

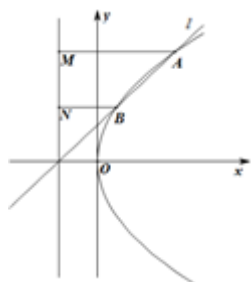
湖南省永州市 2024 年高三 3 月份模拟考试数学试题

考生请注意：

1. 答题前请将考场、试室号、座位号、考生号、姓名写在试卷密封线内，不得在试卷上作任何标记。
2. 第一部分选择题每小题选出答案后，需将答案写在试卷指定的括号内，第二部分非选择题答案写在试卷题目指定的位置上。
3. 考生必须保证答题卡的整洁。考试结束后，请将本试卷和答题卡一并交回。

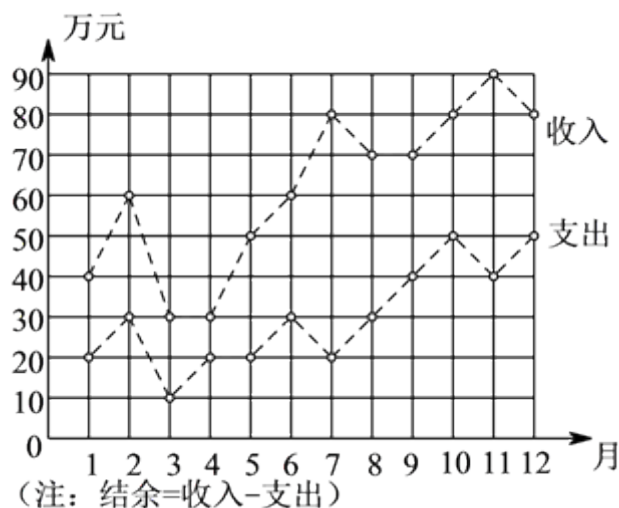
一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 如图，已知直线 $l: y = k(x+1) (k > 0)$ 与抛物线 $C: y^2 = 4x$ 相交于 A, B 两点，且 A, B 两点在抛物线准线上的投影分别是 M, N ，若 $|AM| = 2|BN|$ ，则 k 的值是 ()



- A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{3}$ C. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ D. $2\sqrt{2}$

2. 某工厂一年中各月份的收入、支出情况的统计如图所示，下列说法中错误的是 ()。



- A. 收入最高值与收入最低值的比是 3:1
- B. 结余最高的月份是 7 月份
- C. 1 与 2 月份的收入的变化率与 4 至 5 月份的收入的变化率相同
- D. 前 6 个月的平均收入为 40 万元
3. 已知集合 $M = \{x | -1 \leq x < 5\}$, $N = \{x | |x| < 2\}$ ，则 $M \cap N =$ ()

- A. $\{x|-1 \leq x < 2\}$ B. $\{x|-2 < x < 5\}$ C. $\{x|-1 \leq x < 5\}$ D. $\{x|0 < x < 2\}$

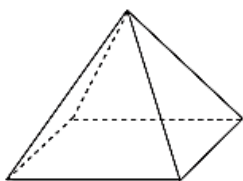
4. 设复数 z 满足 $\frac{z-i}{z+i} = i$, 则 $z =$ ()

- A. 1 B. -1 C. $1-i$ D. $1+i$

5. 将一块边长为 a cm 的正方形薄铁皮按如图 (1) 所示的阴影部分裁下, 然后用余下的四个全等的等腰三角形加工成一个正四棱锥形容器, 将该容器按如图 (2) 放置, 若其正视图为等腰直角三角形, 且该容器的容积为 $72\sqrt{2}\text{cm}^3$, 则 a 的值为 ()



(1)



(2)

- A. 6 B. 8 C. 10 D. 12

6. “ $\sin x = \frac{1}{2}$ ”是“ $x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} (k \in \mathbb{Z})$ ”的 ()

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

7. 设复数 z 满足 $|z| = \frac{z+\bar{z}}{2} + 1$, z 在复平面内对应的点的坐标为 (x, y) 则 ()

- A. $x^2 = 2y + 1$ B. $y^2 = 2x + 1$
C. $x^2 = 2y - 1$ D. $y^2 = 2x - 1$

8. 若函数 $f(x) = \sin 2x$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度得到函数 $g(x)$ 的图象, 若函数 $g(x)$ 在区间 $[0, a]$ 上单调递增, 则 a 的最大值为 ().

