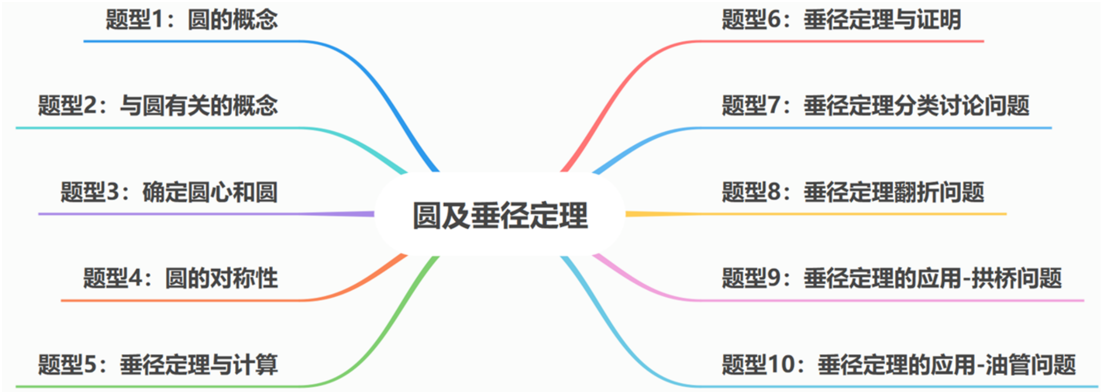
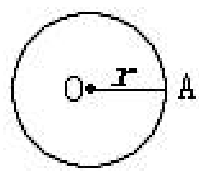
24.1.1&24.1.2 圆及垂径定理

题型汇总



重要笔记 **圆的定义**

(1)**动态**：如图，在一个平面内，线段 OA 绕它固定的一个端点 O 旋转一周，另一个端点 A 随之旋转所形成的图形叫做圆，固定的端点 O 叫做圆心，线段 OA 叫做半径．以点 O 为圆心的圆，记作“⊙O”，读作“圆 O”．



(2)**静态**：圆心为 O，半径为 r 的圆是平面内到定点 O 的距离等于定长 r 的点的集合．

注意：

①圆心确定圆的位置，半径确定圆的大小；确定一个圆应先确定圆心，再确定半径，二者缺一不可；

②圆是一条封闭曲线．

题型 1：圆的概念

例题 1.到圆心的距离不大于半径的点的集合是（　　）

A．圆的外部　　B．圆的内部

C．圆　　D．圆的内部和圆

【分析】根据圆是到定点距离等于定长的点的集合，以及点和圆的位置关系即可解决．

【解答】解：根据点和圆的位置关系，知圆的内部是到圆心的距离小于的所有点的集合；

圆是到圆心的距离等于半径的所有点的集合．

所以与圆心的距离不大于半径的点所组成的图形是圆的内部（包括边界）．

故选：D．

【变式 1-1】下列条件中，能确定一个圆的是（　　）

A．以点 O 为圆心

B．以 10m 长为半径

C．以点 A 为圆心，4cm 长为半径

D．经过已知点 M

【分析】确定一个圆有两个重要因素，一是圆心，二是半径，据此可以得到答案．

【解答】解：∵圆心确定，半径确定后才可以确定圆，

∴C 选项正确，

故选：C．

与圆有关的概念

1. 弦

弦：连结圆上任意两点的线段叫做弦.

直径：经过圆心的弦叫做直径.

弦心距：圆心到弦的距离叫做弦心距.

2. 弧

弧：圆上任意两点间的部分叫做圆弧，简称弧.以 A、B 为端点的弧记作 $\overset{\frown}{AB}$，读作“圆弧 AB”或“弧 AB”.

半圆：圆的任意一条直径的两个端点把圆分成两条弧，每一条弧都叫做半圆；

优弧：大于半圆的弧叫做优弧；

劣弧：小于半圆的弧叫做劣弧.

3.同心圆与等圆

圆心相同，半径不等的两个圆叫做同心圆.

