上海市同济大学第一附属中学2023-2024学年高二上学期期末考试数学试卷

学校:___________姓名：___________班级：___________考号：___________

一、填空题

1．在等比数列$\{a_n\}$中，若$a_1=\frac{1}{2},a_4=4$，则公比$q=$______.

2．已知曲线$\frac{x^2}{m+2}+\frac{y^2}{m+1}=1$是焦点在$x$轴上的双曲线，则实数$m$的取值范围是_____.

3．某学生做两道选择题，已知每道题均有4个选项，其中有且只有一个正确答案．该学生随意填写两个答案，则两个答案都选错的概率为______.

4．将循环小数化为分数：$0.\dot{3}\dot{6}=$______.

5．已知平面α的法向量为$(2,-4,-2)$，平面β的法向量为$(-1,2,k)$，若$\alpha//\beta$，则$k=$__.

6．用数学归纳法证明：$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{3^n-1}<n,(n\in N_+,n>1)$ 时，在第二步证明从$n=k$到$n=k+1$成立时，左边增加的项数是_____

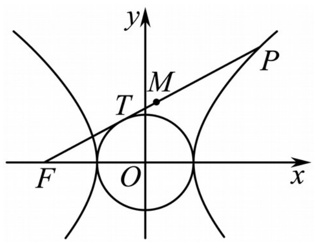
7．若直线l过点$P(-2,\sqrt{3})$，且与直线$m:x-\sqrt{3}y+2=0$的夹角为$\frac{\pi}{3}$，则直线l的方程是___.

8．已知双曲线$\frac{x^2}{a^2}-y^2=1(a>0)$的渐近线与圆$x^2+y^2-4y+3=0$相切，则$a=$_____.

9．等差数列$\{a_n\}$中，已知$a_1=5$，且在前n项和S_n中，仅当$n=10$时，S_{10}最大，则公差d的取值范围为______.

10．从双曲线$x^2-\frac{y^2}{3}=1$的左焦点F引圆$x^2+y^2=1$的切线，切点为T，延长FT交双

曲线右支于P点，若M为线段FP的中点，O为坐标原点，则$|MO|-|MT|$的值是______.



11．已知F是椭圆$\frac{x^2}{2}+y^2=1$的右焦点，P是椭圆上一动点，$A\left(0,\frac{1}{2}\right)$，则$\triangle APF$周长的最大值为______.

12．等差数列$\{a_n\}(n\geq 3, n\in\mathbf{N})$满足$|a_1|+|a_2|+|a_3|+\cdots+|a_n|=|a_1+1|+|a_2+1|+|a_3+1|+\cdots+|a_n+1|=|a_1-2|+|a_2-2|+|a_3-2|+\cdots+|a_n-2|=2024$，则$n$的最大值为______.

二、单选题

13．设$a\in\mathbf{R}$，则“$a=-2$”是“直线l_1：$ax+2y-1=0$与直线l_2：$x+(a+1)y+4=0$平行”的（　）

A．充分不必要条件　　B．必要不充分条件

C．充分必要条件　　D．既不充分也不必要条件

14．已知a,x,b和b,y,c均为等差数列，而a,b,c为等比数列，且$xy\neq 0$，则$\frac{a}{x}+\frac{c}{y}$的值等于（　）

A．1　　B．2　　C．3　　D．4

15．将一枚质地均匀的骰子连续抛掷2次，设事件$A=$“第一次点数为偶数”，事件$B=$“第二次点数为3的倍数”，则（　）

A．A与B是互斥事件　　B．A与B是互为对立事件

C．$P(A\cap B)=P(A)P(B)$　　D．$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$

16．定义：如果曲线段C可以一笔画出，那么称曲线段C为单轨道曲线，比如圆、椭

圆都是单轨道曲线；如果曲线段C由两条单轨道曲线构成，那么称曲线段C为双轨道曲线．对于曲线$\Gamma:\sqrt{(x+1)^2+y^2}\cdot\sqrt{(x-1)^2+y^2}=m(m>0)$有如下命题：$p:$存在常数$m$，使得曲线$\Gamma$为单轨道曲线；　$q:$存在常数m，使得曲线Γ为双轨道曲线．下列判断正确的是（　）．

