专题06 几何最值四大模型

模型速览

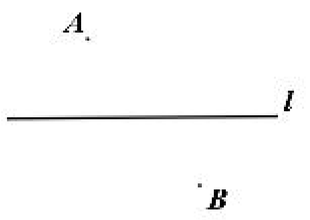
模型一：轴点称最值模型　　　　**模型二：直四之最值模型**

模型之：费马对最值模型　　　　**模型称：面积法求定值**

模型解密

模型一：将军饮马问题

1.

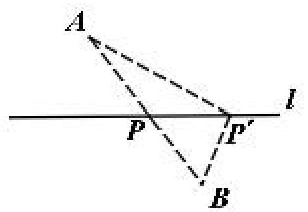


已知：如图，定点 A、B 分布在定直线 l 两侧；

要求：在直线 l 上找一点 P，使 **PA+PB 的值最小**

解：**连接 AB 交直线 l 于点 P，点 P 即为所求**，

PA+PB 的最小值即为线段 AB 的长度

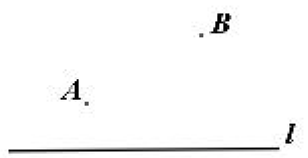


理由：在 l 上任取异于点 P 的一点 P′，连接 AP′、BP′，

在△ABP’中，AP′+BP′>AB，即 AP′+BP′>AP+BP

∴P 为直线 AB 与直线 l 的交点时，PA+PB 最小.

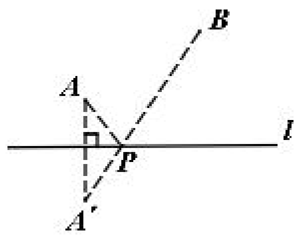
2.



已知：如图，定点 A 和定点 B 在定直线 l 的同侧

要求：在直线 l 上找一点 P，使得 **PA+PB 值最小**

（或△ABP 的周长最小）



解：**作点 A 关于直线 l 的对称点 A′，连接 A′B 交 l 于 P，**

点 P 即为所求；

理由：根据轴对称的性质知直线 l 为线段 AA′的中垂线，

由中垂线的性质得：PA=PA′，要使 PA+PB 最小，则

需 PA′+PB 值最小，从而转化为模型 1.

模型二：费马点

【费马点问题】

问题：如图 1，如何找点 P 使它到△ABC 三个顶点的距离之和 PA+PB+PC 最小？

图文解析：

如图 1，把△APC 绕 C 点顺时针旋转 60°得到△A′P′C，连接 PP′．则△CPP′为等边三角形，CP=PP′，PA=P′A′，

∴PA+PB+PC= P′A′+PB+PP′BC′．

∵点 A′可看成是线段 CA 绕 C 点顺时针旋转 60°而得的定点，BA′为定长

∴当 B、P、P′、A′ 四点在同一直线上时，PA+PB+PC 最小．最小值为 BA.′

【如图 1 和图 2，利用旋转、等边等条件转化相等线段.】

∴∠APC=∠A′P′C=180°-∠CP′P=180°-60°=120°，

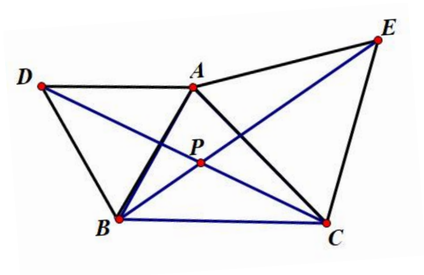
∠BPC=180°-∠P′PC=180°-60°=120°，

∠APC=360°-∠BPC-∠APC=360°-120°-120°=120°.

因此，当△ABC 的每一个内角都小于 120°时，所求的点 P 对三角形每边的张角都是 120°；当有一内角大于或等于 120°时，所求的 P 点就是钝角的顶点．费马点问题告诉我们，存在这么一个点到三个定点的距离的和最小，解决问题的方法是运用旋转变换．

【方法总结】利用旋转、等边等条件转化相等线段，将三条线段转化成首尾相连的三条线段.

