos}{2\sin^2 \quad \cos^2} \quad \frac{1}{2\tan \quad \cot}$$

因此同样可求得动摩擦因数至少为$\frac{\sqrt{2}}{4}$。

例 12 如图 4.201 所示，直径为36cm 的半球形碗固定在水平面上，碗的端口水平。一根密度分布均匀、长度为47cm 的光滑杆ABC 搁置在半球碗上，碗的厚度不计。则杆平衡时：

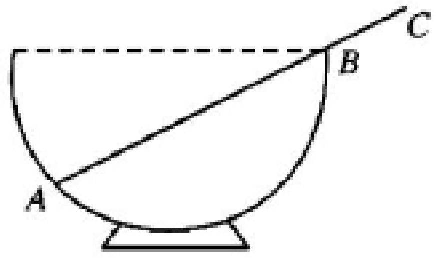

图 4.201

（1）杆在B 点受到的弹力与杆受到的重力大小之比是多少？

（2）杆在碗内的部分AB 与碗外部分BC 的长度之比是多少？

分析与解 杆平衡后受三个力作用，重力G、碗底对杆A 端的弹力F_A、碗边缘对坏的弹力F_B，由于杆处于平衡状态，这三个力必为共点力（即力的作用线交于一点），但是本题用力矩平衡，结合共点力平衡来处理，较为简便。

（1）设碗端口的圆心为O 点，连接OA ，OB ，设杆与水平方向的夹角为 ，作出杆受到的三个力，其中F_A指向圆心O 点，F_B垂直于杆斜向上，如图 4.202 所示。由于待求的是F_B。与重力G 的大小关系，因此不妨选取过A 且垂直于纸面的轴为转动轴（即通常所说的取A 为支点)，则重力G 与F_B力矩平衡。结合几何关系，F_B的力臂为AB 2R cos ，

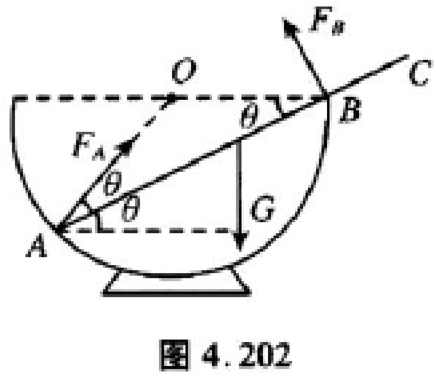

图 4.202

重力的力臂为$\frac{1}{2}L\ \cos$ ，其中L为杆长。则有$G\ \ \frac{1}{2}L\cos\quad F_B\ \ 2R\cos$ ，因此有$\frac{G}{F_B}\quad\frac{4R}{L}\quad\frac{72}{47}$。

（2）若要求解杆AB部分与BC部分的长度之比，则只要先求出角度 ，问题即可迎刃而解。接下来不妨考虑杆的受力平衡。将杆受到的力分别沿着杆方向、垂直于杆方向分解，在两个方向上列出平衡方程。

沿杆方向：

$$F_A\cos\quad G\sin$$

垂直于杆方向：

$$F_A\sin\quad G\cos\quad F_B$$

两式消去F_A，得

$$G\frac{\sin^2}{\cos}\quad G\cos\quad F_B$$

将$\frac{G}{F_B}\quad\frac{72}{47}$代入，并通分化简得$2\cos^2\quad\frac{47}{72}\cos\quad 1\quad 0$，解得$\cos\quad\frac{8}{9}$，另一解为负，舍去。因此

$$\frac{AB}{BC}\quad\frac{2R\cos}{L\quad 2R\cos}\quad\frac{36\ \frac{8}{9}}{47\quad 36\ \frac{8}{9}}\quad\frac{32}{15}$$

