

江西省南昌市 2024 届高三 4 月高考二模数学试题

考生请注意：

1. 答题前请将考场、试室号、座位号、考生号、姓名写在试卷密封线内，不得在试卷上作任何标记。
2. 第一部分选择题每小题选出答案后，需将答案写在试卷指定的括号内，第二部分非选择题答案写在试卷题目指定的位置上。
3. 考生必须保证答题卡的整洁。考试结束后，请将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知复数 z 满足： $zi = 3 + 4i$ (i 为虚数单位)，则 $\bar{z} =$ ()

- A. $4 + 3i$ B. $4 - 3i$ C. $-4 + 3i$ D. $-4 - 3i$

2. 已知函数 $f(x) = \frac{1}{2}ax^2 - (x-1)e^x$ ($a \in R$) 若对区间 $[0, 1]$ 内的任意实数 x_1, x_2, x_3 ，都有 $f(x_1) + f(x_2) \geq f(x_3)$ ，则实数 a 的取值范围是()

- A. $[1, 2]$ B. $[e, 4]$ C. $[1, 4]$ D. $[1, 2) \cup [e, 4]$

3. 设 $a = \log_2 3$ ， $b = \log_4 6$ ， $c = 5^{-0.1}$ ，则 ()

- A. $a > b > c$ B. $b > a > c$ C. $c > a > b$ D. $c > b > a$

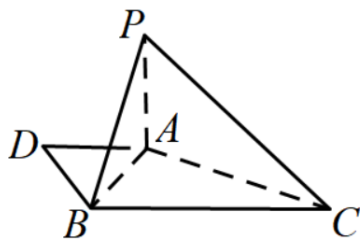
4. 已知三棱锥 $A-BCD$ 的所有顶点都在球 O 的球面上， $AD \perp$ 平面 ABC ， $\angle BAC = 120^\circ$ ， $AD = 2$ ，若球 O 的表面积为 20π ，则三棱锥 $A-BCD$ 的体积的最大值为 ()

- A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ B. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ C. $\sqrt{3}$ D. $2\sqrt{3}$

5. “ $b = 2$ ”是“函数 $f(x) = (2b^2 - 3b - 1)x^\alpha$ (α 为常数) 为幂函数”的 ()

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分又不必要条件

6. 如图，平面四边形 $ACBD$ 中， $AB \perp BC$ ， $AB \perp DA$ ， $AB = AD = 1$ ， $BC = \sqrt{2}$ ，现将 $\triangle ABD$ 沿 AB 翻折，使点 D 移动至点 P ，且 $PA \perp AC$ ，则三棱锥 $P-ABC$ 的外接球的表面积为 ()



- A. 8π B. 6π C. 4π D. $\frac{8\sqrt{2}}{3}\pi$

7. 已知函数 $f(x) = (2a+2)\ln x + 2ax^2 + 5$. 设 $a < -1$, 若对任意不相等的正数 x_1, x_2 , 恒有 $\left| \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \right| \geq 8$,

则实数 a 的取值范围是 ()

A. $(-3, -1)$

B. $(-2, -1)$

C. $(-\infty, -3]$

D. $(-\infty, -2]$

8. 在复平面内, 复数 $z=i$ 对应的点为 Z , 将向量 $\overrightarrow{OZ}$ 绕原点 O 按逆时针方向旋转 $\frac{\pi}{6}$, 所得向量对应的复数是 ()

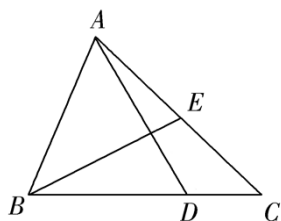
A. $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

B. $-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$

C. $-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

D. $-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$

9. 已知 $\triangle ABC$ 中, $AB=2, BC=3, \angle ABC=60^\circ, BD=2DC, AE=EC$, 则 $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BE} =$ ()



A. 1

B. -2

C. $\frac{1}{2}$

D. $-\frac{1}{2}$

10. 已知命题 $p: \forall x \in \mathbf{R}, x^2 > 0$, 则 $\neg p$ 是 ()

A. $\forall x \in \mathbf{R}, x^2 \leq 0$

B. $\exists x_0 \in \mathbf{R}, x_0^2 \leq 0$.

C. $\exists x_0 \in \mathbf{R}, x_0^2 > 0$

D. $\forall x \notin \mathbf{R}, x^2 \leq 0$.

11. 已知函数 $f(x) = 2\sin(\omega x + \varphi) + b (\omega > 0)$, $f(\frac{\pi}{8} + x) = f(\frac{\pi}{8} - x)$, 且 $f(\frac{\pi}{8}) = 5$, 则 $b =$ ()