A．p和q均为真命题　　B．p和q均为假命题

C．p为真命题，q为假命题　　D．p为假命题，q为真命题

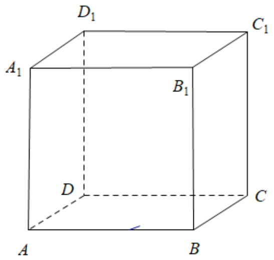
三、解答题

17．一个袋子中装有标号为1，2，3，4，5的5个球，除标号外没有其他差异．

(1)采取不放回的方式从袋中依次任意摸出两球，设事件$A=$“两次摸出球的标号之和大于5”，写出等可能性的样本空间并求事件A发生的概率；

(2)采取有放回的方式从袋中依次任意摸出两球，设事件$B=$“第一次摸出球的标号是奇数”，设事件$C=$“第二次摸出球的标号是偶数”，那么事件B与事件C是否相互独立？

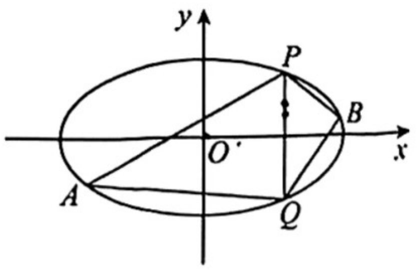
18．如图，在棱长为1的正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，点E、F分别是C_1D_1与AB的中点．



(1)求A_1B_1与平面A_1ECF所成角的大小；

(2)求V_{B-A_1ECF}．

19．已知椭圆C的中心在原点，焦点在x轴上，离心率为$\frac{1}{2}$，短轴长为$4\sqrt{3}$．



(1)求椭圆C的标准方程；

(2)若直线$x=2$与椭圆C交于P、Q两点，A、B是椭圆C上位于直线PQ两侧的动点，且

直线 AB 的斜率为 $\frac{1}{2}$，求四边形 $APBQ$ 的而积的最大值.

20．设抛物线 Γ: $y^2=2px(p>0)$ 的焦点为 F，经过点 F 的动直线 l 交抛物线 Γ 于 $A\left(x_1,y_1\right),B\left(x_2,y_2\right)$ 两点，且 $y_1y_2=-4$.

(1)求抛物线 Γ 的标准方程；

(2)若直线 $2x+3y=0$ 平分线段 AB，求直线 l 的倾斜角；

(3)若点 M 是抛物线 Γ 的准线与 x 轴的交点，在 x 轴上是否存在定点 P，对任意过点 M 的直线与抛物线交于 C、D 两点，使得 $k_{PC}\cdot k_{PD}$ 为定值？若存在，求出点 P 的坐标；若不存在，说明理由，

21．设数列$\{a_n\}$的首项a_1为常数$\left(a_1 \neq \frac{3}{5}\right)$，且$a_{n+1}=3^n-2a_n\left(n \in \mathrm{N}^*\right)$．

(1)证明：$\left\{a_n-\frac{3^n}{5}\right\}$是等比数列；

(2)若$a_1=\frac{3}{2},\{a_n\}$中是否存在连续三项成等差数列？若存在，写出这三项：若不存在，请说明理由．

(3)若$\{a_n\}$是递增数列，求a_1的取值范围．

参考答案：

1．2

【分析】根据等比数列的通项公式，即可求解.

【详解】由题意可知，$\frac{a_4}{a_1}=q^3=8$，得$q=2$.

故答案为：2

2．$-2<m<-1$.

【分析】根据双曲线标准方程的特点求解.

【详解】$\because \frac{x^2}{m+2}+\frac{y^2}{m+1}=1$ 是焦点在x轴的双曲线，

$\therefore m+2>0,m+1<0$ ，即$-2<m<-1$ ；

故答案为：$-2<m<-1$.

3．$\frac{9}{16}$/0.5625

【分析】首先由题意抽象为独立事件同时发生的事件，再代入概率公式，即可求解.

【详解】设答错第一道选择题为事件A，答错第二道选择题为事件B,两事件相互独立，

且$P(A)=P(B)=\frac{3}{4}$，

两个题都选错为事件AB，则$P(AB)=P(A)P(B)=\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}=\frac{9}{16}$.