对于本题的第（2）小问，也可以利用三力交汇来处理，具体如下：延长杆所受三个力的作用线交于D点，由于$ABD\quad 90$，AD必为直径，即D点在图 4.203 所示的圆上。过A作重力作用线的垂线AE，则E点亦必在图 4.203 所示的圆上。因此AE的长度可以表示为$AE\quad 2R\cos 2\quad\frac{L}{2}\cos$。结合三角公式$\cos 2\quad 2\cos^2\quad 1\ \ 1\ \ 2\sin^2$，可得$2R\ \ 2\cos^2\quad 1\quad\frac{L}{2}\cos$，将$2R\quad 36cm$，$L\quad 47cm$代入，亦可解得$\cos\quad\frac{8}{9}$，因此可求得$\frac{AB}{BC}\quad\frac{32}{15}$。

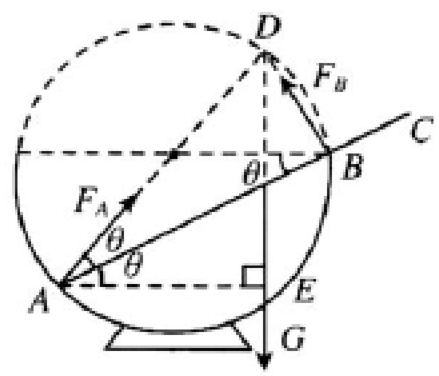

图 4.203

例 13　如图 4.204 所示，AB是一根重为G的均质细直杆，A端靠在光滑的竖直墙壁上，B端置于水平地面上，杆在竖直平面内。已知杆与地面之间的动摩擦因数为产，最大静靡檫力等于滑动摩擦力，杆身与地面的夹角为 。求：

（1）杆受地面的支持力与摩擦力的大小。

（2）若杆不滑动，则 应满足的条件。

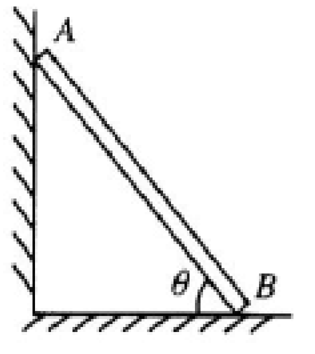

图 4.204

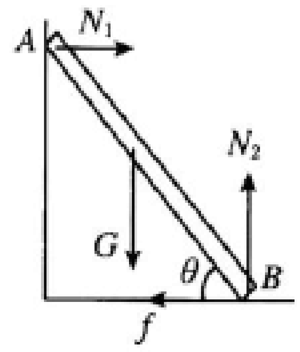

图 4.205

分析与解 （1）画出杆所受各力如图 4.205 所示。由整体法，可知 N_2 G ， f N_1 ，以 B 点为支点应用力矩平衡，设杆长为 L ，则有 $G \frac{L}{2}\cos$ N_1 $L\sin$ ，解得 N_1 $\frac{1}{2}G\cot$ ，则 f N_1 $\frac{1}{2}G\cot$ 。

（2）杆与地面的夹角 越小，杆越容易滑动，当杆恰好不滑动时， 取得最小值，此时杆所受摩擦力为最大静摩擦力。由（1）可知， f N_1 $\frac{1}{2}G\cot$ N_2 G ，解得 cot 2 ，可见，当 cot ⩽2 时，杆不会滑动。

本题的第（2）问也可以采用三力交汇原理来处理，具体如下：在杆恰未滑动时，将 N_2 与 f 合成为全反力 R ，设 R 与竖直方向夹角为 ，则 tan 。将 R ， G ， N_1 的作用线延长，必交于一点 O ，设杆的重心为 C ，重力作用线与地面交于 D 点。如图 4.206 所示，则根据几何关系，有 BD $\frac{L}{2}\cos$ ，

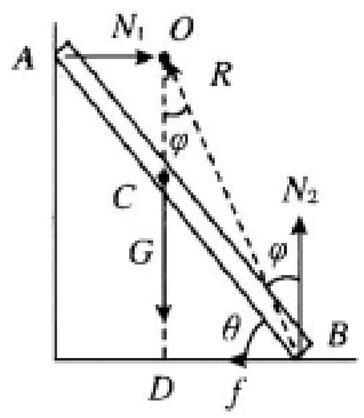

图 4.206

OC CD $\frac{L}{2}\sin$ ， OD $\frac{BD}{\tan}$ $\frac{L\cos}{2\tan}$ ，又 OD 2OC ，即 $\frac{L\cos}{2\tan}$ 2 $\frac{L}{2}\sin$ ，也即 cot 2tan 2 ，同样可得当 cot ⩽2 时，杆不会滑动。