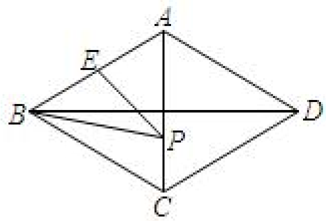
【知识应用】两点之间线段最短.



典例精讲

模型一：轴点称最值模型

1.（春•庐江县期末）如图，在菱形 $ABCD$ 中，AC 与 BD 相交于点 O，$AB=4$，$BD=4\sqrt{3}$，E 为 AB 的中点，点 P 为线段 AC 上的动点，则 $EP+BP$ 的最小值为（　　）



A．4　　　　B．$2\sqrt{5}$　　　　C．$2\sqrt{7}$　　　　D．8

【答案】C

【解答】解：如图，设 AC，BD 相交于 O，

∵四边形 $ABCD$ 是菱形，

∴$AC\perp BD$，$AO=\frac{1}{2}AC$，$BO=\frac{1}{2}BD=2\sqrt{3}$，

∵$AB=4$，

∴$AO=2$，

连接 DE 交 AC 于点 P，连接 BP，作 $EM\perp BD$ 于点 M，

∵四边形 $ABCD$ 是菱形，

∴$AC\perp BD$，且 $DO=BO$，即 AO 是 BD 的垂直平分线，

∴$PD=PB$，

∴$PE+PB=PE+PD=DE$ 且值最小，

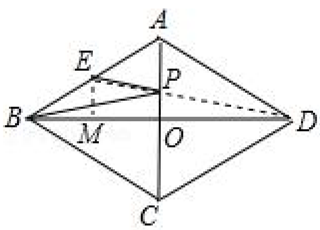
∵E 是 AB 的中点，$EM\perp BD$，

∴$EM=\frac{1}{2}AO=1$，$BM=\frac{1}{2}BO=\sqrt{3}$，

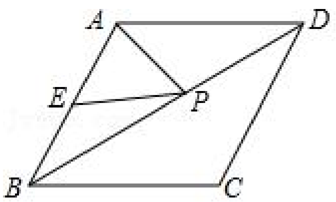
∴$DM=DO+OM=\frac{3}{2}BO=3\sqrt{3}$，

∴$DE=\sqrt{EM^2+DM^2}=\sqrt{1^2+(3\sqrt{3})^2}=2\sqrt{7}$，

故选：C．



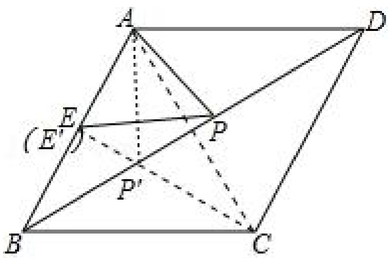
2.（2022•埇桥区校级月考）如图，已知菱形 $ABCD$ 的周长为 16，面积为 $8\sqrt{3}$，E 为 AB 的中点，若 P 为对角线 BD 上一动点，则 $EP+AP$ 的最小值为（　　）



A． 2　　　　B． $2\sqrt{3}$　　　　C． 4　　　　D． $4\sqrt{3}$

【答案】B

【解答】解：如图，作 $CE'\perp AB$ 于 E'，交 BD 于 P'，连接 AC、AP'．



∵已知菱形 $ABCD$ 的周长为 16，面积为 $8\sqrt{3}$，

∴$AB=BC=4$，$AB\cdot CE'=8\sqrt{3}$，

∴$CE'=2\sqrt{3}$，

在 Rt△BCE' 中，$BE'=\sqrt{4^2-(2\sqrt{3})^2}=2$，

∵$BE=EA=2$，

∴E 与 E' 重合，

∵四边形 $ABCD$ 是菱形，

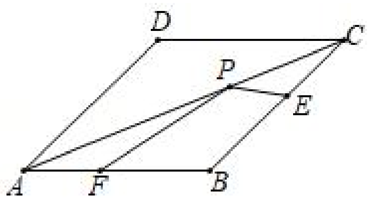
∴BD 垂直平分 AC，

∴A、C 关于 BD 对称，

∴当 P 与 P' 重合时，$P'A+P'E$ 的值最小，最小值为 $CE=2\sqrt{3}$，

故选：B．

3.（2022 春•裕华区校级期末）如图，在菱形 $ABCD$ 中，$\angle D=135°$，$AD=3\sqrt{2}$，$CE=2$，点 P 是线段 AC 上一动点，点 F 是线段 AB 上一动点，则 $PE+PF$ 的最小值（　　）