圆心不同，半径相等的两个圆叫做等圆.

同圆或等圆的半径相等.

4.等弧

在同圆或等圆中，能够完全重合的弧叫做等弧.

题型 2：与圆有关的概念

例题2.判断题(对的打 √，错的打×，并说明理由)

①半圆是弧，但弧不一定是半圆；(　)

②弦是直径；(　)

③长度相等的两段弧是等弧；(　)

④直径是圆中最长的弦．(　)

【答案】①√ ②× ③× ④√.

【解析】①因为半圆是弧的一种，弧可分为劣弧、半圆、优弧三种，故正确；②直径是弦，但弦不一定都是直径，只有过圆心的弦才是直径，故错；③只有在同圆或等圆中，长度相等的两段弧才是等弧，故错；④直径是圆中最长的弦，正确.

【总结】理解弦与直径的关系，等弧的定义.

【变式 2-1】下列说法中，结论错误的是（　　）

A．直径相等的两个圆是等圆

B．长度相等的两条弧是等弧

C．圆中最长的弦是直径

D．一条弦把圆分成两条弧，这两条弧可能是等弧

【答案】B.

提示：A、直径相等的两个圆是等圆，正确，不符合题意；

B、长度相等的两条弧圆周角不一定相等，它们不一定是等弧，原题的说法是错误的，符合题意；

C、圆中最长的弦是直径，正确，不符合题意；

D、一条直径把圆分成两条弧，这两条弧是等弧，正确，不符合题意，

故选：B．

【变式 2-2】下列说法：

①直径是弦；②弦是直径；③半径相等的两个半圆是等弧；④长度相等的两条弧是等弧；⑤半圆是弧，但弧不一定是半圆．

正确的说法有（　　）

A．1 个　　B．2 个　　C．3 个　　D．4 个

【分析】利用圆的有关定义及性质分别进行判断后即可确定正确的选项．

【解答】解：①直径是弦，正确，符合题意；

②弦不一定是直径，错误，不符合题意；

③半径相等的两个半圆是等弧，正确，符合题意；

④能够完全重合的两条弧是等弧，故原命题错误，不符合题意；

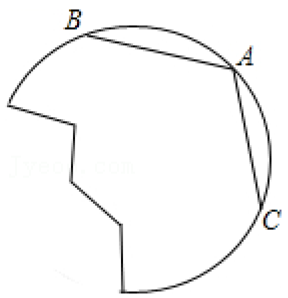
⑤根据半圆的定义可知，半圆是弧，但弧不一定是半圆，正确，符合题意，

正确的有 3 个，

故选：C．

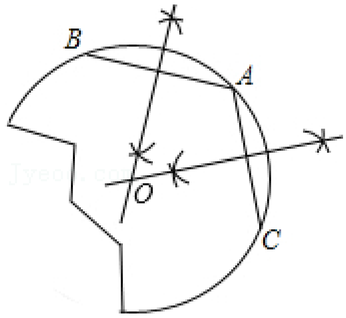
题型 3：确定圆心和圆

例题3.将图中的破轮子复原，已知弧上三点 A，B，C． 画出该轮的圆心；

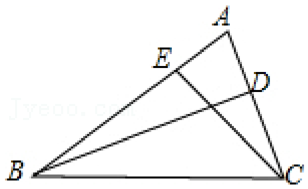


【分析】根据垂径定理，分别作弦 AB 和 AC 的垂直平分线交点即为所求；

【解答】解：如图所示：分别作弦 AB 和 AC 的垂直平分线交点 O 即为所求的圆心；



【变式 3-1】如图所示，BD，CE 是△ABC 的高，求证：E，B，C，D 四点在同一个圆上．



【分析】求证 E，B，C，D 四点在同一个圆上，△BCD 是直角三角形，则三个顶点在斜边中点为圆心的圆上，因而只要再证明 F 到 BC 得中点的距离等于 BC 的一半就可以．