练习题

1．如图 4.207 所示，直杆 OA 可绕过 O 点的水平轴自由转动，图中虚线与杆平行，杆的另一端 A 点受到四个力 F_1 ， F_2 ， F_3 ， F_4 的作用，力的作用线与 OA 杆在同一竖直平面内，它们对转轴 O 的力矩分别为 M_1 ， M_2 ， M_3 ， M_4 ，则它们间的大小关系是（　　）。

A．M_1 M_2 M_3 M_4

B．M_2 M_1 M_3 M_4

C．M_4 M_2 M_3 M_1

D．M_2 M_1 M_3 M_4

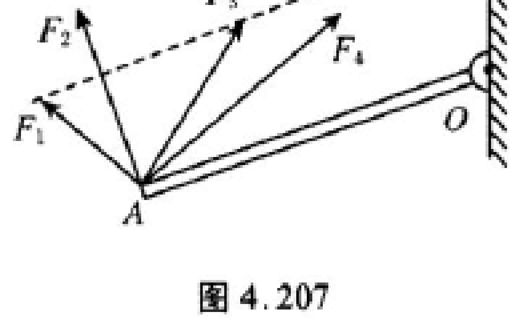

图 4.207

2．（上海第 10 届大同杯复赛）如图 4.208 所示，要将一个半径为 R 、重为 G 的车轮滚上高为 h

的台阶 h $\frac{R}{2}$ ，需在轮的边缘加一个推力。若推力分别作用在 A，B，C 三点时，其最小值分别为 F_A，F_B，F_C，则（　　）。

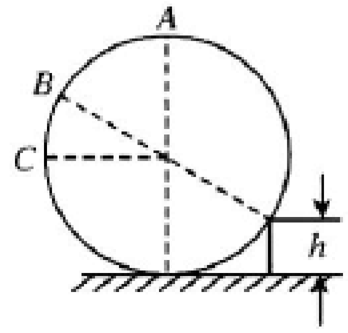

图 4.208

A. F_B F_C F_A　　　　B. F_A F_B F_C

C. F_B F_A F_C　　　　D. F_A F_B F_C

3.（上海第 19 届大同杯初赛）如图 4.209 所示，七块完全相同的砖块按照图示的方式叠放起来，每块砖的长度均为 L，为保证砖块不倒下，6 号砖块与 7 号砖块之间的距离 s 将不超过（　　）。

A. $\frac{31}{15}L$　　B. 2L　　C. $\frac{5}{2}L$　　D. $\frac{7}{4}L$

4.（上海第 19 届大同杯初赛）如图 4.210 所示，质量分布均匀的细杆水平放置，支座 A 在杆重心的右侧，杆的右端被位于其上面的支座 B 顶住。现在杆的左端 C 处施加一个向下的作用力，则（　　）。