A． $2\sqrt{2}$　　　　B． 3　　　　C． $2\sqrt{5}$　　　　D． $\sqrt{10}$

【答案】D

【解答】解：作点 E 关于 AC 的对称点点 G，连接 PG、PE，则 $PE=PG$，$CE=CG=2$，

连接 BG，过点 B 作 $BH\perp CD$ 于 H，则 $\angle BCH=\angle CBH=45°$，

∴Rt△BHC 中，$BH=CH=\frac{\sqrt{2}}{2}BC=3$，

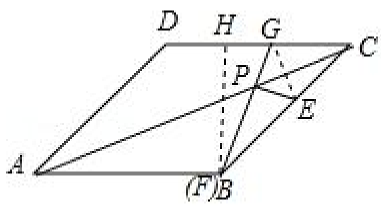
∴$HG=3-2=1$，

∴Rt△BHG 中，$BG=\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10}$，

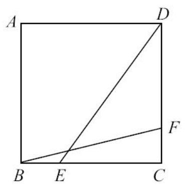
∵当点 F 与点 B 重合时，$PE+PF=PG+PB=BG$（最短），

∴$PE+PF$ 的最小值是$\sqrt{10}$.

故选：D.



4.（2023•西乡塘区校级模拟）如图，在边长为的 4 的正方形 $ABCD$ 中，点 E、F 分别是边 BC、CD 上的动点，且 $BE=CF$，连接 BF、DE，则 $BF+DE$ 的最小值为（　　）



A．$2\sqrt{3}$　　B．$2\sqrt{5}$　　C．$4\sqrt{3}$　　D．$4\sqrt{5}$

【答案】D

【解答】解：连接 AE，如图 1，

∵四边形 $ABCD$ 是正方形，

∴$AB=BC$，$\angle ABE=\angle BCF=90°$.

又 $BE=CF$，

∴△ABE≌△BCF（SAS）.

∴$AE=BF$.

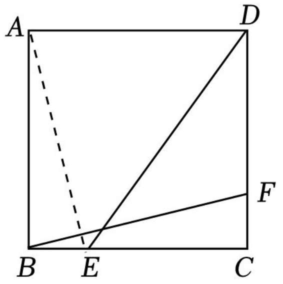


图1

所以 $BF+DE$ 最小值等于 $AE+DE$ 最小值.

作点 A 关于 BC 的对称点 H 点，如图 2，

连接 BH，则 A、B、H 三点共线，

连接 DH，DH 与 BC 的交点即为所求的 E 点.

根据对称性可知 $AE=HE$，$HB=AB=4$，

所以 $AE+DE=DH$.

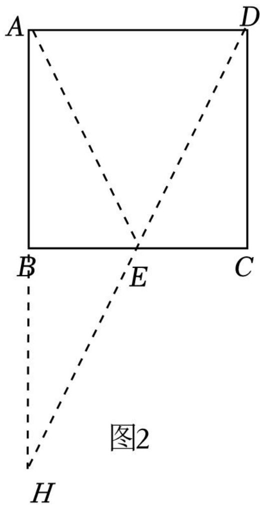


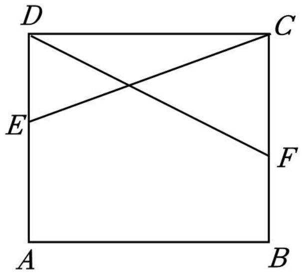
图2

在 Rt△ADH 中，$AH=8$，$DH=\sqrt{AH^2+AD^2}=\sqrt{8^2+4^2}=4\sqrt{5}$，

∴$BF+DE$ 最小值为 $4\sqrt{5}$.

