

高三数学限时测试（答案在最后）

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知复数 z 在复平面内对应的点为 $(-1, 1)$, $\bar{z}$ 是 z 的共轭复数，则 $\frac{1}{\bar{z}} =$ ()

A. $-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$

B. $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$

C. $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$

D. $-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$

【答案】A

【解析】

【分析】由复数的几何意义得出 z ，然后得出共轭复数，再由复数除法法则计算。

【详解】由题意 $z = -1 + i$ ，则 $\bar{z} = -1 - i$ ， $\frac{1}{\bar{z}} = \frac{1}{-1-i} = \frac{-1+i}{(-1-i)(-1+i)} = \frac{-1+i}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$ ，

故选：A.

2. 若向量 $\vec{a} = (m, -3)$, $\vec{b} = (3, 1)$ ，则“ $m \geq -9$ ”是“向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 的夹角为锐角”的 ()

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

【答案】B

【解析】

【分析】先根据向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 的夹角为锐角求出 m 的取值范围，再判断属于哪种关系。

【详解】向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 的夹角为锐角，则 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 3m - 3 > 0$ ，且向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 不共线，

当向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 共线时， $m = -9$ ，

则 $m > -9$ ，

若 $m > -9$ ，则 $m \geq -9$ 成立，反之不成立，

故“ $m \geq -9$ ”是“向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 的夹角为锐角”的必要不充分条件，

故选：B.

3. 已知各项均为正数的等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，若 $S_3 = 14$ ， $a_3 = 8$ ，则 $\frac{a_7 + a_{11}}{a_5 + a_9} =$ ()

A. $\frac{4}{9}$

B. 4

C. 4 或 $\frac{4}{9}$

D. 2 或 $-\frac{2}{3}$

【答案】B

【解析】

【分析】设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 $q (q > 0)$ ，根据题意可得出关于 a_1 、 q 的方程组，解出 q 的值，即可得出 $\frac{a_7 + a_{11}}{a_5 + a_9}$ 的值.

【详解】设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 $q (q > 0)$ ，则
$$\begin{cases} S_3 = a_1(1 + q + q^2) = 14 \\ a_3 = a_1 q^2 = 8 \end{cases},$$

上述两个等式相除得 $\frac{1 + q + q^2}{q^2} = \frac{7}{4}$ ，整理可得 $3q^2 - 4q - 4 = 0$ ，

因为 $q > 0$ ，解得 $q = 2$ ，故 $\frac{a_7 + a_{11}}{a_5 + a_9} = \frac{a_1 q^6(1 + q^4)}{a_1 q^4(1 + q^4)} = q^2 = 4$.

故选：B.

4. 已知抛物线 $C: y^2 = 2px$ 的焦点为 $F(1, 0)$ ，准线为 l ， P 为 C 上一点， PQ 垂直于点 Q ， $\triangle PQF$ 为等边三角形，过 PQ 的中点 M 作直线 $MR \parallel QF$ ，交 x 轴于 R 点，则直线 MR 的方程为 ()

A. $\sqrt{3}x + y - 2\sqrt{3} = 0$

B. $\sqrt{3}x + y - 3\sqrt{3} = 0$

C. $x + \sqrt{3}y - 2\sqrt{3} = 0$

D. $x + \sqrt{3}y - 3\sqrt{3} = 0$

【答案】B

【解析】

【分析】设直线与 x 轴交于点 H ，连接 MF, QF ，说明 $QHMF$ 为矩形，得 $M(1, 2\sqrt{3})$ ，求得 MR 的斜率为 $-\sqrt{3}$ ，直线方程可求.

【详解】设直线与 x 轴交于点 H ，连接 MF, QF ，

因为焦点 $F(1, 0)$ ，所以抛物线的方程为 $y^2 = 4x$ ，准线为 $x = -1$ ，

则 $|FH| = 2, |PF| = |PQ|$ ，因为 $\triangle PQF$ 是等边三角形， PQ 的中点为 M ，

则 $MF \perp PQ, MF \perp x$ 轴，所以准线为 $l \parallel MF$ ， $QHMF$ 为矩形，则 $|FH| = |MQ| = 2$ ，

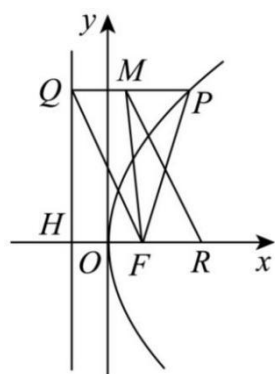
故 $\triangle PQF$ 是边长为 4 的等边三角形,

易知 $\angle PFQ = \angle PFR = \angle QFH = 60^\circ$, $|MF| = 2\sqrt{3}$, 则 $M(1, 2\sqrt{3})$.