A. 两处的弹力均增加，且 ΔF_A ΔF_B

B. 两处的弹力均增加，且 ΔF_A ΔF_B

C. A 处的弹力减小，B 处的弹力增大，且 $|\Delta F_A|$ ΔF_B

D. A 处的弹力增大，B 处的弹力减小，且 F_A $|F_B|$

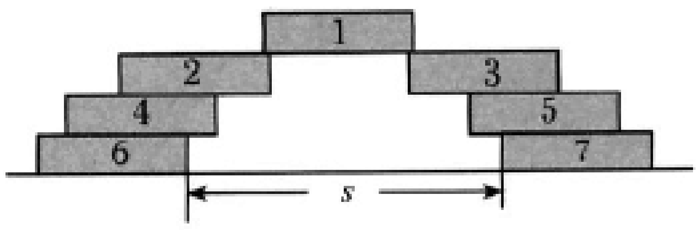

图 4.209

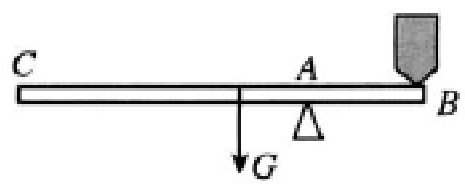

图 4.210

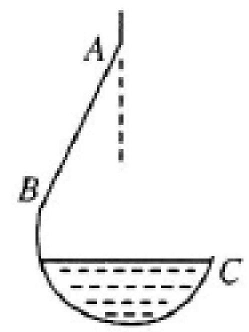

图 4.211

5.（上海第 20 届大同杯初赛）如图 4.211 所示是某汤勺示意图，由一细长柄 AB 与一半球 BC 构成，且 AB 与半球相切，切点为 B。已知半球的半径为 R，AB 柄的长度为 L L:R $\sqrt{8}$:1，现用一细线系住 A 点，并将细线竖直悬挂，如果不计汤勺的质量，则汤勺内水的最大高度是（　　）。

A. $\frac{3}{4}R$　　　　B. $\frac{2}{3}R$

C. $\frac{1}{2}R$　　　　D. $\frac{1}{3}R$

6.（上海第 20 届大同杯初赛）如图 4.212 所示，将一根均匀的木棒 AB 放在支点 O 上，由于 OA OB，木棒不能保持水平，现在木棒右端截去与 OA 等长的一段并置于 OA 上，木棒恰好能平衡，则 OA :OB 为（　　）。

A. 1: $\sqrt{2}$ 1　　B. 1:2　　C. 1:3　　D. 1:4

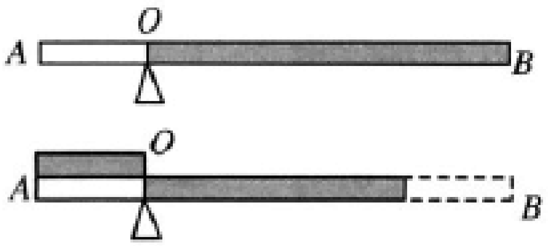

图 4.212

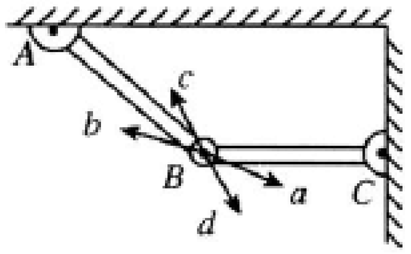

图 4.213

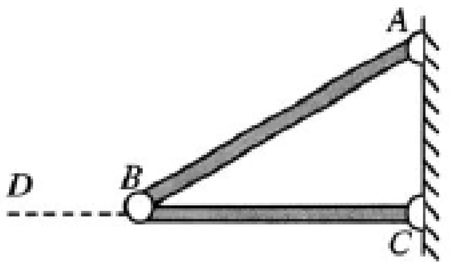

图 4.214

7．如图 4.213 所示，两根均匀直棒 AB ，BC 用光滑的铰链铰于 B 处，两杆的另外一端都用光滑铰链铰于墙上，棒 BC 呈水平状态，a，b，c，d 箭头表示力的方向，则 BC 棒对 AB 棒的作用力的方向可能是（　　）。

A．a　　　B．b　　　C．c　　　D．d

8．（上海第 25 届大同杯初赛）如图 4.214 所示，两根硬杆 AB ，BC 用铰链连接于 A，B，C，整个装置处于静止状态。关于 AB 杆对 BC 杆作用力的方向正确的是（　　）。

