第五节　函数的极值与最大值最小值

- 函数的**极值**及其求法
  (extreme value)
- 最大值最小值问题
- 小结　思考题　作业

极大值(maximal value)
极小值(minimal value)

一、函数的极值及其求法

1. 函数极值的定义

定义 若在x_0的某邻域内,恒有

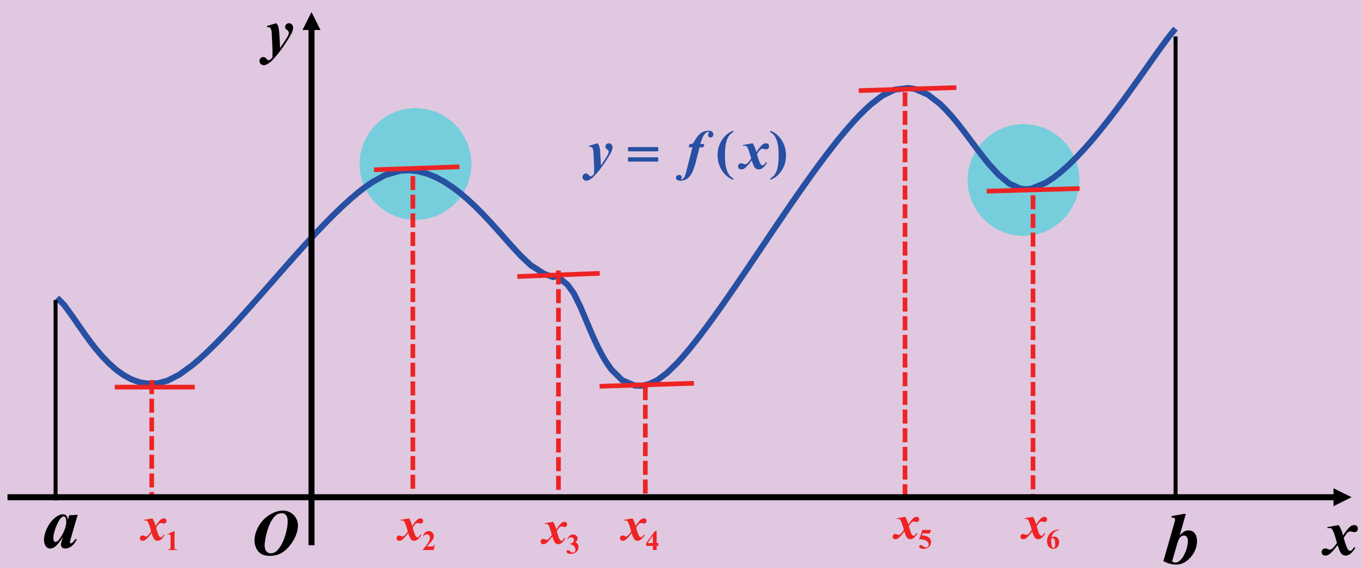
$$f(x) < f(x_0)\ (或 f(x) > f(x_0)),$$

则称$f(x_0)$为函数$f(x)$的一个**极大值** (**或极小值**),

函数的极大值与极小值统称为**极值**.

使函数取得极值的点x_0(自变量)称为**极值点**.

函数的极大值、极小值只是一点附近的最大值与最小值, 是局部性的. 在一个区间内, 函数可能存在许多个极值,有的极小值可能大于某个极大值.



[redacted]

使导数$f'(x)$为零的点叫做函数$f(x)$的**驻点**.

2. 极值的必要条件

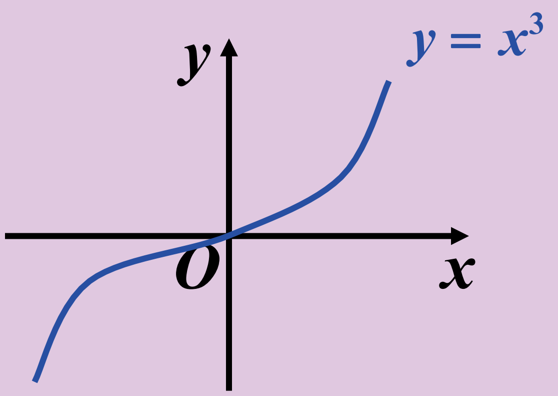
费马引理 如果函数 $f(x)$在x_0处可导，且$f(x)$在x_0处取得极值，那么

定理1（必要条件） 如果函数$f(x)$在点x_0处取得极值，且在x_0处可导，则必有$f'(x_0)=0$.