【解答】证明：如图所示，取 BC 的中点 F，连接 DF，EF．

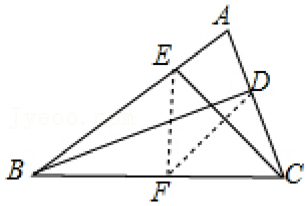
∵BD，CE 是△ABC 的高，

∴△BCD 和△BCE 都是直角三角形．

∴DF，EF 分别为 Rt△BCD 和 Rt△BCE 斜边上的中线，

∴$DF=EF=BF=CF$．

∴E，B，C，D 四点在以 F 点为圆心，$\frac{1}{2}BC$ 为半径的圆上．



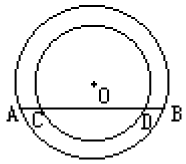
圆的性质

①旋转不变性：圆是旋转对称图形，绕圆心旋转任一角度都和原来图形重合；圆是中心对称图形，对称中心是圆心；

②圆是轴对称图形：任何一条直径所在直线都是它的对称轴.或者说，经过圆心的任何一条直线都是圆的对称轴.

题型 4：圆的对称性

例题4.已知：如图，两个以 O 为圆心的同心圆中，大圆的弦 AB 交小圆于 C，D．求证：AC=BD.

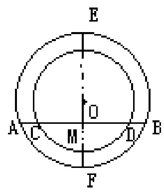


【答案与解析】证明：过 O 点作 OM⊥AB 于 M，交大圆与 E、F 两点.如图，

则 EF 所在的直线是两圆的对称轴，

所以 AM=BM，CM=DM，

故 AC=BD.



【变式 4-1】圆 O 所在平面上的一点 P 到圆 O 上的点的最大距离是 10，最小距离是 2，求此圆的半径是多少？

【答案与解析】

如图所示,分两种情况:

（1）当点 P 为圆 O 内一点（如图 1），过点 P 作圆 O 的直径，分别交圆 O 于 A、B 两点，

由题意可得 P 到圆 O 最大距离为 10，最小距离为 2，则 AP=2，BP=10，

所以圆 O 的半径为 $\frac{2+10}{2}=6$.

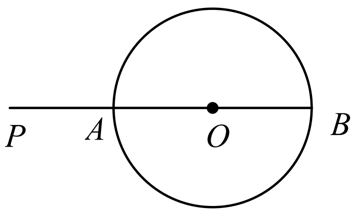


图 1

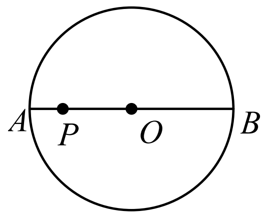
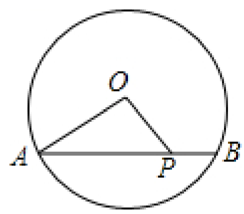


图 2

（2）当点 P 在圆外时（如图 2），作直线 OP，分别交圆 O 于 A、B，由题可得 P 到圆 O 最大距离为 10，最小距离为 2，则 BP=10，AP=2，所以圆 O 的半径 $\frac{10-2}{2}=4$.

综上所述，所求圆的半径为 6 或 4.

【变式 4-2】如图，⊙O 的直径为 10，弦 AB=8，P 是弦 AB 上的一个动点，那么 OP 的长的取值范围是____________.



【答案】3≤OP≤5.

【解析】OP 最长边应是半径长，为 5；

根据垂线段最短，可得到当 OP⊥AB 时，OP 最短.

∵直径为 10，弦 AB=8

∴∠OPA=90°，OA=5，由圆的对称性得 AP=4，

由勾股定理得 OP=$\sqrt{5^2-4^2}=3$，∴OP 最短为 3.

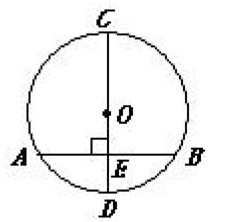
∴OP 的长的取值范围是 3≤OP≤5.

【总结】关键是知道 OP 何时最长与最短.