A．若计 AB 杆的重力，而不计 BC 杆的重力时，由 A 指向 B

B．若计 AB 杆的重力，而不计 BC 杆的重力时，由 C 指向 B

C．若不计 AB 杆的重力，而计 BC 杆的重力时，由 B 指向 A

D．若不计 AB 扞的重力，而计 BC 杆的重力时，由 B 指向　C

9．（上海第 26 届大同杯初赛）如图 4.215 所示，密度均匀的细杆 AB 与轻杆 BC 用光滑铰链铰在 B 点，A，C 也用光滑的铰链铰于墙上，两杆长度相等，BC 杆水平，AB 杆与竖直方向成37 ，此时 AB 杆与 BC 杆之间的作用力为 F_1。若将两杆的位置互换，AB 杆与 BC 杆之间的作用力为 F_2，则 $F_1:F_2$ 为（　　）。

A．3:5　　　B．5:3　　　C．4:5　　　D．5:4

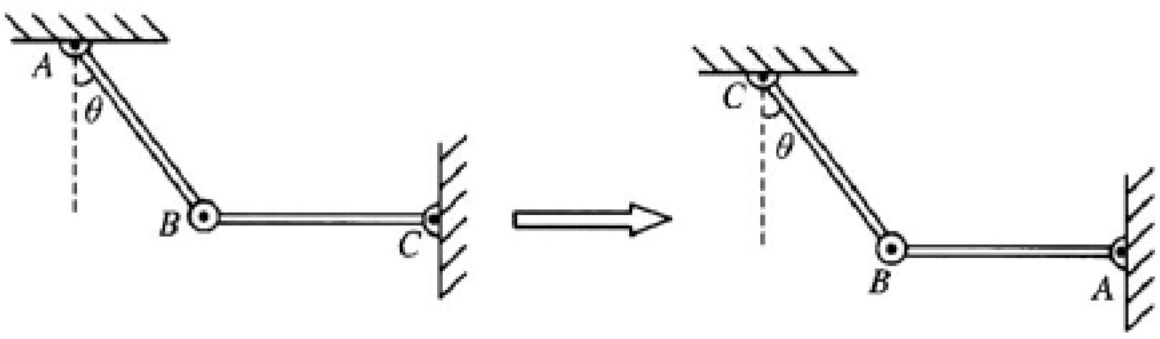

图 4.215

10. 如图 4.216 所示，用长为 $\sqrt{2}R$ 的细直杆连接的两个小球 A，B，质量分别为 m 和 2m，被置于光滑的、半径为 R 的半球面碗内。达到平衡时，半球面的球心 O 与 B 球的连线和竖直方向的夹角的正切值为（　　）。

A．1　　　B．$\frac{1}{2}$　　　C．$\frac{1}{3}$　　　D．$\frac{1}{4}$

11．（上海第 26 届大同杯复赛）如图 4.217 所示，一根轻杆两端固定 A，B 两球，放置在光滑半球形碗中，在图示位置平衡，A 球与球心连线和竖直方向的夹角为　，碗固定在长木板上，长木板可绕 O 点转动，现对长木板的另一端施加外力 F，使其逆时针缓慢转动，在 A，B 两球均未脱离