- A. $\frac{\pi}{2}$ B. $\frac{\pi}{3}$ C. $\frac{5\pi}{12}$ D. $\frac{7\pi}{12}$

9. 某校 8 位学生的本次月考成绩恰好都比上一次的月考成绩高出 50 分, 则以该 8 位学生这两次的月考成绩各自组成样本, 则这两个样本不变的数字特征是 ()

- A. 方差 B. 中位数 C. 众数 D. 平均数

10. 已知 $\cos \alpha = -\frac{1}{3}$, $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, 则 $\sin(\pi + \alpha) =$ ()

- A. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ B. $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$ C. $\pm \frac{2\sqrt{2}}{3}$ D. $\frac{1}{3}$

11. 若复数 $z_1 = 2 + i$, $z_2 = \cos \alpha + i \sin \alpha (\alpha \in \mathbb{R})$, 其中 i 是虚数单位, 则 $|z_1 - z_2|$ 的最大值为 ()

- A. $\sqrt{5}-1$ B. $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ C. $\sqrt{5}+1$ D. $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$

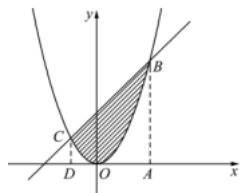
12. 若集合 $A = \{x | x(x-2) > 0\}$, $B = \{x | x-1 > 0\}$, 则 $A \cap B =$

- A. $\{x | x > 1 \text{ 或 } x < 0\}$ B. $\{x | 1 < x < 2\}$ C. $\{x | x > 2\}$ D. $\{x | x > 1\}$

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 3x^2 + \frac{a}{x} + 1, & x < 0 \\ 2 \ln x - 6x, & x > 0 \end{cases}$, 若关于 x 的方程 $f(x) + f(-x) = 0$ 恰有四个不同的解，则实数 a 的取值范围是_____.

14. 如图梯形 $ABCD$ 为直角梯形, $AB \perp AD, CD \perp AD$, 图中阴影部分为曲线 $y = x^2$ 与直线 $x = x+2$ 围成的平面图形, 向直角梯形 $ABCD$ 内投入一质点, 质点落入阴影部分的概率是_____



15. 已知 P 为椭圆 $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1$ 上的一个动点, $A(-2, 1)$, $B(2, -1)$, 设直线 AP 和 BP 分别与直线 $x = 4$ 交于 M , N 两点, 若 $\triangle ABP$ 与 $\triangle MNP$ 的面积相等, 则线段 OP 的长为_____.

16. 现有一块边长为 a 的正方形铁片, 铁片的四角截去四个边长均为 x 的小正方形, 然后做成一个无盖方盒, 该方盒容积的最大值是_____.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12 分) 以直角坐标系 xOy 的原点为极点, x 轴的非负半轴为极轴, 且两坐标系取相同的长度单位. 已知曲线 C 的

参数方程: $\begin{cases} x = 4 + 3 \cos \theta \\ y = 3 + 3 \sin \theta \end{cases}$ (θ 为参数), 直线 l 的极坐标方程: $\theta = \alpha$ ($\alpha \in [0, \pi), \rho \in \mathbb{R}$)

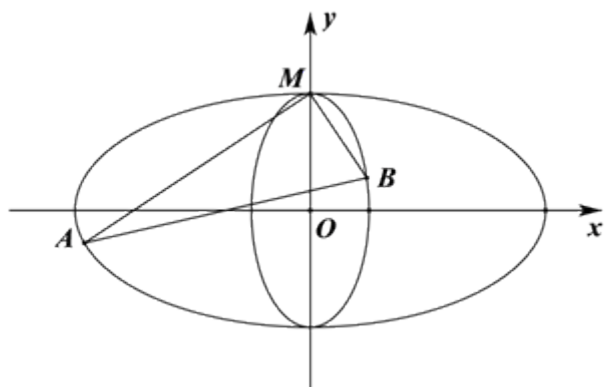
(1) 求曲线 C 的极坐标方程;

(2) 若直线 l 与曲线 C 交于 A 、 B 两点, 求 $|OA| + |OB|$ 的最大值.