垂径定理及推论

1. 垂径定理

垂直于弦的直径平分这条弦，并且平分弦所对的两条弧.



2. 推论

平分弦(不是直径)的直径垂直于弦，并且平分弦所对的两条弧.

常见辅助线做法（考点）：

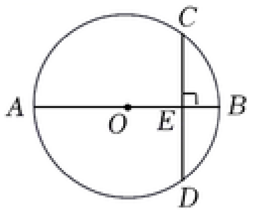
1） 过圆心，作垂线，连半径，造$RT\triangle$，用勾股，求长度；

$$半径^2=弦心距^2+\left(\frac{1}{2}弦长\right)^2$$

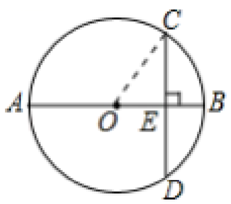
2）有弧中点，连中点和圆心，得垂直平分．

题型 5：垂径定理与计算

例题5.如图，AB 是⊙O 的直径，弦 CD⊥AB 于点 E．若 AB＝10，BE＝2，求弦 CD 的长．



【答案】解：连接OC，如图所示：



$\because AB$为$\odot O$的直径，$CD\perp AB$，

$\therefore CE=DE=\frac{1}{2}CD$，$OC=OA=OB=5$，

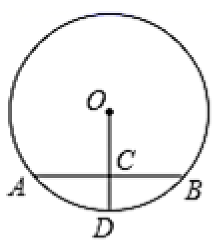
$\therefore OE=OB-EB=5-2=3$，

在$Rt\triangle OCE$中，由勾股定理得：$CE=\sqrt{OC^2-OE^2}=\sqrt{5^2-3^2}=4$，

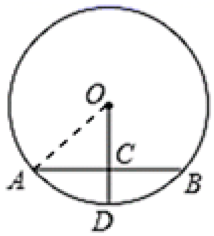
$\therefore CD=2CE=8$．

【解析】【分析】连接 OC，先利用勾股定理求出 CE 的长，再根据垂径定理可得 CD=2CE=8。

【变式 5-1】如图，AB 是 $\odot O$ 的弦，C 为 AB 的中点，OC 的延长线与 $\odot O$ 交于点 D，若 $CD=2$，$AB=12$，求 $\odot O$ 的半径．



【答案】解：连接 AO，



∵点 C 是弦 AB 的中点，半径 OD 与 AB 相交于点 C，

∴OC⊥AB，

∵AB=12，

∴AC=BC=6，

设⊙O 的半径为 R，

∵CD=2，

∴在 Rt△AOC 中，由勾股定理得：$AO^2=OC^2+AC^2$，

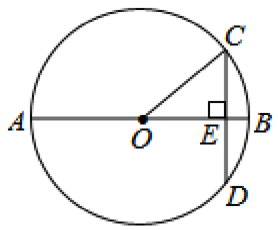
即：$R^2=(R-2)^2+6^2$，

∴R=10

答：⊙O 的半径长为 10．

【解析】【分析】连接 AO，设⊙O 的半径为 R，则 OA=R，OC=R-2，利用垂径定理的推论得出 OC⊥AB，AC=BC=6，利用勾股定理得出 $R^2=(R-2)^2+6^2$，再解方程即可。

【变式 5-2】如图，AB 是⊙O 的直径，弦 CD⊥AB 于点 E，OC＝10cm，CD＝16cm，求 AE 的长．



【答案】解：∵弦 CD⊥AB 于点 E，CD＝16cm，

∴CE＝$\frac{1}{2}$CD＝8cm．

在 Rt△OCE 中，OC＝10cm，CE＝8cm，

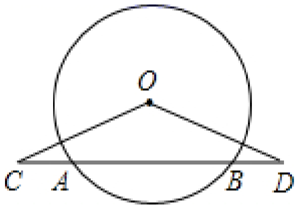
∴$OE=\sqrt{OC^2-CE^2}=\sqrt{10^2-8^2}=6$（cm），