注 (1) 可导函数的极值点必是驻点，但函数的驻点却不一定是极值点.

如，$y=x^3$，$y'\big|_{x=0}=0$，

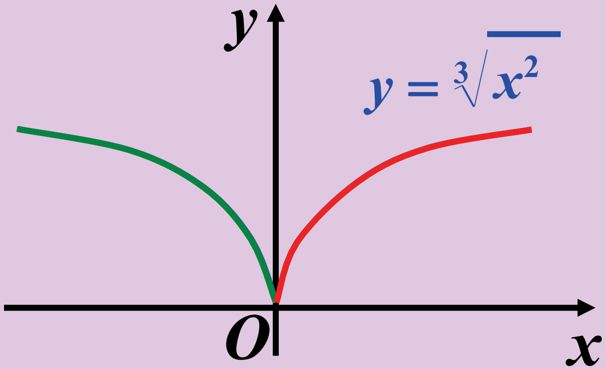
但$x=0$不是极值点.



(2) 极值点也可能是导数不存在的点.

如, $y=\sqrt[3]{x^2}$, $x=0$ 是极小值点.

但 $y=\sqrt[3]{x^2}$ 在 $x=0$ 不可导.



怎样从驻点中与导数不存在的点判断一点是不是极值点 

几何上, 若 x_0 是连续函数 $f(x)$ 单增、单减的分界点, 则 x_0 必为极值点.

3. 极值的充分条件

极值的一阶充分条件

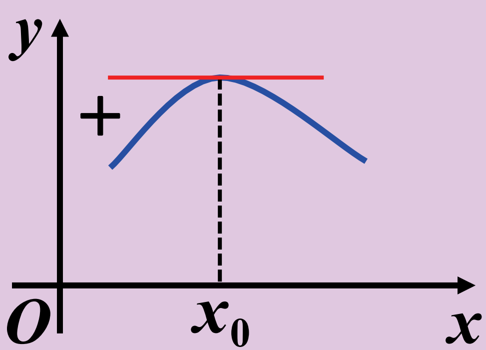
定理2（第一充分条件） 设 $f(x)$ 在 x_0 点连续，且在

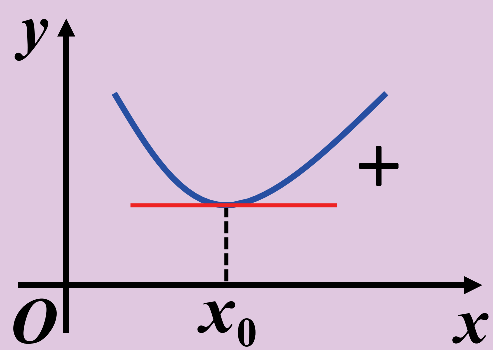
(1) 若当 $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ 时，$f'(x) > 0\ (< 0)$；

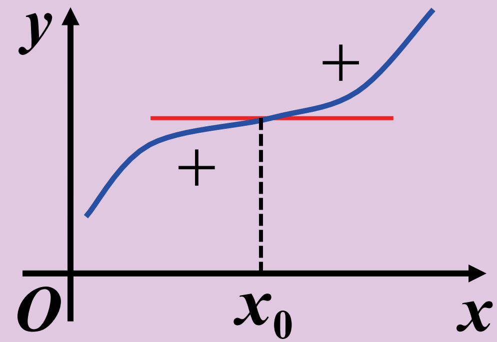
当 $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ 时，$f'(x) < 0\ (> 0)$，则

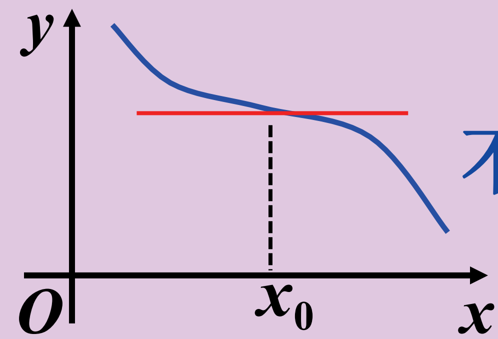
$f(x_0)$ 为极大值（极小值）；

(2) 若 $f'(x)$ 在 x_0 附近不变号，则 $f(x_0)$ 不是极值.









不是极值点

一般求极值的步骤

(1) 求导数;

(2) 求驻点与不可导点;

(3) 求相应区间的导数符号,判别增减性;

(4) 求极值.