故答案为：$\frac{9}{16}$

4．$\frac{4}{11}$

【分析】借助于无穷等比数列的前n项和公式，即可求解.

【详解】$0.\dot{3}\dot{6}=0.36+0.0036+0.000036+\ldots$，

所以$0.\dot{3}\dot{6}$可以看成以0.36为首项，0.01为公比的无穷等比数列的前n项的和，

即$0.\dot{3}\dot{6}=\dfrac{0.36}{1-0.01}=\dfrac{4}{11}$.

故答案为：$\dfrac{4}{11}$

5．1

【分析】根据$\alpha//\beta$，可得两平面的法向量共线，再根据空间向量的共线定理即可得解.

【详解】因为$\alpha//\beta$，

所以两平面的法向量共线，

所以存在唯一实数λ，使得$(-1,2,k)=\lambda(2,-4,-2)$，

所以$\begin{cases}-1=2\lambda\\2=-4\lambda\\k=-2\lambda\end{cases}$，解得$\begin{cases}\lambda=-\dfrac{1}{2}\\k=1\end{cases}$，

所以$k=1$.

故答案为：1.

6．$2\cdot3^k$

【分析】分别写出$n=k$和$n=k+1$时不等式的左边的式子，比较即可求得答案.

【详解】由题意知$n=k$时，左边式子为$1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{3^k-1}$，

$n=k+1$时，左边式子为$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{3^k-1}+\cdots+\frac{1}{3^{k+1}-1}$，

故增加的项数为$3^{k+1}-3^k=2\cdot 3^k$ ，

故答案为：$2\cdot 3^k$

7．$x=-2$，或$x+\sqrt{3}y-1=0$

【分析】先求出直线m的倾斜角，再根据直线l和直线m夹角为$\frac{\pi}{3}$，可得直线l的倾斜角，

进而得到直线l的斜率，从而求得直线l的方程.

【详解】$\because$直线l过点$P\left(-2,\sqrt{3}\right)$，且与直线$m$: $x-\sqrt{3}y+2=0$的夹角为$\frac{\pi}{3}$，

且直线m的斜率为$\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，即直线$m$的倾斜角为$\frac{\pi}{6}$，

设直线l的倾斜角为θ，则$\theta=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}$，或$\theta=\pi+\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{5\pi}{6}$，

故直线m的斜率不存在，或直线m的斜率为$tan\frac{5\pi}{6}=-tan\frac{\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$，

故直线l的方程为$x=-2$或$y-\sqrt{3}=-\frac{\sqrt{3}}{3}\left(x+2\right)$，

即直线l的方程为$x=-2$或$x+\sqrt{3}y-1=0$，

故答案为$x=-2$或$x+\sqrt{3}y-1=0$

【点睛】本题主要考查直线的倾斜角和斜率，用点斜式求直线的方程，熟记两直线的夹角公式即可，属于基础题型.

8．$\frac{\sqrt{3}}{3}$/$\frac{1}{3}\sqrt{3}$

【分析】求出双曲线的渐近线方程，利用圆心到渐近线的距离等于圆的半径可求得a的值.

【详解】由$x^2+y^2-4y+3=0$得$x^2+\left(y-2\right)^2=1$，所以圆心为$\left(0,2\right)$，半径为1，

双曲线$\frac{x^2}{a^2}-y^2=1\left(a>0\right)$的渐近线方程为$y=\pm\frac{x}{a}$，即$x\pm ay=0$，

因为双曲线$\frac{x^2}{a^2}-y^2=1\left(a>0\right)$的渐近线与圆$x^2+y^2-4y+3=0$相切，

所以$\frac{\left|2a\right|}{\sqrt{1+a^2}}=1$，化简得$3a^2=1$，解得$a=\frac{\sqrt{3}}{3}$或$a=-\frac{\sqrt{3}}{3}$（舍去）.

故答案为：$\frac{\sqrt{3}}{3}$.

9．$\left(-\frac{5}{9},-\frac{1}{2}\right)$

【分析】首先写成等差数列前n项和的函数解析式，再利用二次函数的对称轴的范围，即可求解.