∴AE＝AO+OE＝10+6＝16（cm）．

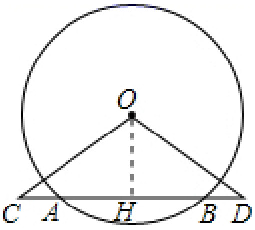
【解析】【分析】先利用垂径定理求出 CE 的长，再利用勾股定理求出 OE 的长，最后利用线段的和差可得 AE＝AO+OE＝10+6＝16（cm）．

题型 6：垂径定理与证明

例题6.如图，AB 是⊙O 的弦，C、D 为直线 AB 上两点，OC＝OD，求证：AC＝BD.



【答案】证明：作 OH⊥AB 于 H，如图，



则 AH＝BH，

∵OC＝OD，OH⊥AB，

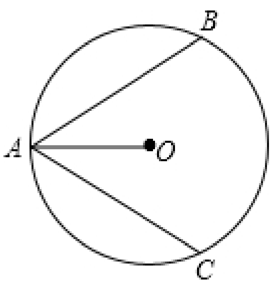
∴CH＝DH，

∴CH﹣AH＝DH﹣BH，

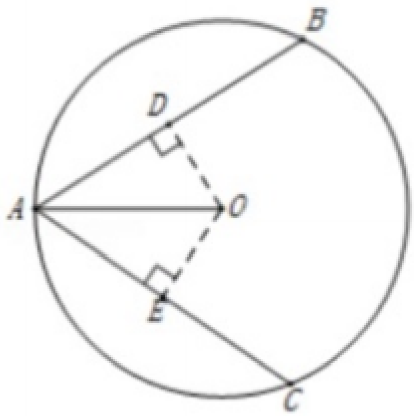
即 AC＝BD.

【解析】【分析】作 OH⊥AB 于 H，由垂径定理可得 AH＝BH，根据等腰三角形的性质可得 CH＝DH，然后根据线段的和差关系进行证明.

【变式 6-1】已知：如图，AB，AC 是⊙O 的两条弦，AO 平分∠BAC．求证：AB＝AC．



【答案】解：证明：过点 O 作 OD⊥AB 于点 D，过点 O 作 OE⊥AC 于点 E，



∵AO 平分∠BAC，∠ADO=∠AEO=90°，AB=2AD，AC=2AE，

∴OD=OE，

在 Rt△ADO 和 Rt△AEO 中

$$\begin{cases}AO=AO\\OD=OE\end{cases}$$

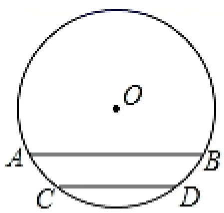
∴Rt△ADO≌Rt△AEO（HL）

∴AD=AE，

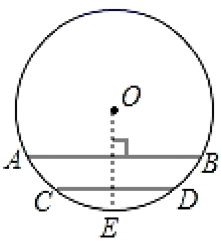
∴AB=AC.

【解析】【分析】过点 O 作 OD⊥AB 于点 D，过点 O 作 OE⊥AC 于点 E，利用垂径定理可证得 AB=2AD，AC=2AE，利用角平分线的性质可证得 OD=OE，利用 HL 可证得 Rt△ADO≌Rt△AEO，可推出 AE=AD，由此可证得结论.

【变式 6-2】如图，AB、CD 都是⊙O 的弦，且 AB∥CD，求证：$\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BD}$



【答案】证明：作半径 OE⊥AB 交圆于 E 点.



∵AB∥CD，

∴OE⊥CD，

∴$\overset{\frown}{AE}=\overset{\frown}{BE}$ ， $\overset{\frown}{CE}=\overset{\frown}{DE}$

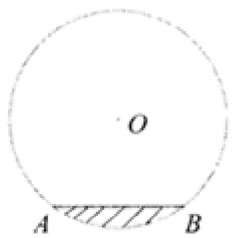
∴$\overset{\frown}{AE}-\overset{\frown}{CE}=\overset{\frown}{BE}-\overset{\frown}{DE}$

即：$\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BD}$.

