

湖北省襄阳市第四中学 2022-2023 学年高三下学期第三次月考数学试题不含附加题

注意事项:

1. 答题前，考生先将自己的姓名、准考证号填写清楚，将条形码准确粘贴在考生信息条形码粘贴区。
2. 选择题必须使用 2B 铅笔填涂；非选择题必须使用 0.5 毫米黑色字迹的签字笔书写，字体工整、笔迹清楚。
3. 请按照题号顺序在各题目的答题区域内作答，超出答题区域书写的答案无效；在草稿纸、试题卷上答题无效。
4. 保持卡面清洁，不要折叠，不要弄破、弄皱，不准使用涂改液、修正带、刮纸刀。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 集合 $A = \{x | x^2 - x - 2 \leq 0\}$, $B = \{x | x - 1 < 0\}$, 则 $A \cup B =$ ()

A. $\{x|x < 1\}$

B. $\{x|-1 \leq x < 1\}$

C. $\{x|x \leq 2\}$ D. $\{x|-2 \leq x < 1\}$

2. 函数 $f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$ $\left(0 \leq x \leq \frac{5\pi}{12}\right)$ 的值域为 ()

A. $\left[-\frac{1}{2}, 1\right]$ B. $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ C. $[0, 1]$ D. $\left[-\frac{1}{2}, 0\right]$

3. 在平面直角坐标系 xOy 中, 将点 $A(1, 2)$ 绕原点 O 逆时针旋转 90° 到点 B , 设直线 OB 与 x 轴正半轴所成的最小正角为 α , 则 $\cos \alpha$ 等于()

A. $-\frac{2\sqrt{5}}{5}$ B. $-\frac{\sqrt{5}}{5}$ C. $\frac{\sqrt{5}}{5}$ D. $-\frac{2}{5}$

4. 函数 $f(x) = \sin\left(\omega x - \frac{\pi}{3}\right)$ ($\omega > 0$), 当 $x \in [0, \pi]$ 时, $f(x)$ 的值域为 $\left[-\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right]$, 则 ω 的范围为 ()

A. $\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$ B. $\begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$ C. $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ D. $\begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$

5. 若 $(1-2i)z=5i$ (i 是虚数单位), 则 $|z|$ 的值为 ()

A. 3 **B. 5** **C. $\sqrt{3}$** **D. $\sqrt{5}$**

6. 音乐,是用声音来展现美,给人以听觉上的享受,熔铸人们的美学趣味.著名数学家傅立叶研究了乐声的本质,他证明了所有的乐声都能用数学表达式来描述,它们是一些形如 $a \sin bx$ 的简单正弦函数的和,其中频率最低的一项是基本音,其余的为泛音.由乐声的数学表达式可知,所有泛音的频率都是基本音频率的整数倍,称为基本音的谐波.下

列函数中不能与函数 $y = 0.06 \sin 180000t$ 构成乐音的是 ()

A. $y = 0.02 \sin 360000t$ **B.** $y = 0.03 \sin 180000t$ **C.** $y = 0.02 \sin 181800t$

D. $y = 0.05 \sin 540000t$

7. 已知随机变量 X 的分布列是

X	1	2	3
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	a

则 $E(2X+a) = (\quad)$

- A. $\frac{5}{3}$ B. $\frac{7}{3}$ C. $\frac{7}{2}$ D. $\frac{23}{6}$

8. 在 $\triangle ABC$ 中, $C = 30^\circ$, $\cos A = -\frac{2}{3}$, $AC = \sqrt{15} - 2$, 则 AC 边上的高为 $(\quad)$

- A. $\frac{\sqrt{5}}{2}$ B. 2 C. $\sqrt{5}$ D. $\frac{\sqrt{15}}{2}$

9. 已知 F 为抛物线 $y^2 = 4x$ 的焦点, 过点 F 且斜率为 1 的直线交抛物线于 A, B 两点, 则 $||FA| - |FB||$ 的值等于 $(\quad)$

- A. $8\sqrt{2}$ B. 8 C. $4\sqrt{2}$ D. 4

10. 函数 $y = \cos 2x - \sqrt{3} \sin 2x \left(x \in \left[0, \frac{\pi}{2} \right] \right)$ 的单调递增区间是 $(\quad)$