18. (12 分) 如图, 焦点在 x 轴上的椭圆 C_1 与焦点在 y 轴上的椭圆 C_2 都过点 $M(0, 1)$, 中心都在坐标原点, 且椭圆 C_1 与 C_2 的离心率均为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

(I) 求椭圆 C_1 与椭圆 C_2 的标准方程;

(Ⅱ) 过点 M 的互相垂直的两直线分别与 C_1 , C_2 交于点 A , B (点 A , B 不同于点 M), 当 $\triangle MAB$ 的面积取最大值时, 求两直线 MA , MB 斜率的比值.



19. (12 分) $\triangle ABC$ 的内角 A , B , C 的对边分别为 a , b , c , 已知 $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{a^2}{4 \sin A}$.

(1) 求 $\sin B \sin C$;

(2) 若 $10 \cos B \cos C = -1$, $a = \sqrt{2}$, 求 $\triangle ABC$ 的周长.

20. (12 分) 在 $\triangle ABC$ 中, M 为 BC 边上一点, $\angle BAM = 45^\circ$, $\cos \angle AMC = \frac{\sqrt{5}}{5}$.

(1) 求 $\sin B$;

(2) 若 $MC = \frac{1}{2} BM$, $AC = 4$, 求 MC .

21. (12 分) 设函数 $f(x) = e^x - \frac{1}{2}x^2 - ax$, $a \in \mathbb{R}$.

(Ⅰ) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(Ⅱ) $a \leq 1$ 时, 若 $x_1 \neq x_2$, $f(x_1) + f(x_2) = 2$, 求证: $x_1 + x_2 < 0$.

22. (10 分) 已知函数 $f(x) = (x-a)^2 - 2x \ln x$, 其导函数为 $f'(x)$,

(1) 若 $a = 0$, 求不等式 $f(x) > 1$ 的解集;

(2) 证明: 对任意的 $0 < s < t < 2$, 恒有 $\frac{f'(s) - f'(t)}{s - t} < 1$.

参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1、C

【解析】

直线 $y = k(x+1) (k > 0)$ 恒过定点 $P(-1, 0)$ ，由此推导出 $|OB| = \frac{1}{2}|AF|$ ，由此能求出点 B 的坐标，从而能求出 k 的值。

【详解】

设抛物线 $C: y^2 = 4x$ 的准线为 $l: x = -1$ ，

直线 $y = k(x+1) (k > 0)$ 恒过定点 $P(-1, 0)$ ，

如图过 A 、 B 分别作 $AM \perp l$ 于 M ， $BN \perp l$ 于 N ，

由 $|AM| = 2|BN|$ ，则 $|FA| = 2|FB|$ ，

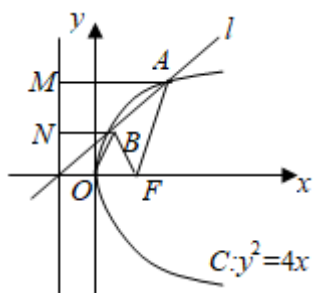
点 B 为 AP 的中点、连接 OB ，则 $|OB| = \frac{1}{2}|AF|$ ，

$\therefore |OB| = |BF|$ ，点 B 的横坐标为 $\frac{1}{2}$ ，

$\therefore$ 点 B 的坐标为 $B\left(\frac{1}{2}, \sqrt{2}\right)$ ，把 $B\left(\frac{1}{2}, \sqrt{2}\right)$ 代入直线 $y = k(x+1) (k > 0)$ ，

解得 $k = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ ，

故选：C.



【点睛】

本题考查直线与圆锥曲线中参数的求法，考查抛物线的性质，是中档题，解题时要注意等价转化思想的合理运用，属于中档题.

2、D

【解析】

由图可知，收入最高值为90万元，收入最低值为30万元，其比是3:1，故A项正确；

结余最高为7月份，为 $80 - 20 = 60$ ，故B项正确；

1至2月份的收入的变化率为4至5月份的收入的变化率相同，故C项正确；

前6个月的平均收入为 $\frac{1}{6}(40 + 60 + 30 + 30 + 50 + 60) = 45$ 万元，故D项错误.

综上，故选D.

3、A

【解析】

考虑既属于 M 又属于 N 的集合，即得.

【详解】

$$Q\ N = \{x \mid -2 < x < 2\}, \therefore M \cap N = \{x \mid -1 \leq x < 2\}.$$

故选：A

【点睛】

本题考查集合的交运算，属于基础题.

4、B

【解析】

利用复数的四则运算即可求解.