【解析】【分析】作半径 OE⊥AB 交圆于 E 点，则 OE⊥CD，由垂径定理可得$\overset{\frown}{AE}=\overset{\frown}{BE}$ ， $\overset{\frown}{CE}=\overset{\frown}{DE}$，据此证明.

题型 7：垂径定理分类讨论问题

例题7.在圆柱形油槽内装有一些油，截面如图所示，已知截面⊙O 半径为 5cm，油面宽 AB 为 6cm，如果再注入一些油后，油面宽变为 8cm，则油面 AB 上升了（　　）cm



A．1　　　　B．3　　　　C．3 或 4　　　　D．1 或 7

【答案】D

【解析】【解答】解：分两种情况求解：①如图 1，宽度为 8cm 的油面 CD，作 ON⊥AB 与 CD、AB 的交点为 M、N

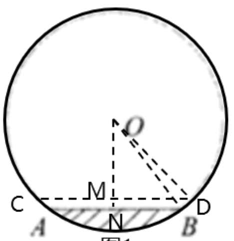


图1

由题意知　$OM\perp CD$，　$CM=MD=\frac{1}{2}CD=4cm$，　$AN=BN=\frac{1}{2}AB=3cm$

在　$Rt\triangle BON$中，由勾股定理得　$ON=\sqrt{OB^2-BN^2}=4cm$

在　$Rt\triangle DOM$中，由勾股定理得　$OM=\sqrt{OD^2-DM^2}=3cm$

$\therefore MN = ON - OM = 1cm$

②如图 2，宽度为 8cm 的油面 EF，作 PN⊥EF 与 AB、EF 的交点为 N、P，连接 OB

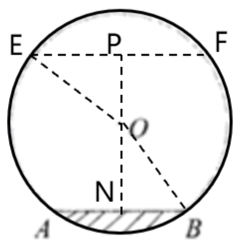


图2

由题意知 $PN \perp AB$，$EP = PF = \frac{1}{2}EF = 4cm$，$AN = BN = \frac{1}{2}AB = 3cm$

在 $Rt\triangle BON$中，由勾股定理得 $ON = \sqrt{OB^2 - BN^2} = 4cm$

在 $Rt\triangle EPO$中，由勾股定理得 $OP = \sqrt{OE^2 - EP^2} = 3cm$

$\therefore NP = ON + OP = 7cm$

∴油面 AB 上升到 CD，上升了 1cm，油面 AB 上升到 EF，上升了 7cm；

故答案为：D.

【分析】分两种情况：①当油面没超过圆心 O，油面宽为 8cm；②当油面超过圆心 O，油面宽为 8cm；根据垂径定理及勾股定理分别解答即可.

【变式 7-1】已知圆中两条平行的弦之间距离为 1，其中一弦长为 8，若半径为 5，则另一弦长为（　　）

A．6

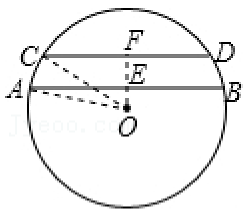
B．$2\sqrt{21}$

C．6 或 $2\sqrt{21}$

D．以上说法都不对

【分析】如图，分 $CD=8$ 和 $AB=8$ 这两种情况，利用垂径定理和勾股定理分别求解可得.

【解答】解：如图，



①若 $CD=8$，

则 $CF = \frac{1}{2}CD = 4$，

$\because OC = OA = 5$，

$\therefore OF = 3$，

∵$EF=1$，

∴$OE=2$，

则 $AE=\sqrt{21}$，

∴$AB=2AE=2\sqrt{21}$；

②若 $AB=8$，

则 $AE=\frac{1}{2}AB=4$，

∵$OA=OC=5$，

∴$OE=3$，

∵$EF=1$，

∴$OF=4$，

则 $CF=3$，

∴$CD=2CF=6$；

综上，另一弦长为 6 或 $2\sqrt{21}$，

故选：C．

【变式 7-2】已知⊙O 的直径 $CD=100cm$，AB 是⊙O 的弦，$AB\perp CD$，垂足为 M，且 $AB=96cm$，则 AC 的长为（　　）