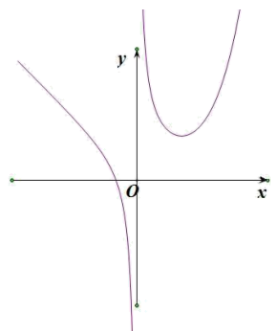
A. 3

B. 3 或 7

C. 5

D. 5 或 8

12. 若函数 $f(x)$ 的图象如图所示, 则 $f(x)$ 的解析式可能是 ()



A. $f(x) = \frac{e^x + x}{x}$

B. $f(x) = \frac{1-x^2}{x}$

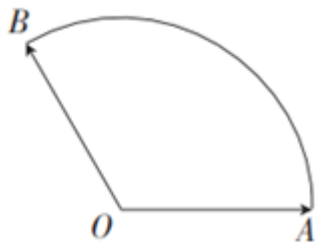
C. $f(x) = \frac{e^x - x}{x}$

D. $f(x) = \frac{x+1}{x^2}$

二、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分。

13. 若复数 z 满足 $\frac{z}{i} = 2 + i$ ，其中 i 是虚数单位，则 z 的模是_____。

14. 如图，已知扇形 AOB 的半径为1，面积为 $\frac{\pi}{3}$ ，则 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{AB}$ =_____。



15. 已知 $x > 0$ ， $y > 0$ ，且 $\frac{2}{x} + \frac{1}{y} = 1$ ，若 $x + 2y > m^2 + 2m$ 恒成立，则实数 m 的取值范围是_____。

16. 在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中， E 为棱 AA_1 的中点， F 是棱 A_1B_1 上的点，且 $A_1F = \frac{1}{3}FB_1$ ，则异面直线 EF 与 BC_1 所成角的余弦值为_____。

三、解答题：共70分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12分) 设函数 $f(x) = ax(2 + \cos x) - \sin x$ ， $f'(x)$ 是函数 $f(x)$ 的导数。

(1) 若 $a = 1$ ，证明 $f'(x)$ 在区间 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 上没有零点；

(2) 在 $x \in (0, +\infty)$ 上 $f(x) > 0$ 恒成立，求 a 的取值范围。

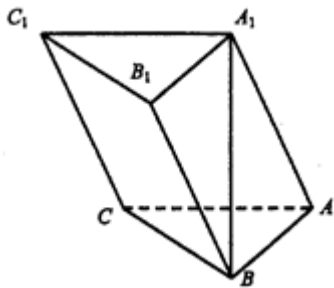
18. (12分) 已知 $\{a_n\}$ ， $\{b_n\}$ ， $\{c_n\}$ 都是各项不为零的数列，且满足 $a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n = c_nS_n$ ， $n \in N^*$ ，其中 S_n 是数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和， $\{c_n\}$ 是公差为 d ($d \neq 0$) 的等差数列。

(1) 若数列 $\{a_n\}$ 是常数列， $d = 2$ ， $c_2 = 3$ ，求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式；

(2) 若 $a_n = \lambda n$ (λ 是不为零的常数)，求证：数列 $\{b_n\}$ 是等差数列；

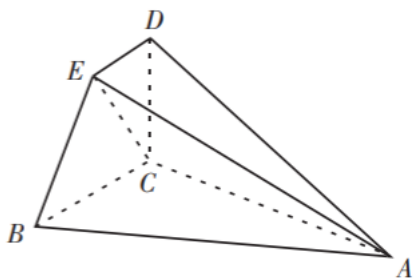
(3) 若 $a_1 = c_1 = d = k$ (k 为常数， $k \in N^*$)， $b_n = c_{n+k}$ ($n \geq 2, n \in N^*$)。求证：对任意 $n \geq 2, n \in N^*$ ， $\frac{b_n}{a_n} > \frac{b_{n+1}}{a_{n+1}}$ 的恒成立。

19. (12分) 如图，在三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中， $A_1B \perp$ 平面 ABC ， $AB \perp AC$ ，且 $AB = AC = A_1B = 2$ 。



- (1) 求棱 AA_1 与 BC 所成的角的大小；
- (2) 在棱 B_1C_1 上确定一点 P ，使二面角 $P-AB-A_1$ 的平面角的余弦值为 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ 。