- A. $\left[0, \frac{\pi}{6} \right]$ B. $\left[0, \frac{\pi}{3} \right]$ C. $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2} \right]$ D. $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2} \right]$

11. 设 $a = 0.82^{0.5}$, $b = \sin 1$, $c = \lg 3$, 则 a, b, c 三数的大小关系是

- A. $a < c < b$ B. $a < b < c$
C. $c < b < a$ D. $b < c < a$

12. 已知 i 为虚数单位, 若复数 z 满足 $\frac{5}{1+2i} = \bar{z} - i$, 则 $z = (\quad)$

- A. $1+i$ B. $-1+i$ C. $1-2i$ D. $1+2i$

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 在编号为 1, 2, 3, 4, 5 且大小和形状均相同的五张卡片中, 一次随机抽取其中的三张, 则抽取的三张卡片编号之和是偶数的概率为_____.

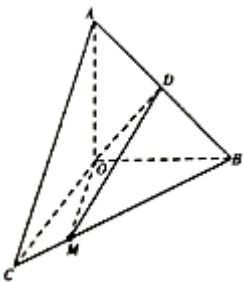
14. 正方形 $ABCD$ 的边长为 2, 圆 O 内切于正方形 $ABCD$, MN 为圆 O 的一条动直径, 点 P 为正方形 $ABCD$ 边界上任一点, 则 $\overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{PN}$ 的取值范围是_____.

15. 已知点 $A(0, -1)$ 是抛物线 $x^2 = 2py$ 的准线上一点, F 为抛物线的焦点, P 为抛物线上的点, 且 $|PF| = m|PA|$, 若双曲线 C 中心在原点, F 是它的一个焦点, 且过 P 点, 当 m 取最小值时, 双曲线 C 的离心率为_____.

16. 设 S_n 是等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项的和, S_3, S_9, S_6 成等差数列, 则 $\frac{a_2 + a_5}{a_8}$ 的值为_____.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12 分) 如图, 在直角 $\triangle AOB$ 中, $OA = OB = 2$, $\triangle AOC$ 通过 $\triangle AOB$ 以直线 OA 为轴顺时针旋转 120° 得到 ($\angle BOC = 120^\circ$). 点 D 为斜边 AB 上一点. 点 M 为线段 BC 上一点, 且 $MB = \frac{4\sqrt{3}}{3}$.



- (1) 证明: $MO \perp$ 平面 AOB ;
- (2) 当直线 MD 与平面 AOB 所成的角取最大值时, 求二面角 $B - CD - O$ 的正弦值.

18. (12 分) 某中学准备组建“文科”兴趣特长社团, 由课外活动小组对高一学生文科、理科进行了问卷调查, 问卷共 100 道题, 每题 1 分, 总分 100 分, 该课外活动小组随机抽取了 200 名学生的问卷成绩 (单位: 分) 进行统计, 将数据按照 $[0, 20)$, $[20, 40)$, $[40, 60)$, $[60, 80)$, $[80, 100]$ 分成 5 组, 绘制的频率分布直方图如图所示, 若将不低于 60 分的称为“文科方向”学生, 低于 60 分的称为“理科方向”学生.



- (1) 根据已知条件完成下面 2×2 列联表, 并据此判断是否有 99% 的把握认为是否为“文科方向”与性别有关?
- (2) 将频率视为概率, 现在从该校高一学生中用随机抽样的方法每次抽取 1 人, 共抽取 3 次, 记被抽取的 3 人中“文科方向”的人数为 ξ , 若每次抽取的结果是相互独立的, 求 ξ 的分布列、期望 $E(\xi)$ 和方差 $D(\xi)$.

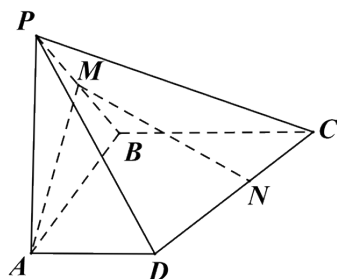
参考公式: $K^2 = \frac{n(ad - bc)^2}{(a + b)(c + d)(a + c)(b + d)}$, 其中 $n = a + b + c + d$.