A．$36cm$ 或 $64cm$　　B．$60cm$ 或 $80cm$　　C．$80cm$　　D．$60cm$

【分析】分两种情况，根据题意画出图形，根据垂径定理求出 AM 的长，连接 OA，由勾股定理求出 OM 的长，进而可得出结论．

【解答】解：连接 AC，AO，

∵⊙O 的直径 $CD=100cm$，$AB\perp CD$，$AB=96cm$，

∴$AM=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}\times 96=48$（$cm$），$OD=OC=50$（$cm$），

如图 1，∵$OA=50cm$，$AM=48cm$，$CD\perp AB$，

∴$OM=\sqrt{OA^2-AM^2}=\sqrt{50^2-48^2}=14$（$cm$），

∴$CM=OC+OM=50+14=64$（cm），

∴$AC=\sqrt{AM^2+CM^2}=\sqrt{64^2+48^2}=80$（$cm$）；

如图 2，同理可得，$OM=14cm$，

∵$OC=50cm$，

∴$MC=50-14=36$（cm），

在 Rt△AMC 中，$AC=\sqrt{AM^2+CM^2}=60$（cm）；

综上所述，AC 的长为 80cm 或 60cm，

故选：B．

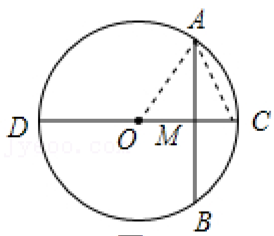


图2

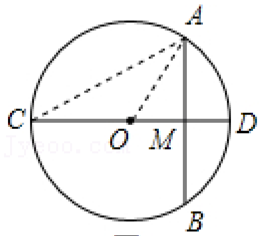
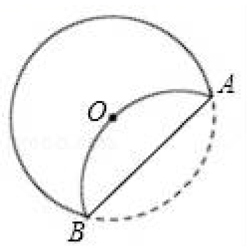


图1

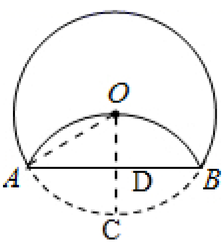
题型 8：垂径定理翻折问题

例题8.如图，⊙O 的半径为 4，将⊙O 的一部分沿着弦 AB 翻折，劣弧恰好经过圆心 O，则折痕 AB 的长为__________.



【答案】4 $\sqrt{3}$

【解析】【解答】解：过 O 作 OC⊥AB 于 D，交⊙O 于 C，连接 OA，



Rt△OAD 中，OD=CD= $\frac{1}{2}$ OC=2，OA=4，

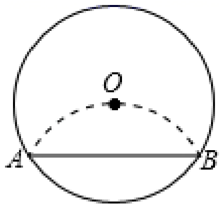
根据勾股定理，得：AD= $\sqrt{OA^2-OD^2}$ =2 $\sqrt{3}$ ，

由垂径定理得，AB=2AD=4 $\sqrt{3}$ ，

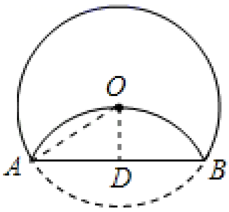
故答案 ：4 $\sqrt{3}$.

【分析】过 O 作垂直于 AB 的半径 OC，设交点为 D，根据折叠的性质可求出 OD 的长；连接 OA，根据勾股定理可求出 AD 的长，由垂径定理知 AB=2AD，即可求出 AB 的长度.

【变式 8-1】如图，将半径为 2cm 的圆形纸片折叠后，圆弧恰好经过圆心 O，求折痕 AB 的长.



【答案】解：如图：作 OD⊥AB 于 D，连接 OA.