【详解】$\left\{a_n\right\}$为等差数列，且$a_1=5$，

则前n项和$S_n=\frac{d}{2}n^2+\left(5-\frac{d}{2}\right)n$，是关于$n$的二次函数，且$n\in\mathrm{N}^*$，

因为仅当$n=10$时，S_{10}最大，所以对称轴在区间$\left(\frac{19}{2},\frac{21}{2}\right)$，

即$\frac{19}{2}<\frac{1}{2}-\frac{5}{d}<\frac{21}{2}$，解得：$-\frac{5}{9}<d<-\frac{1}{2}$，

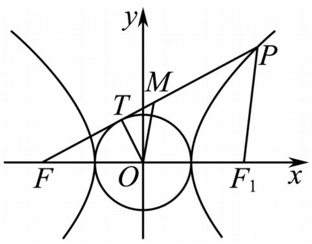
则公差d的取值范围是$\left(-\frac{5}{9},-\frac{1}{2}\right)$.

故答案为：$\left(-\frac{5}{9},-\frac{1}{2}\right)$

10．$\sqrt{3}-1$/$-1+\sqrt{3}$

【分析】设出双曲线右焦点F_1，连接PF_1,OT,OM，利用双曲线的定义和中位线进行解题.

【详解】



不妨将点P置于第一象限. 设F_1是双曲线的右焦点，连接PF_1,OT,OM · M,O分别为FP,FF_1

的中点，故$|MO|=\frac{1}{2}|PF_1|$.

又由双曲线定义得，$|PF|-|PF_1|=2a,|FT|=\sqrt{|OF|^2-|OT|^2}=b$

故$|MO|-|MT|=\frac{1}{2}|PF_1|-|MF|+|FT|=\frac{1}{2}\left(|PF_1|-|PF|\right)+|FT|=b-a=\sqrt{3}-1$.

故答案为：$\sqrt{3}-1$

11．$\sqrt{5}+2\sqrt{2}$

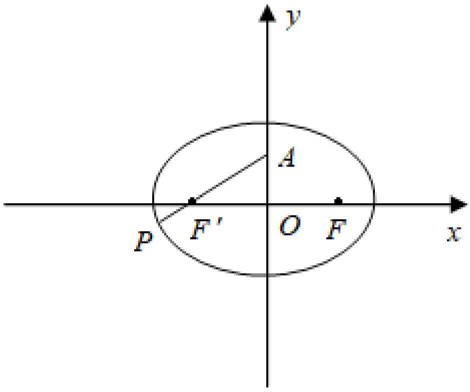
【解析】根据椭圆的定义可将周长转化为$|AP|+2a-|PF'|+AF|$，当$|AP|-|PF'|$最大时，A、

P、F'三点共线，即求出最大值.

【详解】∵$\triangle APF$的周长为$|AP|+|PF|+|AF|$，而$|PF|=2a-|PF'|$，

∴$\triangle APF$的周长为$|AP|+2a-|PF'|+|AF|$，

当$|AP|-|PF'|=|AF'|$最大时，A、P、F'三点共线，如图所示，



由题意得$a=\sqrt{2}$，$c=1$，F点坐标为$(1,0)$，F'坐标为$(-1,0)$，

则$\triangle APF$的周长最大为：

$$|AF'|+|AF|+2a=\sqrt{(-1-0)^2+\left(0-\frac{1}{2}\right)^2}+\sqrt{(1-0)^2+\left(0-\frac{1}{2}\right)^2}+2\sqrt{2},$$

故答案为：$\sqrt{5}+2\sqrt{2}$．

【点睛】本题考查了椭圆的定义标准方程及其性质、三角形三边大小关系，考查了数形结合方法、推理能力与计算能力，属于中档题.

12．50

【分析】根据题意分析可知：存在$k\in\mathbf{N}^*$，使得$\begin{cases}a_{k+1}\geq 0\\a_k<0\end{cases}$或$\begin{cases}a_k>0\\a_{k+1}\leq 0\end{cases}$，以$\begin{cases}a_{k+1}\geq 0\\a_k<0\end{cases}$为例，设等差数列的公差为$d$，结合绝对值不等式的性质分析可知：$n=2k$，$a_k+1\leq 0$且$a_{k+1}-2\geq 0$，进而可得$d\geq 3$，再根据等差数列的前$n$项和公式，求得$k^2d=2024$，从而得出$2024\geq 3k^2$，