参考临界值:

$P(K^2 \geq k_0)$	0.10	0.05	0.025	0.010	0.005	0.001
-------------------	------	------	-------	-------	-------	-------

k_0	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879	10.828
-------	-------	-------	-------	-------	-------	--------

19. (12分) 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 侧棱 $PA \perp$ 底面 $ABCD$, $AD \parallel BC$, $\angle ABC = 90^\circ$, $AD = 1$, $PA = AB = BC = 2$, M 是棱 PB 中点.



- (1) 已知点 E 在棱 BC 上, 且平面 $AME \parallel$ 平面 PCD , 试确定点 E 的位置并说明理由;
- (2) 设点 N 是线段 CD 上的动点, 当点 N 在何处时, 直线 MN 与平面 PAB 所成角最大? 并求最大角的正弦值.

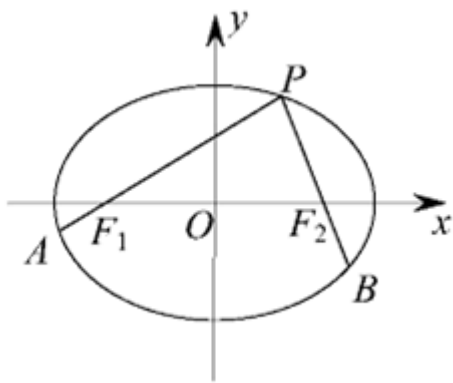
20. (12分) 已知 $f(x) = x - \frac{1}{2}(\ln x)^2 - k \ln x - 1$ ($k \in \mathbf{R}$).

- (1) 若 $f(x)$ 是 $(0, +\infty)$ 上的增函数, 求 k 的取值范围;
- (2) 若函数 $f(x)$ 有两个极值点, 判断函数 $f(x)$ 零点的个数.

21. (12分) 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的短轴长为 $2\sqrt{3}$, 左右焦点分别为 F_1, F_2 , 点 B 是椭圆上位于第一象限的任一点, 且当 $\overrightarrow{BF_2} \cdot \overrightarrow{F_1F_2} = 0$ 时, $|\overrightarrow{BF_2}| = \frac{3}{2}$.

- (1) 求椭圆 C 的标准方程;
- (2) 若椭圆 C 上点 A 与点 B 关于原点 O 对称, 过点 B 作 BD 垂直于 x 轴, 垂足为 D , 连接 AD 并延长交 C 于另一点 M , 交 y 轴于点 N .
 - (i) 求 $\triangle ODN$ 面积最大值;
 - (ii) 证明: 直线 AB 与 BM 斜率之积为定值.

22. (10分) 设椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的左右焦点分别为 F_1, F_2 , 离心率是 e , 动点 $P(x_0, y_0)$ 在椭圆 C 上运动, 当 $PF_2 \perp x$ 轴时, $x_0 = 1, y_0 = e$.



(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) 延长 PF_1, PF_2 分别交椭圆于点 A, B (A, B 不重合). 设 $\overrightarrow{AF_1} = \lambda \overrightarrow{F_1P}, \overrightarrow{BF_2} = \mu \overrightarrow{F_2P}$, 求 $\lambda + \mu$ 的最小值.

参考答案

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

1. C

【解析】

先化简集合 A, B, 结合并集计算方法, 求解, 即可.

【详解】

解得集合 $A = \{x | (x-2)(x+1) \leq 0\} = \{x | -1 \leq x \leq 2\}$, $B = \{x | x < 1\}$

所以 $A \cup B = \{x | x \leq 2\}$, 故选 C.

【点睛】

本道题考查了集合的运算, 考查了一元二次不等式解法, 关键化简集合 A, B, 难度较小.

2. A

【解析】

由 $x \in \left[0, \frac{5\pi}{12}\right]$ 计算出 $2x + \frac{\pi}{3}$ 的取值范围, 利用正弦函数的基本性质可求得函数 $y = f(x)$ 的值域.