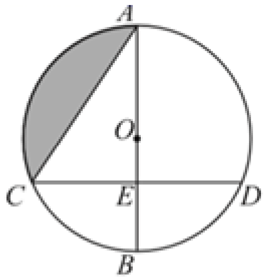
根据题意得：OD＝ $\frac{1}{2}$ OA＝1cm，

再根据勾股定理得：AD＝ $\sqrt{0A^2-0D^2}$ ＝ $\sqrt{2^2-1^2}$ ＝ $\sqrt{3}$ cm，

由垂径定理得：AB＝2 $\sqrt{3}$ cm.

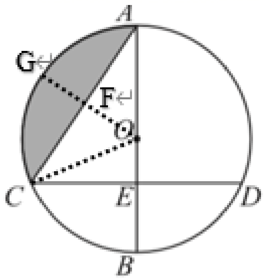
【解析】【分析】在图中构建直角三角形，先根据勾股定理得 AD 的长，再根据垂径定理得 AB 的长.

【变式 8-2】如图，AB 是以点 O 为圆心的圆形纸片的直径，弦 $CD \perp AB$ 于点 E，$AB=10,BE=3$.将阴影部分沿着弦 AC 翻折压平，翻折后，弧 AC 对应的弧为 G，则点 O 与弧 G 所在圆的位置关系为______________.



【答案】点在圆外

【解析】【解答】解：如图，连接 OC，作 OF⊥AC 于 F，交弧 AC 于 G，



∵$AB=10, BE=3$ ，

∴OA=OB=OC=5,AE=7,OE=2,

∵$CD\perp AB$ ，

∴$CE^2=OC^2-OE^2=5^2-2^2=21$ ，

∴$AC^2=CE^2+AE^2=21+7^2=70$ ，

∵OF⊥AC，

∴CF= $\frac{1}{2}$ AC,

∴$OF^2=OC^2-CF^2=5^2-\frac{1}{4}\times 70=\frac{15}{2}$ ，

∵$\frac{15}{2}>(\frac{5}{2})^2$ ，

∴$OF>\frac{5}{2}$ ，

∴$FG<\frac{5}{2}$ ，

∴$OF>FG$ ，

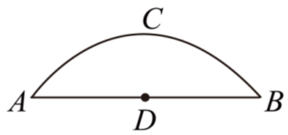
∴点 O 与弧 G 所在圆的位置关系是点在圆外.

故答案是：点在圆外.

【分析】连接 OC，作 OF⊥AC 于 F，交弧 AC 于 G，判断 OF 与 FG 的数量关系即可判断点和圆的位置关系.

题型 9：垂径定理的应用-拱桥问题

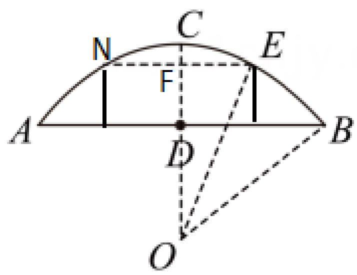
例题 9.如图，有一座圆弧形拱桥，桥下水面宽度 AB 为 12m，拱高 CD 为 4m.



（1）求拱桥的半径.

（2）有一艘宽为 7.8m 的货船，船舱顶部为长方形，并高出水面 3m，则此货船是否能顺利通过此圆弧形拱桥？并说明理由.

【答案】（1）解：设圆心为 O，连接 OC，OB，



∴OC⊥AB，

∴BD=$\frac{1}{2}$AB=6，

设拱桥的半径 r 米，则 OD=r-4，

在 Rt△OBD 中

$OD^2+BD^2=OB^2$ 即（r-4）$^2+6^2=r^2$

解之：r=.6.5.

（2）解：此货船不能顺利通过此圆弧形拱桥，理由如下，

如图，连接 OE

∵船舱顶部为长方形，并高出水面 3m，

∴DF=3，

∴CF=4-3=1，

∴OF=OC-CF=6.5-1=5.5，

在 Rt△EOF 中

$EF=\sqrt{OE^2-OF^2}=\sqrt{6.5^2-5.5^2}=2\sqrt{3}\approx 3.46$，