故选：D

5．（2023•烟台一模）如图，在矩形 $ABCD$ 中，$AB=12$，$AD=10$，点 E 在 AD 上，点 F 在 BC 上，且 $AE=CF$，连结 CE，DF，则 $CE+DF$ 的最小值为（　　）



A．26　　　　B．25　　　　C．24　　　　D．22

【答案】A

【解答】解：如图，连接 BE，

∵四边形 $ABCD$ 是矩形，

∴$AB=CD$，$\angle BAE=\angle DCF=90^\circ$，

∵$AE=CF$，

∴$\triangle ABE\cong\triangle CDF$，

∴$BE=DF$，

∴$CE+DF=CE+BE$，

如图，作点 B 关于 A 点的对称点 B'，连接 CB'，

CB'即为 $CE+BE$ 的最小值，

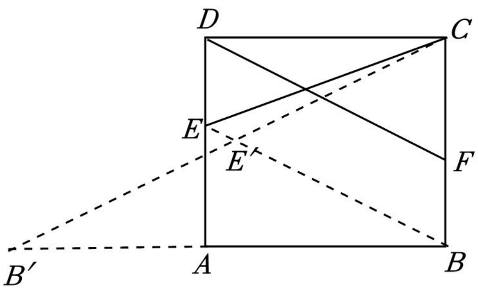
∵$AB=12$，$AD=10$，

∴$BB'=24$，$BC=10$，

∴$CB'=\sqrt{BB'^2+BC^2}=26$，

∴$CE+DF$ 的最小值为 26，故 A 正确．

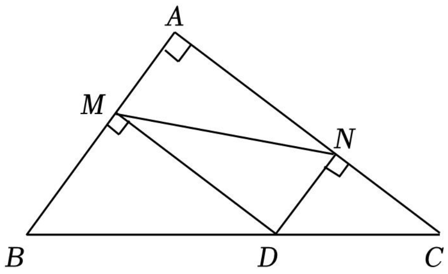
故选：A．



模型二：直四之最值模型

6．（2023 春•河东区期中）如图，在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle BAC=90^\circ$，且 $BA=6$，$AC=8$，点 D 是斜边 BC 上的一个动点，过点 D 分别作 $DM\perp AB$ 于点 M，$DN\perp$

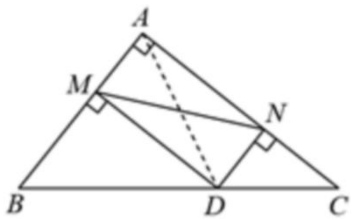
AC 于点 N，连接 MN，则线段 MN 的最小值为（　　）



A．5　　　　B．3.6　　　　C．2.4　　　　D．4.8

【答案】D

【解答】解：如图，连接 AD．



∵ $\angle BAC=90^\circ$，且 $BA=6$，$AC=8$，

∴ $BC=\sqrt{AB^2+AC^2}=10$．

∵ $DM\perp AB$，$DN\perp AC$，

∴四边形 $AMDN$ 为矩形，

∴ $AD=MN$，

∴当 AD 最小时，MN 最小．

当 $AD\perp BC$ 时，AD 最小，此时 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot AC=\frac{1}{2}AD\cdot BC$，

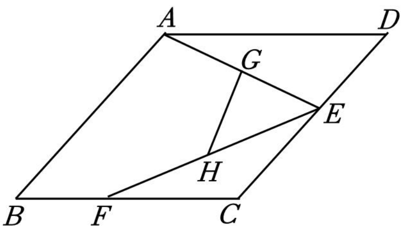
∴ $6\times8=10AD$，

∴ $AD=4.8$，

∴线段 MN 的最小值为 4.8．

故选：D．

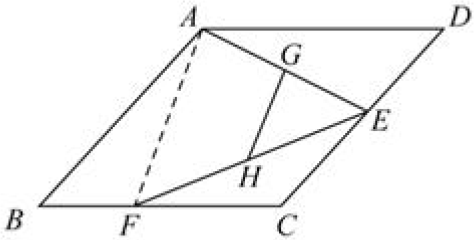
7.（2022 秋•泰山区校级期末）如图，在菱形 $ABCD$ 中，E，F 分别是边 CD，BC 上的动点，连接 AE，EF，G，H 分别为 AE，EF 的中点，连接 GH．若 $\angle B=45^\circ$，$BC=2\sqrt{3}$，则 GH 的最小值为（　　）