【详解】

$$\text{由 } \frac{z-i}{z+i} = i \Rightarrow z-i = i(z+i) \Rightarrow (1-i)z = i-1 \Rightarrow z = -1.$$

故选：B

【点睛】

本题考查了复数的四则运算，需掌握复数的运算法则，属于基础题.

5、D

【解析】

推导出 $PM + PN = a$ ，且 $PM = PN$ ， $MN = \frac{\sqrt{2}}{2}a$ ， $PM = \frac{a}{2}$ ，设 MN 中点为 O ，则 $PO \perp$ 平面 $ABCD$ ，由此能表

示出该容器的体积，从而求出参数的值.

【详解】

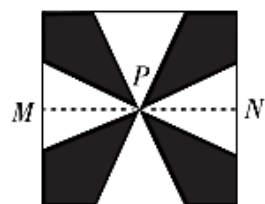
解：如图（4）， $\triangle PMN$ 为该四棱锥的正视图，由图（3）可知， $PM + PN = a$ ，且 $PM = PN = \frac{a}{2}$ ，由 $\triangle PMN$

为等腰直角三角形可知，

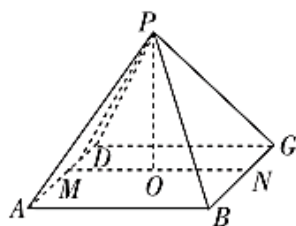
$$MN = \frac{\sqrt{2}}{2}a, \text{ 设 } MN \text{ 中点为 } O, \text{ 则 } PO \perp \text{平面 } ABCD, \therefore PO = \frac{1}{2}MN = \frac{\sqrt{2}}{4}a,$$

$$\therefore V_{P-ABCD} = \frac{1}{3} \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2}a \right)^2 \times \frac{\sqrt{2}}{4}a = \frac{\sqrt{2}}{24}a^3 = 72\sqrt{2}, \text{ 解得 } a = 12.$$

故选：D



(3)



(4)

【点睛】

本题考查三视图和锥体的体积计算公式的应用，属于中档题.

6、B

【解析】

$$\sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} (k \in \mathbb{Z}) \text{ 或 } x = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} (k \in \mathbb{Z}), \text{ 从而明确充分性与必要性.}$$

【详解】

,

$$\text{由 } \sin x = \frac{1}{2} \text{ 可得: } x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} (k \in \mathbb{Z}) \text{ 或 } x = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} (k \in \mathbb{Z}),$$

$$\text{即 } x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} (k \in \mathbb{Z}) \text{ 能推出 } \sin x = \frac{1}{2},$$

$$\text{但 } \sin x = \frac{1}{2} \text{ 推不出 } x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} (k \in \mathbb{Z})$$

$$\therefore \sin x = \frac{1}{2} \text{ 是 } x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} (k \in \mathbb{Z}) \text{ 的必要不充分条件}$$

故选 B

【点睛】

本题考查充分性与必要性，简单三角方程的解法，属于基础题.

7、B

【解析】

根据共轭复数定义及复数模的求法，代入化简即可求解.

【详解】

z 在复平面内对应的点的坐标为 (x, y) ，则 $z = x + yi$ ，

$$\bar{z} = x - yi,$$

$$\therefore |z| = \frac{z + \bar{z}}{2} + 1,$$

$$\text{代入可得 } \sqrt{x^2 + y^2} = x + 1,$$

$$\text{解得 } y^2 = 2x + 1.$$

故选：B.

【点睛】

本题考查复数对应点坐标的几何意义，复数模的求法及共轭复数的概念，属于基础题.

8、C

【解析】

由题意利用函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 的图象变换规律，正弦函数的单调性，求出 a 的最大值.

【详解】

解：把函数 $f(x) = \sin 2x$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度得到函数 $g(x) = \sin(2x - \frac{\pi}{3})$ 的图象，

若函数 $g(x)$ 在区间 $[0, a]$ 上单调递增，

$$\text{在区间 } [0, a] \text{ 上, } 2x - \frac{\pi}{3} \in [-\frac{\pi}{3}, 2a - \frac{\pi}{3}],$$

$$\text{则当 } a \text{ 最大时, } 2a - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2}, \text{ 求得 } a = \frac{5\pi}{12},$$

故选：C.

【点睛】

本题主要考查函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 的图象变换规律，正弦函数的单调性，属于基础题.

9、A

【解析】

通过方差公式分析可知方差没有改变，中位数、众数和平均数都发生了改变.