20. (12 分) 如图，在四棱锥 $A-BCDE$ 中，平面 $BCDE \perp$ 平面 ABC ， $BE \perp EC, BC = 1, AB = 2, \angle ABC = 60^\circ$ 。



- (I) 求证： $BE \perp$ 平面 ACE ；
- (II) 若锐二面角 $E-AB-C$ 的余弦值为 $\frac{\sqrt{21}}{7}$ ，求直线 CE 与平面 ABC 所成的角。

21. (12 分) 新高考，取消文理科，实行“3+3”，成绩由语文、数学、外语统一高考成绩和自主选考的 3 门普通高中学业水平考试等级性考试科目成绩构成.为了解各年龄层对新高考的了解情况，随机调查 50 人（把年龄在 $[15,45)$ 称为中青年，年龄在 $[45,75)$ 称为中老年），并把调查结果制成下表：

年龄（岁）	$[15,25)$	$[25,35)$	$[35,45)$	$[45,55)$	$[55,65)$	$[65,75)$
频数	5	15	10	10	5	5
了解	4	12	6	5	2	1

- (1) 分别估计中青年和中老年对新高考了解的概率；
- (2) 请根据上表完成下面 2×2 列联表，是否有 95% 的把握判断对新高考的了解与年龄（中青年、中老年）有关？

	了解新高考	不了解新高考	总计
中青年			

中老年			
总计			

附： $K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}.$

$P\left(K^2 \geq k\right)$	0.050	0.010	0.001
k	3.841	6.635	10.828

（3）若从年龄在 $[55,65)$ 的被调查者中随机选取3人进行调查，记选中的3人中了解新高考的人数为 X ，求 X 的分布列以及 $E(X)$ ．

22.（10分）已知各项均不相等的等差数列 $\left\{a_n\right\}$ 的前4项和为 $S_4=14$ ，且 a_1,a_3,a_7 成等比数列.

- （1）求数列 $\left\{a_n\right\}$ 的通项公式；
- （2）求数列 $\left\{\frac{1}{a_na_{n+1}}\right\}$ 的前 n 项和 T_n ．

参考答案

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1、A

【解析】

利用复数的乘法、除法运算求出 z ，再根据共轭复数的概念即可求解.

【详解】

由 $zi=3+4i$ ，则 $z=\frac{3+4i}{i}=\frac{3i-4}{-1}=4-3i$ ，

所以 $\overline{z}=4+3i$ ．

故选：A

【点睛】

本题考查了复数的四则运算、共轭复数的概念，属于基础题.

2、C

【解析】

分析：先求导,再对 a 分类讨论求函数的单调区间，再画图分析转化对区间 $[0,1]$ 内的任意实数 x_1 、 x_2 、 x_3 ，都有

$f(x_1)+f(x_2)\geq f(x_3)$ ，得到关于 a 的不等式组，再解不等式组得到实数 a 的取值范围.

详解：由题得 $f'(x)=ax-[e^x+(x-1)e^x]=ax-xe^x=x(a-e^x)$.

当 $a<1$ 时， $f'(x)<0$ ，所以函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 单调递减，

因为对区间 $[0,1]$ 内的任意实数 x_1 、 x_2 、 x_3 ，都有 $f(x_1)+f(x_2)\geq f(x_3)$ ，

所以 $f(1)+f(1)\geq f(0)$ ，

所以 $\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}a\geq 1$ ，

故 $a\geq 1$ ，与 $a<1$ 矛盾，故 $a<1$ 矛盾.

当 $1\leq a<e$ 时，函数 $f(x)$ 在 $[0,\ln a]$ 单调递增，在 $(\ln a,1]$ 单调递减.

所以 $f(x)_{\max}=f(\ln a)=\frac{1}{2}a\ln^2 a-a\ln a+a$ ，

因为对区间 $[0,1]$ 内的任意实数 x_1 、 x_2 、 x_3 ，都有 $f(x_1)+f(x_2)\geq f(x_3)$ ，

所以 $f(0)+f(1)\geq f(\ln a)$ ，

所以 $1+\frac{1}{2}a\geq \frac{1}{2}a\ln^2 a-a\ln a+a$ ，

即 $\frac{1}{2}a\ln^2 a-a\ln a+\frac{1}{2}a-1\leq 0$

令 $g(a)=\frac{1}{2}a\ln^2 a-a\ln a+\frac{1}{2}a-1$ ，($1\leq a<e$)，

所以 $g'(a)=\frac{1}{2}(\ln^2 a-1)<0$ ，

所以函数 $g(a)$ 在 $(1, e)$ 上单调递减，

所以 $g(a)_{\max}=g(1)=-\frac{1}{2}<0$ ，

所以当 $1\leq a<e$ 时，满足题意.