A. $\sqrt{3}$　　B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　C. $\sqrt{6}$　　D. $\frac{\sqrt{6}}{2}$

【答案】*D*

【解答】解：连接 *AF*，如图所示：



∵四边形 *ABCD* 是菱形，

∴$AB=BC=2\sqrt{3}$，

∵*G*，*H* 分别为 *AE*，*EF* 的中点，

∴*GH* 是△*AEF* 的中位线，

∴$GH=\frac{1}{2}AF$，

当 *AF*⊥*BC* 时，*AF* 最小，*GH* 得到最小值，

则∠*AFB*＝90°，

∵∠*B*＝45°，

∴△*ABF* 是等腰直角三角形，

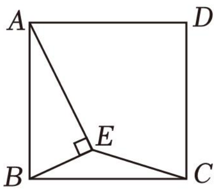
∴$AF=\frac{\sqrt{2}}{2}AB=\frac{\sqrt{2}}{2}\times2\sqrt{3}=\sqrt{6}$，

∴$GH=\frac{\sqrt{6}}{2}$，

即 *GH* 的最小值为$\frac{\sqrt{6}}{2}$，

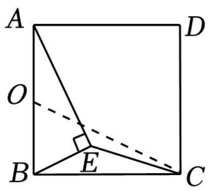
故选：*D*

8.（2023 秋•石景山区期末）如图，*E* 是正方形 *ABCD* 内一点，满足∠*AEB*＝90°，连接 *CE*．若 *AB*＝2，则 *CE* 长的最小值为 __$\sqrt{5}-1$__．



【答案】$\sqrt{5}-1$.

【解答】解：取 AB 中点 O，连接 OC，



∵$AB=2$，

∴$OB=1$，

∴$OC=\sqrt{OB^2+BC^2}=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$，

∵$\angle AEB=90°$，

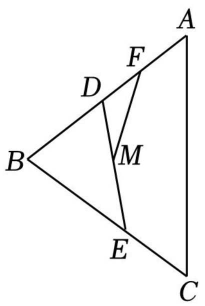
∴点 E 在以 O 为圆心，OB 为半径的圆上，

∴当点 E 在 OC 上时，CE 有最小值，

∴CE 的最小值为$\sqrt{5}-1$.

故答案为：$\sqrt{5}-1$.

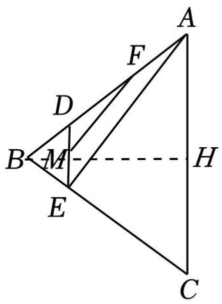
9.（2023 秋•洪洞县期中）如图，在△ABC 中，$AB=BC=10$，$AC=12$，点 D，E 分别是 AB，BC 边上的动点，连结 DE，F，M 分别是 AD，DE 的中点，则 FM 的最小值为（　　）



A．12　　B．10　　C．9.6　　D．4.8

【答案】D

【解答】解：如图，过点 B 作 $BH\perp AC$ 于 H，



∵F，M 分别是 AD，DE 的中点，

∴$FM=\frac{1}{2}AE$，

∴当 AE 取最小值时，FM 的值最小，

由垂线段最短可知，当 $AE\perp BC$ 于点 E 时，AE 的值最小，

在△ABC 中，$AB=BC=10$，$AC=12$，

∴$CH=\frac{1}{2}AC=6$，

∴$BH=\sqrt{BC^2-CH^2}=\sqrt{10^2-6^2}=8$，

∴ $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times 12\times 8=48$，

又∵ $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times BC\times AE$，

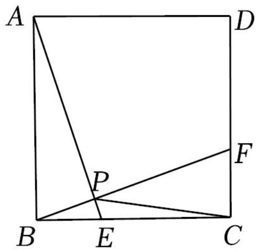
∴$\frac{1}{2}\times 10\times AE=48$，

∴$AE=9.6$，

∴$FM=4.8$，

故选：D.