因为 $MR \parallel QF$, 所以直线 MR 的斜率为 $-\sqrt{3}$,

直线 MR 的方程为 $\sqrt{3}x + y - 3\sqrt{3} = 0$.

故选: B



5. 将函数 $f(x) = A\sin(\omega x + \varphi) + B$, ($A > 0, \omega > 0, \varphi \in (0, 2\pi)$) 的图像按以下顺序进行变换: ①向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度; ②横坐标变为原来的 $\frac{1}{2}$, 纵坐标不变; ③向上平移 1 个单位长度; ④纵坐标变为原来的 3 倍. 可得到 $g(x) = \sin x$ 的图像, 则 $f(x) =$ ()

A. $\frac{1}{3}\sin\left(\frac{1}{2}x + \frac{23\pi}{12}\right) - 1$

B. $\frac{1}{3}\sin\left(2x + \frac{23\pi}{12}\right) + 1$

C. $3\sin\left(\frac{1}{2}x + \frac{23\pi}{24}\right) + 1$

D. $3\sin\left(\frac{1}{2}x + \frac{23\pi}{12}\right) - 1$

【答案】A

【解析】

【分析】根据三角函数的平移变换求解即可.

【详解】函数 $f(x) = A\sin(\omega x + \varphi) + B$ 向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度,

$$\text{得到 } y = A\sin\left[\omega\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + \varphi\right] + B = A\sin\left(\omega x + \frac{\omega\pi}{6} + \varphi\right) + B,$$

$$\text{横坐标变为原来的 } \frac{1}{2}, \text{ 纵坐标不变, 得到 } y = A\sin\left(2\omega x + \frac{\omega\pi}{6} + \varphi\right) + B,$$

向上平移 1 个单位长度, 得到 $y = A \sin \left(2\omega x + \frac{\omega\pi}{6} + \varphi \right) + B + 1$,

纵坐标变为原来的 3 倍, 得到 $y = 3 \left[A \sin \left(2\omega x + \frac{\omega\pi}{6} + \varphi \right) + B + 1 \right] = \sin x$,

$$\text{则} \begin{cases} 3A = 1 \\ B + 1 = 0 \\ 2\omega = 1 \\ \frac{\omega\pi}{6} + \varphi = 2k\pi (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}, \text{又 } \varphi \in (0, 2\pi),$$

$$\text{解得 } A = \frac{1}{3}, B = -1, \omega = \frac{1}{2}, \varphi = \frac{23\pi}{12},$$

$$\text{则 } f(x) = \frac{1}{3} \sin \left(\frac{1}{2}x + \frac{23\pi}{12} \right) - 1.$$

故选: A.

6. 已知菱形 $ABCD$, $\angle DAB = \frac{\pi}{3}$, 将 $\triangle DAC$ 沿对角线 AC 折起, 使以 A, B, C, D 四点为顶点的三棱锥体积最大, 则异面直线 AB 与 CD 所成角的余弦值为 ()

- A. $\frac{3}{5}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ C. $\frac{3}{4}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{4}$

【答案】C

【解析】

【分析】当三棱锥 $D-ABC$ 的体积最大时, 平面 $ACD \perp$ 平面 ABC , 以 E 为原点, $\overrightarrow{EB}, \overrightarrow{EC}, \overrightarrow{ED}$ 分别为 x, y, z 轴的正方向建立空间直角坐标系, 求出向量 $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}$ 的坐标, 根据向量夹角的坐标表示可解.