【详解】

$\because x \in \left[0, \frac{5\pi}{12}\right], \therefore 2x + \frac{\pi}{3} \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{7\pi}{6}\right], \therefore -\frac{1}{2} \leq \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) \leq 1,$

因此, 函数 $f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$ $\left(0 \leq x \leq \frac{5\pi}{12}\right)$ 的值域为 $\left[-\frac{1}{2}, 1\right]$.

故选: A.

【点睛】

本题考查正弦型函数在区间上的值域的求解, 解答的关键就是求出对象角的取值范围, 考查计算能力, 属于基础题.

3. A

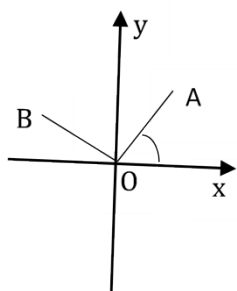
【解析】

设直线 OA 与 x 轴正半轴所成的最小正角为 β , 由任意角的三角函数的定义可以求得 $\sin \beta$ 的值, 依题有

$OA \perp OB$, 则 $\alpha = \beta + 90^\circ$, 利用诱导公式即可得到答案.

【详解】

如图, 设直线 OA 与 x 轴正半轴所成的最小正角为 β



因为点 $A(1, 2)$ 在角 β 的终边上, 所以 $\sin \beta = \frac{2}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

依题有 $OA \perp OB$, 则 $\alpha = \beta + 90^\circ$,

所以 $\cos \alpha = \cos(\beta + 90^\circ) = -\sin \beta = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$,

故选: A

【点睛】

本题考查三角函数的定义及诱导公式, 属于基础题.

4. B

【解析】

首先由 $x \in [0, \pi]$, 可得 $\omega x - \frac{\pi}{3}$ 的范围, 结合函数 $f(x)$ 的值域和正弦函数的图像, 可求的关于实数 ω 的不等式, 解不等式即可求得范围.

【详解】

因为 $x \in [0, \pi]$, 所以 $\omega x - \frac{\pi}{3} \in \left[-\frac{\pi}{3}, \omega\pi - \frac{\pi}{3}\right]$, 若值域为 $\left[-\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right]$,

所以只需 $\frac{\pi}{2} \leq \omega\pi - \frac{\pi}{3} \leq \frac{4\pi}{3}$, $\therefore \frac{5}{6} \leq \omega \leq \frac{5}{3}$.

故选: B

【点睛】

本题主要考查三角函数的值域, 熟悉正弦函数的单调性和特殊角的三角函数值是解题的关键, 侧重考查数学抽象和数学运算的核心素养.

5. D

【解析】

直接利用复数的模的求法的运算法则求解即可.

【详解】

$$(1-2i)z = 5i \quad (\text{i 是虚数单位})$$

$$\text{可得 } |(1-2i)| |z| = |5i|$$

$$\text{解得 } |z| = \sqrt{5}$$

本题正确选项: D

【点睛】

本题考查复数的模的运算法则的应用, 复数的模的求法, 考查计算能力.

6. C

【解析】

由基本音的谐波的定义可得 $f_1 = nf_2$ ($n \in \mathbf{N}^*$), 利用 $f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$ 可得 $\omega_1 = n\omega_2$ ($n \in \mathbf{N}^*$), 即可判断选项.

【详解】

由题, 所有泛音的频率都是基本音频率的整数倍, 称为基本音的谐波,

由 $f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$, 可知若 $f_1 = nf_2$ ($n \in \mathbf{N}^*$), 则必有 $\omega_1 = n\omega_2$ ($n \in \mathbf{N}^*$),

故选: C

【点睛】

本题考查三角函数的周期与频率, 考查理解分析能力.

7. C

【解析】

利用分布列求出 a , 求出期望 $E(X)$, 再利用期望的性质可求得结果.

【详解】

由分布列的性质可得 $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + a = 1$, 得 $a = \frac{1}{6}$, 所以, $E(X) = 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{3} + 3 \times \frac{1}{6} = \frac{5}{3}$,

因此, $E(2X + a) = E\left(2X + \frac{1}{6}\right) = 2E(X) + \frac{1}{6} = 2 \times \frac{5}{3} + \frac{1}{6} = \frac{7}{2}$.

故选: C.

【点睛】

本题考查离散型随机变量的分布列以及期望的求法, 是基本知识的考查.