10.（2023 秋•头屯河区期末）正方形 $ABCD$ 的边长为 4，点 E、F 分别是 BC，CD 上的一动点，且 $BE=CF$，连结 AE，BF，两线交于点 P，连接 CP，则 CP 的最小值是（　　）



A．$2\sqrt{5}-2$　　　B．$3\sqrt{2}-2$　　　C．$2\sqrt{2}$　　　D．$\sqrt{2}+2$

【答案】A

【解答】解：在正方形 $ABCD$ 中，$AB=BC$，$\angle ABC=\angle BCD$，

在△*ABE* 和△*BCF* 中，

$\begin{cases} AB=BC \\ \angle ABC=\angle BCD, \\ BE=CF \end{cases}$

∴△*ABE*≌△*BCF*（*SAS*），

∴∠*BAE*＝∠*CBF*，

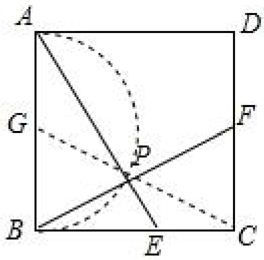
∵∠*CBF*+∠*ABF*＝90°，

∴∠*BAE*+∠*ABF*＝90°，

∴∠*APB*＝90°，

∴点 *P* 在以 *AB* 为直径的圆上，

设 *AB* 的中点为 *G*，当 *CPG* 在同一直线上时，*CP* 有最小值，如图所示：



∵正方形 *ABCD* 的边长为 4，

∴*BC*＝4，*BG*＝2，

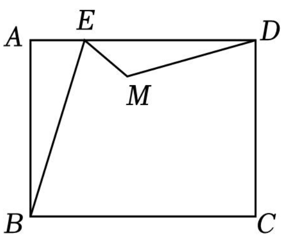
∴$CG=\sqrt{BC^2+BG^2}=\sqrt{4^2+2^2}=2\sqrt{5}$，

∵*PG*＝*AG*＝*BG*＝2，

∴$CP=2\sqrt{5}-2$，

故选：*A*．

11．（2023 秋•海珠区期末）如图，在矩形 *ABCD* 中，*AB*＝6，*BC*＝8，点 *E* 是 *AD* 边上的动点，点 *M* 是点 *A* 关于直线 *BE* 的对称点，连接 *MD*，则 *MD* 的最小值是（　　）



A．6　　　B．5　　　C．4　　　D．3

【答案】*C*

【解答】解：连接 *BD*，以点 *B* 为圆心，*BA* 为半径作圆，交 *BD* 于点 *M*，

∵四边形 $ABCD$ 为矩形，

∴$\angle A=90°$，

∴$BD=\sqrt{AB^2+AD^2}=\sqrt{6^2+8^2}=10$，

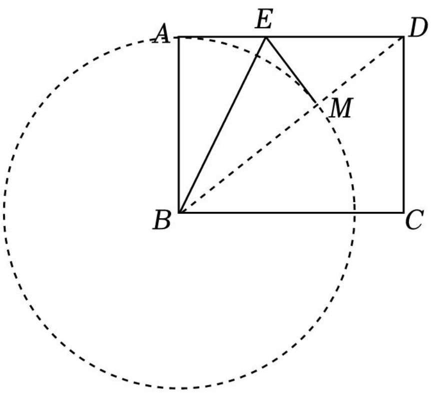
∵点 A 和点 M 关于 BE 对称，

∴$AB=BM=6$，

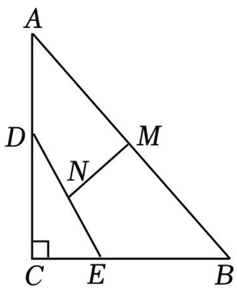
∴$DM=BD-BM=10-6=4$.