【详解】

由题可知，中位数和众数、平均数都有变化.

本次和上次的月考成绩相比，成绩和平均数都增加了 50，所以 $(x_n - \bar{x})^2$ 没有改变，

$$\text{根据方差公式 } S^2 = \frac{1}{8}[(x_1 - \bar{x})^2 + \dots + (x_8 - \bar{x})^2] \text{ 可知方差不变.}$$

故选：A

【点睛】

本题主要考查样本的数字特征，意在考查学生对这些知识的理解掌握水平.

10、B

【解析】

利用诱导公式以及同角三角函数基本关系式化简求解即可.

【详解】

$$\text{Q } \cos \alpha = -\frac{1}{3}, \quad \alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$$

$$\therefore \sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \frac{1}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\therefore \sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

本题正确选项：B

【点睛】

本题考查诱导公式的应用，同角三角函数基本关系式的应用，考查计算能力.

11、C

【解析】

由复数的几何意义可得 $|z_1 - z_2|$ 表示复数 $z_1 = 2 + i$ ， $z_2 = \cos \alpha + i \sin \alpha$ 对应的两点间的距离，由两点间距离公式即可求解.

【详解】

由复数的几何意义可得，复数 $z_1 = 2 + i$ 对应的点为 $(2, 1)$ ，复数 $z_2 = \cos \alpha + i \sin \alpha$ 对应的点为 $(\cos \alpha, \sin \alpha)$ ，所以

$$|z_1 - z_2| = \sqrt{(2 - \cos \alpha)^2 + (1 - \sin \alpha)^2} = \sqrt{1 - 2\sin \alpha + 4 - 4\cos \alpha + 1} = \sqrt{6 - 2\sqrt{5}\sin(\alpha + \varphi)} \leq \sqrt{6 + 2\sqrt{5}} = \sqrt{5} + 1, \quad \text{其中 } \tan \varphi = 2,$$

故选 C

【点睛】

本题主要考查复数的几何意义，由复数的几何意义，将 $|z_1 - z_2|$ 转化为两复数所对应点的距离求值即可，属于基础题型.

12、C

【解析】

解一元二次不等式得 $A = \{x | x > 2 \text{ 或 } x < 0\}$ ，利用集合的交集运算求得 $A \cap B = \{x | x > 2\}$.

【详解】

因为 $A = \{x | x > 2 \text{ 或 } x < 0\}$, $B = \{x | x > 1\}$, 所以 $A \cap B = \{x | x > 2\}$, 故选 C.

【点睛】

本题考查集合的交运算, 属于容易题.

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13、 $(-2, 0)$

【解析】

设 $g(x) = f(x) + f(-x)$, 判断 $g(x)$ 为偶函数, 考虑 $x > 0$ 时, $g(x)$ 的解析式和零点个数, 利用导数分析函数的单调性, 作函数大致图象, 即可得到 a 的范围.

【详解】

设 $g(x) = f(x) + f(-x)$,

则 $g(x)$ 在 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ 是偶函数,

当 $x > 0$ 时, $g(x) = 2 \ln x - 6x + 3x^2 - \frac{a}{x} + 1$,

由 $g(x) = 0$ 得 $a = 2x \ln x - 6x^2 + 3x^3 + x$,

记 $h(x) = 2x \ln x - 6x^2 + 3x^3 + x$,

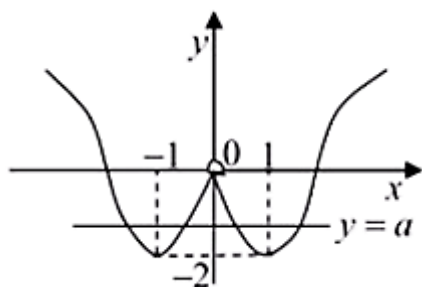
$h'(x) = 2 \ln x - 12x + 9x^2 + 3$, $h''(x) = \frac{2}{x} + 18x - 12 \geq 0$,

故函数 $h'(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 增, 而 $h'(1) = 0$,

所以 $h(x)$ 在 $(0, 1)$ 减, 在 $(1, +\infty)$ 增, $h(1) = -2$,

当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $h(x) \rightarrow +\infty$, 当 $x \rightarrow 0^+$ 时, $h(x) \rightarrow 0^-$,

因此 $g(x)$ 的图象为



因此实数 a 的取值范围是 $(-2, 0)$.

【点睛】

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/427012120032006101>