当 $a\geq e$ 时，函数 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 单调递增，

因为对区间 $[0,1]$ 内的任意实数 x_1 、 x_2 、 x_3 ，都有 $f(x_1)+f(x_2)\geq f(x_3)$ ，

所以 $f(0)+f(0)\geq f(1)$ ，

故 $1+1\geq \frac{1}{2}a$ ，

所以 $a \leq 4$.

故 $e \leq a \leq 4$.

综上所述, $a \in [1, 4]$.

故选 C.

点睛: 本题的难点在于“对区间 $[0, 1]$ 内的任意实数 x_1, x_2, x_3 , 都有 $f(x_1) + f(x_2) \geq f(x_3)$ ”的转化. 由于是函数的问题, 所以我们要联想到利用函数的性质 (单调性、奇偶性、周期性、对称性、最值、极值等) 来分析解答问题. 本题就是把这个条件和函数的单调性和最值联系起来, 完成了数学问题的等价转化, 找到了问题的突破口.

3、A

【解析】

先利用换底公式将对数都化为以 2 为底, 利用对数函数单调性可比较 a, b , 再由中间值 1 可得三者的大小关系.

【详解】

$a = \log_2 3 \in (1, 2)$, $b = \log_4 6 = \log_2 \sqrt{6} \in (1, \log_2 3)$, $c = 5^{-0.1} \in (0, 1)$, 因此 $a > b > c$, 故选: A.

【点睛】

本题主要考查了利用对数函数和指数函数的单调性比较大小, 属于基础题.

4、B

【解析】

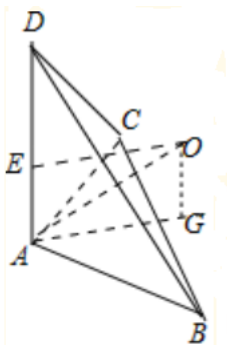
由题意画出图形, 设球 O 的半径为 R , $AB=x$, $AC=y$, 由球 O 的表面积为 20π , 可得 $R^2=5$, 再求出三角形 ABC 外接圆的半径, 利用余弦定理及基本不等式求 xy 的最大值, 代入棱锥体积公式得答案.

【详解】

设球 O 的半径为 R , $AB=x$, $AC=y$,

由 $4\pi R^2 = 20\pi$, 得 $R^2 = 5$.

如图:



设三角形 ABC 的外心为 G , 连接 OG , GA , OA ,

可得 $OG = \frac{1}{2}AD = 1$ ，则 $AG = \sqrt{R^2 - 1} = 2$ 。

在 $\triangle ABC$ 中，由正弦定理可得： $\frac{BC}{\sin 120^\circ} = 2AG = 4$ ，

即 $BC = 2\sqrt{3}$ ，

由余弦定理可得， $BC^2 = 12 = x^2 + y^2 - 2xy \times (-\frac{1}{2}) = x^2 + y^2 + xy \dots 3xy$ ，

$\therefore xy \leq 4$ 。

则三棱锥 $A-BCD$ 的体积的最大值为 $\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 4 \times \sin 120^\circ \times 2 = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ 。

故选：B。

【点睛】

本题考查三棱锥的外接球、三棱锥的侧面积、体积，基本不等式等基础知识，考查空间想象能力、逻辑思维能力、运算求解能力，考查数学转化思想方法与数形结合的解题思想方法，是中档题。

5、A

【解析】

根据幂函数定义，求得 b 的值，结合充分条件与必要条件的概念即可判断。

【详解】

$\because$ 当函数 $f(x) = (2b^2 - 3b - 1)x^a$ 为幂函数时， $2b^2 - 3b - 1 = 1$ ，

解得 $b = 2$ 或 $-\frac{1}{2}$ ，

$\therefore$ “ $b = 2$ ”是“函数 $f(x) = (2b^2 - 3b - 1)x^a$ 为幂函数”的充分不必要条件。

故选：A。

【点睛】

本题考查了充分必要条件的概念和判断，幂函数定义的应用，属于基础题。

6、C

【解析】

由题意可得 $PA \perp$ 面 ABC ，可知 $PA \perp BC$ ，因为 $AB \perp BC$ ，则 $BC \perp$ 面 PAB ，于是 $BC \perp PB$ 。由此推出三棱锥 $P-ABC$ 外接球球心是 PC 的中点，进而算出 $CP = 2$ ，外接球半径为 1，得出结果。