碗的过程中，A 球与球心连线和竖直方向的夹角 的变化情况是（　　）。

A．逐渐变小　　　B．逐渐变大　　　C．先变大后变小　　　D．保持不变

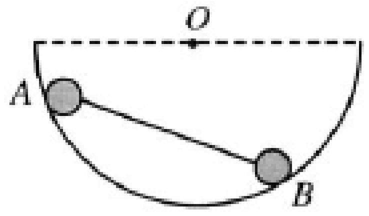

图 4.216

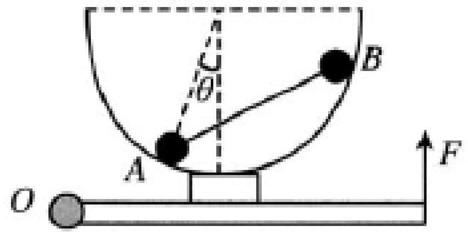

图 4.217

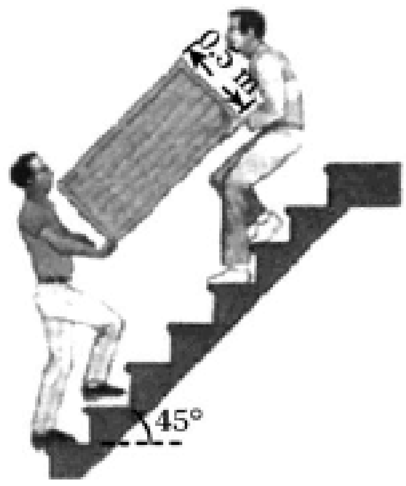

图 4.218

12.（上海第 25 届大同杯复赛）两个人共同搬一个 50kg 质量分布均匀的木箱上楼梯，如图 4.218 所示。木箱长为 1.25m ，高为 0.5m ；楼梯和地面成 45 ，而且木箱与楼梯平行。如果两人手的用力方向都是竖直向上的，那么在下面的人对木箱施加的力与上面的人对木箱施加的力的比值是（　　）。

A．$\dfrac{8}{3}$　　　B．$\dfrac{7}{3}$　　　C．$\dfrac{5}{3}$　　　D．$\dfrac{5}{4}$

13．如图 4.219 所示，物体放在粗糙平板上，平板一端铰接于地上，另一端加一竖直向上的力，使板的倾角 缓慢增大，但物体与木板间仍无相对滑动，则下列物理量中逐渐增大的有（　　）。

A．板对物体的静摩擦力　　　B．物体对板的正压力

C．拉力 F　　　D．拉力 F 的力矩

14．如图 4.220 所示，一质量为 m 的金属球与一细杆连接在一起，细杆的另一端用铰链铰于墙上较低位置，球下面垫一木板，木板放在光滑水平地面上，球与板间的滑动摩擦因数为 ，下面说法中正确的有（　　）

A．用水平力将木板向右匀速拉出时，拉力 F mg

B．用水平力将木板向右匀速拉出时，拉力 F mg

C．用水平力将木板向左匀速拉出时，拉力 F mg

D．用水平力将木板向左匀速拉出时，拉力 F mg

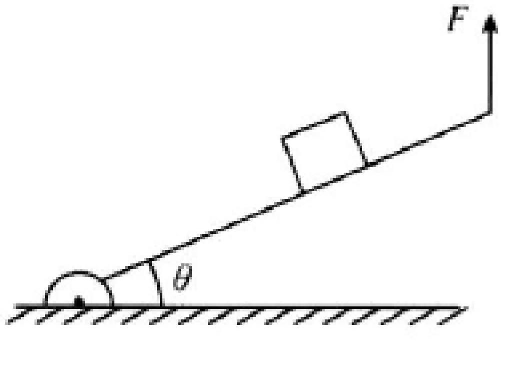

图 4.219

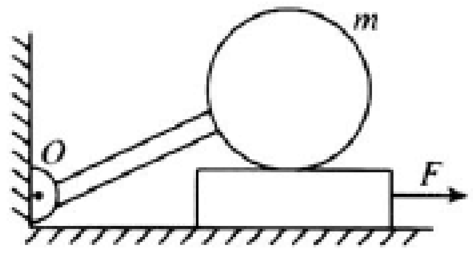

图 4.220

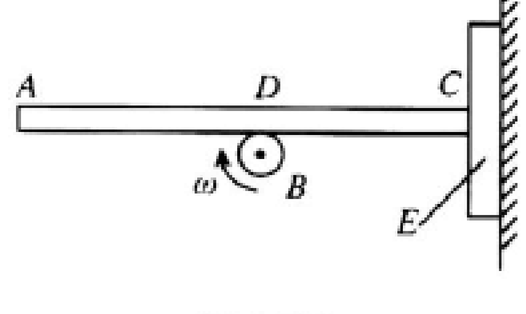

图 4.221

15．（上海第 26 届大同杯初赛）如图 4.221 所示，均匀木棒 AC 水平搁在一个圆柱体 B 上，两者的接触点为 D ，且 AD :DC 17:15。当圆柱体围绕其固定中心轴顺时针方向转动时，与棒的右