【详解】记 AC 的中点分别为 E , 因为 $AD = CD$, 所以 $DE \perp AC$,
同理, $BE \perp AC$, 记 $AB = 2a$,

$$\text{因为 } \angle DAB = \frac{\pi}{3}, \text{ 所以 } \angle DAC = \angle BAC = \frac{\pi}{6},$$

$$\text{所以 } BE = DE = a, \quad AE = CE = \sqrt{3}a,$$

易知, 当平面 $ACD \perp$ 平面 ABC 时, 三棱锥 $D-ABC$ 的体积最大, 此时 $\angle BED = \frac{\pi}{2}$,

以 E 为原点, $\overrightarrow{EB}, \overrightarrow{EC}, \overrightarrow{ED}$ 分别为 x, y, z 轴的正方向建立空间直角坐标系,

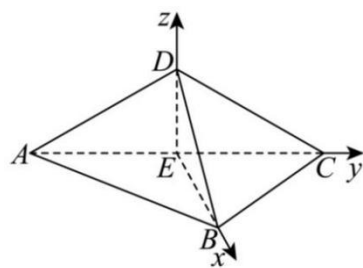
则 $A(0, -\sqrt{3}a, 0), B(a, 0, 0), C(0, \sqrt{3}a, 0), D(0, 0, a)$

所以 $\overrightarrow{AB} = (a, \sqrt{3}a, 0), \overrightarrow{CD} = (0, -\sqrt{3}a, a)$,

所以 $\cos \langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD} \rangle = \frac{-3a^2}{2a \times 2a} = -\frac{3}{4}$,

所以异面直线 AB 与 CD 所成角的余弦值为 $\frac{3}{4}$.

故选: C



7. 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $\frac{\sin A}{\sin B} = n \sin C, \frac{\cos A}{\cos B} = n \cos C$. 若 $\tan \left(A + \frac{\pi}{4} \right) = -3$, 则实数 $n =$ ()

A. 不存在

B. 2

C. 3

D. 4

【答案】A

【解析】

【分析】由 $\tan \left(A + \frac{\pi}{4} \right) = -3$ 可得 $\tan A = 2$, 进而得到 $\tan A = \tan B \cdot \tan C = 2$, 借助三角形内角和与两

角和的正切公式可得 $\tan B + \tan C = 2$, 设 $\tan B = t$, 有 $t^2 - 2t + 2 = 0$, 可得该方程无解, 故不存在这样的 n .

【详解】由 $\tan \left(A + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{1 + \tan A}{1 - \tan A} = -3$, 即 $\tan A = 2$, 则 $\cos A \neq 0$,

由 $\frac{\sin A}{\sin B} = n \sin C, \frac{\cos A}{\cos B} = n \cos C$, 知 $\cos C \neq 0$,

则 $\frac{\tan A}{\tan B} = \tan C$, 则 $\tan A = \tan B \cdot \tan C = 2$,

又 $\tan A = \tan(\pi - B - C) = -\tan(B + C) = -\frac{\tan B + \tan C}{1 - \tan B \cdot \tan C} = \tan B + \tan C$,

故 $\tan B + \tan C = 2$, 设 $\tan B = t$, 则 $\tan C = 2 - t$,

有 $t(2 - t) = 2$, 即 $t^2 - 2t + 2 = 0$, $\Delta = 4 - 8 = -4 < 0$,

即该方程无解，故不存在这样三角形，即 n 无解.

故选：A.

8. 若 $\frac{e^{x-e}}{a} \geq e + \ln ax$ 在 $x \in (0, +\infty)$ 上恒成立，则 a 的最大值为 ()

A. $\frac{e^{2-e}}{2}$

B. $2e^{\frac{1}{2-e}}$

C. e^{1-e}

D. $e^{1+\frac{1}{e}}$

【答案】C

【解析】

【分析】易知 $a > 0$ ，原式可变形为 $f(x) = e^{x-e} - ae - a \ln ax \geq 0, (x > 0)$ ，结合隐零点的解题思路，求出 $f(x)_{\min}$ ，由 $f(x)_{\min} \geq 0$ 可得 $h(t) = \frac{1}{t} - 2 \ln t - t \geq 0$ ，结合函数的单调性解得 $0 < t \leq 1$ ，即可求出 a 的取值范围即可.

【详解】由题意知， $ax > 0$ ，由 $x > 0$ ，得 $a > 0$.

