根轨迹绘制的八大法则
之1-4

在控制工程中，通常使用以根轨迹方程为基础建立起来的一些基本法则来绘制根轨迹。使用这些法则能够迅速地绘制出根轨迹的大致形状和变化趋势。

180°根轨迹或常规根轨迹

$$\sum_{j=1}^{m}\angle(s-z_j)-\sum_{i=1}^{n}\angle(s-p_i)=(2K+1)\pi$$ —相角条件方程

【法则一】根轨迹的连续性、分支数与对称性

假设负反馈系统的开环传递函数为:

$$G_k(s)=\frac{K_g\prod_{j=1}^{m}(s-z_j)}{\prod_{i=1}^{n}(s-p_i)}$$

则系统的闭环特征方程为:

$$D(s)=\prod_{i=1}^{n}(s-p_i)+K_g\prod_{J=1}^{m}(s-z_j)=0$$

【法则一】根轨迹的连续性、分支数与对称性

由于实际控制系统闭环特征方程的系数或为已知实数，或为根轨迹增益K_g的函数，所以当K_g由$0 \to \infty$连续变化时，闭环特征根的变化必然也是连续的，所以根轨迹具有连续性。

【法则一】根轨迹的连续性、分支数与对称性

对于实际控制系统而言，系统闭环特征方程的系数为实数，闭环特征方程的根只有实数和共轭复数两种，共轭复数关于实轴对称，因而，根轨迹也必然关于实轴对称。

【法则一】根轨迹的连续性、分支数与对称性

$$D(s)=\prod_{i=1}^{n}(s-p_i)+K_g\prod_{J=1}^{m}(s-z_j)=0$$

根轨迹在*s*平面上的分支数等于闭环特征根的数目。而闭环特征根的数目为*m*和*n*中的大者。即：

$$\text{分支数}=\begin{cases}\text{闭环极点数}=\text{开环极点数}\,n & (n\geq m)\\ \text{闭环极点数}=\text{开环零点数}\,m & (n<m)\end{cases}$$

【法则二】根轨迹的起点和终点

根轨迹的起点是指K_g=0的根轨迹点，而终点是指$K_g \to \infty$的根轨迹点。

根轨迹起始于开环极点，终止于开环零点。

设系统有n个开环极点，m开环零点。若$n>m$，则有m条终止于开环零点，$(n-m)$条终止于无穷远处；若$m>n$，则有n条起始于开环极点，$(m-n)$条起始于无穷远处。

证明：对于闭环特征方程

$$D(s)=\prod_{i=1}^{n}(s-p_i)+K_g\prod_{j=1}^{m}(s-z_j)=0$$

1）当K_g=0时，$D(s)=\prod_{i=1}^{n}(s-p_i)=0$ **，得$s=p_i$。**

可见，　K_g=0时的闭环极点就是开环极点，则根轨迹必起始于开环极点。

2）将闭环特征方程变为下式：

$$\frac{1}{K_g}\prod_{i=1}^{n}(s-p_i)+\prod_{j=1}^{m}(s-z_j)=0$$

当$\boldsymbol{K_g}$→∞时，$D(s)=\prod_{i=1}^{n}(s-z_j)=0$ **，得$\boldsymbol{s=z_j}$，**

可见，$\boldsymbol{K_g}\rightarrow\infty$ 时的闭环极点就是开环零点，则根轨迹必终止于开环零点。

3）当*n*>*m*，*s*→∞时

$$K_g = \lim_{s\to\infty}\frac{\prod_{i=1}^{n}\left|s-p_i\right|}{\prod_{j=1}^{m}\left|s-z_j\right|} = \lim_{s\to\infty}\left|s\right|^{n-m} \to \infty \quad (n>m)$$

可见，*s*→∞，*K*$_g$→∞，所以有(*n-m*)条终止于无穷远处。