故 DM 的最小值为 4.

故选：C.



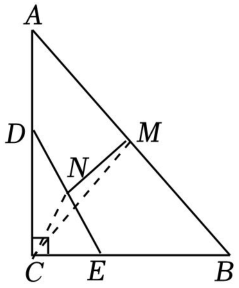
12.（2023 秋•建湖县期中）如图，△ABC 中 $\angle C=90°$，$AC=8$，$BC=6$，线段 DE 的两个端点 D、E 分别在边 AC、BC 上滑动，且 $DE=6$，若点 M、N 分别是 AB、DE 的中点，则 MN 的最小值为（　　）



A．2　　　　B．3　　　　C．3.5　　　　D．4

【答案】A

【解答】解：如图，连接 CM、CN，



△ABC 中，∠C＝90°，AC＝8，BC＝6，

∴$AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=10$，

∵DE＝6，点 M、N 分别是 DE、AB 的中点，

∴$CN=\frac{1}{2}DE=3$，$CM=\frac{1}{2}AB=5$，

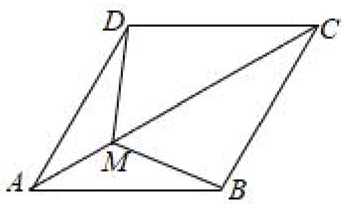
当 C、M、N 在同一直线上时，MN 取最小值，

∴MN 的最小值为：5－3＝2．

故选：A．

模型之：费马对最值模型

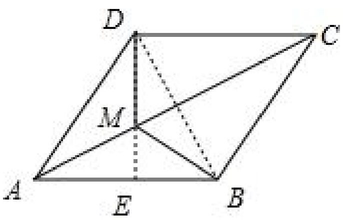
13.（2023 秋•白银区期末）如图，已知菱形 $ABCD$ 的边长为 6，点 M 是对角线 AC 上的一动点，且∠ABC＝120°，则 $MA+MB+MD$ 的最小值是（　　）



A．$3\sqrt{3}$　　B．$3+3\sqrt{3}$　　C．$6+\sqrt{3}$　　D．$6\sqrt{3}$

【答案】D

【解答】解：如图，过点 D 作 $DE⊥AB$ 于点 E，连接 BD，



∵菱形 $ABCD$ 中，∠ABC＝120°，

∴∠DAB＝60°，AD＝AB＝DC＝BC，

∴△ADB 是等边三角形，

∴∠MAE＝30°，

∴$AM=2ME$，

∵$MD=MB$，

∴$MA+MB+MD=2ME+2DM=2DE$，

根据垂线段最短，此时 DE 最短，即 $MA+MB+MD$ 最小，

∵菱形 $ABCD$ 的边长为 6，

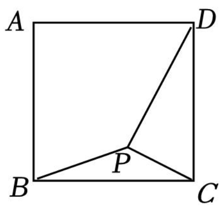
∴$DE=\sqrt{AD^2-AE^2}=\sqrt{6^2-3^2}=3\sqrt{3}$，

∴$2DE=6\sqrt{3}$.

∴$MA+MB+MD$ 的最小值是 $6\sqrt{3}$.

故选：D.

14.（2023 秋•太和县期末）如图，P 是边长为 1 的正方形 $ABCD$ 内的一个动点，且满足$\angle PBC+\angle PDC=45^\circ$，则 CP 的最小值是（　　）