【详解】

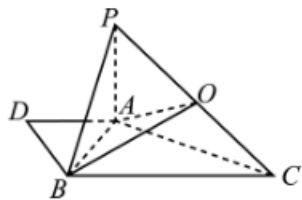
解：由 $DA \perp AB$ ，翻折后得到 $PA \perp AB$ ，又 $PA \perp AC$ ，

则 $PA \perp$ 面 ABC ，可知 $PA \perp BC$ 。

又因为 $AB \perp BC$ ，则 $BC \perp$ 面 PAB ，于是 $BC \perp PB$ ，

因此三棱锥 $P-ABC$ 外接球球心是 PC 的中点.

计算可知 $CP=2$, 则外接球半径为 1, 从而外接球表面积为 4π .



故选: C.

【点睛】

本题主要考查简单的几何体、球的表面积等基础知识, 考查空间想象能力、推理论证能力、运算求解能力及创新意识, 属于中档题.

7、D

【解析】

求解 $f(x)$ 的导函数, 研究其单调性, 对任意不相等的正数 x_1, x_2 , 构造新函数, 讨论其单调性即可求解.

【详解】

$$f(x) \text{ 的定义域为 } (0, +\infty), f'(x) = \frac{2a+2}{x} + 4ax = \frac{2(2ax^2 + a+1)}{x},$$

当 $a < -1$ 时, $f'(x) < 0$, 故 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 单调递减;

不妨设 $x_1 < x_2$, 而 $a < -1$, 知 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 单调递减,

$$\text{从而对任意 } x_1, x_2 \in (0, +\infty), \text{ 恒有 } \left| \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \right| \geq 8,$$

$$\text{即 } |f(x_1) - f(x_2)| \geq 8|x_1 - x_2|,$$

$$f(x_1) - f(x_2) \geq 8(x_2 - x_1), f(x_1) + 8x_1 \geq f(x_2) + 8x_2,$$

令 $g(x) = f(x) + 8x$, 则 $g'(x) = \frac{2a+2}{x} + 4ax + 8$, 原不等式等价于 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 单调递减, 即

$$\frac{a+1}{x} + 2ax + 4 \leq 0,$$

$$\text{从而 } a \leq \frac{-4x-1}{2x^2+1} = \frac{(2x-1)^2}{2x^2+1} - 2, \text{ 因为 } \frac{(2x-1)^2}{2x^2+1} - 2 \geq -2,$$

所以实数 a 的取值范围是 $(-\infty, -2]$

故选: D.

【点睛】

此题考查含参函数研究单调性问题，根据参数范围化简后构造新函数转换为含参恒成立问题，属于一般性题目.

8、A

【解析】

由复数 z 求得点 Z 的坐标，得到向量 $\overrightarrow{OZ}$ 的坐标，逆时针旋转 $\frac{\pi}{6}$ ，得到向量 $\overrightarrow{OB}$ 的坐标，则对应的复数可求.

【详解】

解：∵复数 $z=i$ (i 为虚数单位) 在复平面中对应点 $Z(0, 1)$,

∴ $\overrightarrow{OZ} = (0, 1)$ ，将 $\overrightarrow{OZ}$ 绕原点 O 逆时针旋转 $\frac{\pi}{6}$ 得到 $\overrightarrow{OB}$ ，

设 $\overrightarrow{OB} = (a, b)$ ， $a < 0, b > 0$ ，

$$\text{则 } \overrightarrow{OZ} \cdot \overrightarrow{OB} = b = |\overrightarrow{OZ}| |\overrightarrow{OB}| \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\text{即 } b = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\text{又 } a^2 + b^2 = 1,$$

$$\text{解得： } a = -\frac{1}{2}, b = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\therefore \overrightarrow{OB} = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right),$$

$$\text{对应复数为 } -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

故选：A.

【点睛】

本题考查复数的代数表示法及其几何意义，是基础题.

9、C

【解析】

以 $\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}$ 为基底，将 $\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BE}$ 用基底表示，根据向量数量积的运算律，即可求解.

【详解】

$$\overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{BD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BA} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA},$$

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/426103045222011000>