8. C

【解析】

结合正弦定理、三角形的内角和定理、两角和的正弦公式, 求得 BC 边长, 由此求得 AC 边上的高.

【详解】

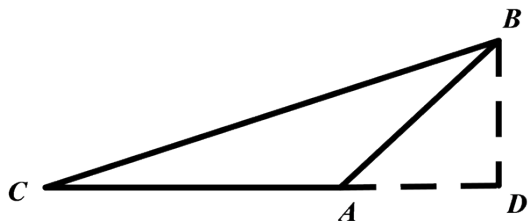
过 B 作 $BD \perp CA$, 交 CA 的延长线于 D . 由于 $\cos A = -\frac{2}{3}$, 所以 A 为钝角, 且 $\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \frac{\sqrt{5}}{3}$, 所以

$\sin \angle CBA = \sin(\pi - \angle CBA) = \sin(A + C) = \sin A \cos C + \cos A \sin C = \frac{\sqrt{5}}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{15} - 2}{6}$. 在三角形

ABC 中, 由正弦定理得 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$, 即 $\frac{BC}{\frac{\sqrt{5}}{3}} = \frac{\sqrt{15} - 2}{\frac{\sqrt{15} - 2}{6}}$, 所以 $BC = 2\sqrt{5}$. 在 $Rt\triangle BCD$ 中有

$BD = BC \sin C = 2\sqrt{5} \times \frac{1}{2} = \sqrt{5}$, 即 AC 边上的高为 $\sqrt{5}$.

故选: C



【点睛】

本小题主要考查正弦定理解三角形, 考查三角形的内角和定理、两角和的正弦公式, 属于中档题.

9. C

【解析】

将直线方程 $y = x - 1$ 代入抛物线方程, 根据根与系数的关系和抛物线的定义即可得出 $|FA| - |FB|$ 的值.

【详解】

F (1, 0), 故直线 AB 的方程为 $y=x-1$, 联立方程组 $\begin{cases} y^2 = 4x \\ y = x-1 \end{cases}$, 可得 $x^2-6x+1=0$,

设 A (x_1 , y_1), B (x_2 , y_2), 由根与系数的关系可知 $x_1+x_2=6$, $x_1x_2=1$.

由抛物线的定义可知: $|FA|=x_1+1$, $|FB|=x_2+1$,

$$\therefore ||FA|-|FB||=|x_1-x_2|=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{36-4}=4\sqrt{2}.$$

故选 C.

【点睛】

本题考查了抛物线的定义, 直线与抛物线的位置关系, 属于中档题.

10. D

【解析】

利用辅助角公式, 化简函数的解析式, 再根据正弦函数的单调性, 并采用整体法, 可得结果.

【详解】

因为 $y = \cos 2x - \sqrt{3} \sin 2x = 2 \sin(\frac{\pi}{6} - 2x) = -2 \sin(2x - \frac{\pi}{6})$, 由 $\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq 2x - \frac{\pi}{6} \leq \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$, 解得

$\frac{\pi}{3} + k\pi \leq x \leq \frac{5\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$, 即函数的增区间为 $[\frac{\pi}{3} + k\pi, \frac{5\pi}{6} + k\pi], k \in \mathbf{Z}$, 所以当 $k=0$ 时, 增区间的一个子集为 $[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}]$.

故选 D.

【点睛】

本题考查了辅助角公式, 考查正弦型函数的单调递增区间, 重点在于把握正弦函数的单调性, 同时对于整体法的应用, 使问题化繁为简, 难度较易.

11. C

【解析】

利用对数函数, 指数函数以及正弦函数的性质和计算公式, 将 a, b, c 与 $\sqrt{\frac{4}{5}}, \frac{1}{2}$ 比较即可.

【详解】

$$\text{由 } a = 0.82^{0.5} > 0.8^{0.5} = \sqrt{\frac{4}{5}},$$

$$\frac{1}{2} < b = \sin 1 < \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{\frac{3}{4}} < \sqrt{\frac{4}{5}},$$

$$c = \lg 3 < \lg \sqrt{10} = \frac{1}{2} \lg 10 = \frac{1}{2},$$

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/426223110105010235>