原式可化为 $e^{x-e} - ae - a \ln ax \geq 0$ ，

设 $f(x) = e^{x-e} - ae - a \ln ax (x > 0)$ ，则 $f'(x) = e^{x-e} - \frac{a}{x}$ ，

又函数 $y = e^{x-e}, y = -\frac{a}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增，所以函数 $y = f'(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增，

则当 $x \rightarrow 0$ 时， $f'(x) \rightarrow -\infty$ ，当 $x \rightarrow +\infty$ 时， $f'(x) \rightarrow +\infty$ ，

故存在 $t > 0$ 使得 $f'(t) = 0$ ，即 $e^{t-e} - \frac{a}{t} = 0$ ，得 $a = te^{t-e}$ ，即 $\ln a = \ln t + t - e$ ，

且当 $0 < x < t$ 时， $f'(x) < 0$ ；当 $x > t$ 时， $f'(x) > 0$ ，

所以函数 $f(x)$ 在 $(0, t)$ 上单调递减，在 $(t, +\infty)$ 上单调递增，

故 $f(x)_{\min} = f(t) = e^{t-e} - ae - a \ln at = e^{t-e} - te e^{t-e} - te^{t-e} (2 \ln t + t - e)$ ，

所以 $e^{t-e} - te e^{t-e} - te^{t-e} (2 \ln t + t - e) = e^{t-e} (1 - te - 2t \ln t - t^2 + te) \geq 0$ ，

即 $\frac{1}{t} - 2 \ln t - t \geq 0$ ，设 $h(t) = \frac{1}{t} - 2 \ln t - t (t > 0)$ ，

由函数 $y = \frac{1}{t}, y = -2 \ln t, y = -t$ 在 $(0, +\infty)$ 在单调递减，

知函数 $h(t)$ 在 $(0, +\infty)$ 在单调递减，且 $h(1) = 0$ ，所以 $0 < t \leq 1$ ，

所以 $e^{-e} < e^{t-e} \leq e^{1-e}$ ，故 $0 < te^{t-e} \leq e^{1-e}$ ，即 $0 < a \leq e^{1-e}$ ，当且仅当 $t = 1$ 时等号成立，

所以 a 的最大值为 e^{1-e} .

故选：C

【点睛】方法点睛：利用导数证明不等式的恒成立问题的求解策略：

形如 $f(x) \geq g(x)$ 的恒成立的求解策略：

1、构造函数法：令 $F(x) = f(x) - g(x)$ ，利用导数求得函数 $F(x)$ 的单调性与最小值，只需 $F(x)_{\min} \geq 0$ 恒成立即可；

2、参数分离法：转化为 $a \geq \varphi(x)$ 或 $a \leq \varphi(x)$ 恒成立，即 $a \geq \varphi(x)_{\max}$ 或 $a \leq \varphi(x)_{\min}$ 恒成立，只需利用导数求得函数 $\varphi(x)$ 的单调性与最值即可；

3、数形结合法：结合函数 $y = f(x)$ 的图象在 $y = g(x)$ 的图象的上方（或下方），进而得到不等式恒成立.

二、多选题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分.

9. 已知随机事件 A, B 满足 $P(\overline{AB}) = P(\overline{A}B) = \frac{1}{4}$ ， $P(A+B) = 1$ ，则下列结论正确的是（ ）

A. $P(A) = P(B)$

B. $P(A) = \frac{3}{4}$

C. $P(B|A) = P(B)$

D. $P(\overline{A}|B) = \frac{1}{3}$

【答案】ABD

【解析】

【分析】利用对立事件、互斥事件，条件概率的概率公式逐项计算即可得.

【详解】对 A： $\because P(A) = P(\overline{AB}) + P(AB)$ ， $\therefore P(\overline{AB}) = P(A) - P(AB)$ ，

$\because P(B) = P(\overline{A}B) + P(AB)$ ， $\therefore P(\overline{A}B) = P(B) - P(AB)$ ，

$\because P(\overline{AB}) = P(\overline{A}B)$ ， $\therefore P(A) - P(AB) = P(B) - P(AB)$ ，

$\therefore P(A) = P(B)$ ，故 A 正确；

对 B： $\because P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB) = 1$ ， $\therefore P(AB) = 2P(A) - 1$ ，

又 $\because P(\overline{AB}) = P(A) - P(AB) = \frac{1}{4}$

解得 $P(A) = \frac{3}{4}$ ， $P(AB) = \frac{1}{2}$ ，故 B 正确；

对 C： $P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{1}{2} \div \frac{3}{4} = \frac{2}{3} \neq P(B)$ ，故 C 错误；

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/427060160114010052>