A. $2-\sqrt{2}$　　　B. $\frac{1}{2}$　　　C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　　D. $\sqrt{2}-1$

【答案】D

【解答】解：∵四边形 $ABCD$ 是正方形，

∴$\angle BCD=90^\circ$，

在凹四边形 $BCDP$ 中，

∵$\angle BCD=90^\circ$，$\angle PBC+\angle PDC=45^\circ$，

∴$\angle BPC+\angle CPD=360^\circ-\angle BCD-(\angle PBC+\angle PDC)=225^\circ$，

∴$\angle BPD=360^\circ-(\angle BPC+\angle CPD)=135^\circ$，

得点 P 在运动过程中，使得$\angle BPD=135^\circ$，

即点 P 在正方形 $ABCD$ 内，以 A 为圆心，AB 为半径的圆弧上，

由图可得 $AP+CP\geqslant AC$，

当点 A、P、C 三点共线时，CP 取得最小值，最小值为 $AC-AP$，

在 Rt△ABC 中，

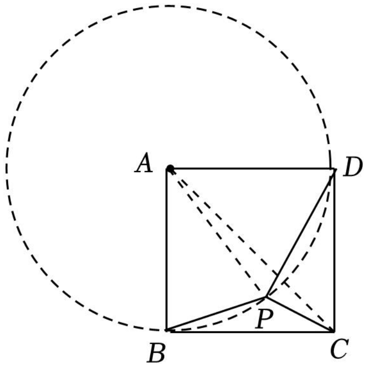
∵$AB=BC=1$，

∴$AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=\sqrt{2}$，

∵$AP=AB=1$，

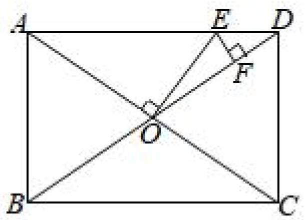
∴$CP=AC-AP=\sqrt{2}-1$.

故选：D.



模型称：面积法求定值

15.（2023秋•东河区期末）如图，矩形 $ABCD$ 的对角线 AC，BD 交于点 O，$AB=3$，$BC=4$，过点 O 作 $OE\perp AC$，交 AD 于点 E，过点 E 作 $EF\perp BD$，垂足为 F，则 $OE+EF$ 的值为（　　）



A．$\frac{32}{5}$　　B．$\frac{24}{5}$　　C．$\frac{12}{5}$　　D．$\frac{6}{5}$

【答案】C

【解答】解：∵$AB=3$，$BC=4$，

∴矩形 $ABCD$ 的面积为 12，$AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=\sqrt{3^2+4^2}=5$，

∴$AO=DO=\frac{1}{2}AC=\frac{5}{2}$，

∵对角线 AC，BD 交于点 O，

∴$\triangle AOD$ 的面积为 3，

∵$EO\perp AO$，$EF\perp DO$，

∴$S_{\triangle AOD}=S_{\triangle AOE}+S_{\triangle DOE}$，即 $3=\frac{1}{2}AO\times EO+\frac{1}{2}DO\times EF$，

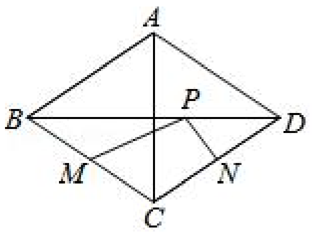
$\therefore 3=\frac{1}{2}\times\frac{5}{2}\times EO+\frac{1}{2}\times\frac{5}{2}\times EF$，

$\therefore 5(EO+EF)=12$，

$\therefore EO+EF=\frac{12}{5}$，

故选：C.

16.（2023春•东昌府区期中）如图，菱形 $ABCD$ 中，对角线 $AC=6$，$BD=8$，M、N 分别是 BC、CD 上的动点，P 是线段 BD 上的一个动点，则 $PM+PN$ 的最小值是（　　）



A．$\frac{9}{5}$　　B．$\frac{12}{5}$　　C．$\frac{16}{5}$　　D．$\frac{24}{5}$

【答案】D

【解答】解：∵菱形 $ABCD$ 中，$AC\perp BD$，

$\therefore AB=\sqrt{3^2+4^2}=5$，

过 N 作 $NQ\perp AB$ 于 Q 交 BD 于 P，

过 P 作 $PM\perp BC$ 于 M，

则 $PM+PN=PN+PQ=NQ$ 的值最小，

$\because S_{菱形ABCD}=\frac{1}{2}\times6\times8=5NQ$，

$\therefore NQ=\frac{24}{5}$，

即 $PM+PN$ 的最小值是$\frac{24}{5}$，

故选：D.