

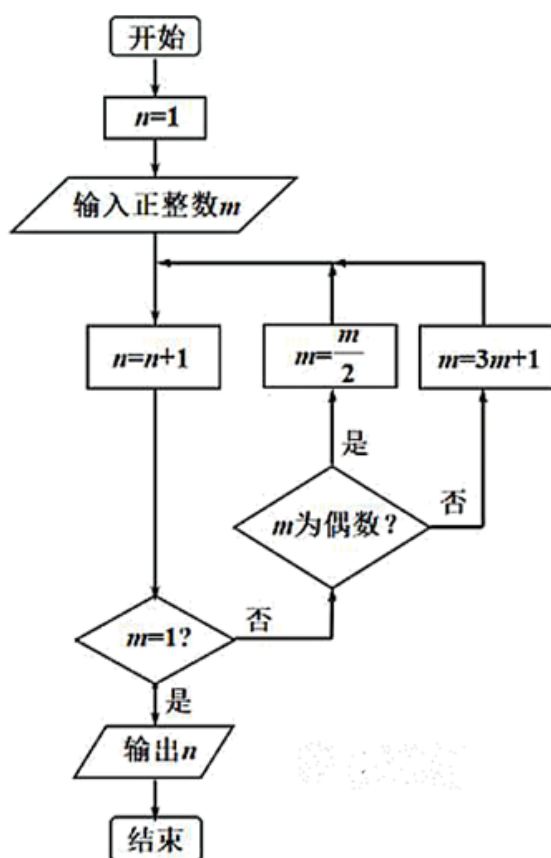
江苏省徐州市诚贤中学 2024 年高考全国统考预测密卷数学试卷

考生须知：

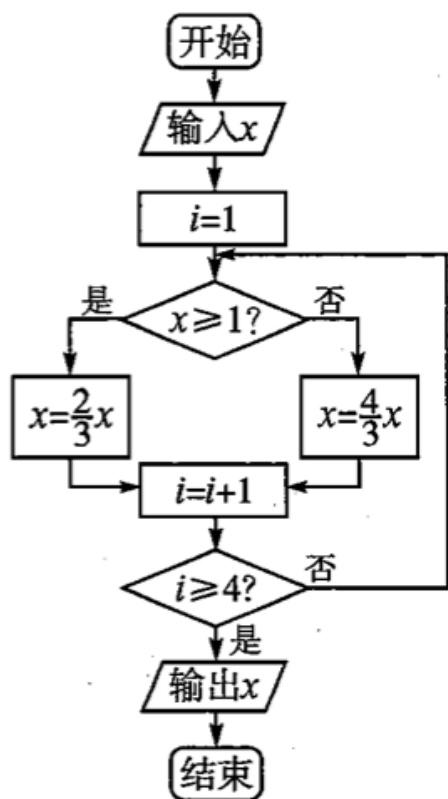
1. 全卷分选择题和非选择题两部分，全部在答题纸上作答。选择题必须用 2B 铅笔填涂；非选择题的答案必须用黑色字迹的钢笔或答字笔写在“答题纸”相应位置上。
2. 请用黑色字迹的钢笔或答字笔在“答题纸”上先填写姓名和准考证号。
3. 保持卡面清洁，不要折叠，不要弄破、弄皱，在草稿纸、试题卷上答题无效。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 20 世纪产生了著名的“ $3x+1$ ”猜想：任给一个正整数 x ，如果 x 是偶数，就将它减半；如果 x 是奇数，则将它乘 3 加 1，不断重复这样的运算，经过有限步后，一定可以得到 1. 如图是验证“ $3x+1$ ”猜想的一个程序框图，若输入正整数 m 的值为 40，则输出的 n 的值是（ ）



- A. 8 B. 9 C. 10 D. 11
2. 相传黄帝时代，在制定乐律时，用“三分损益”的方法得到不同的竹管，吹出不同的音调。如图的程序是与“三分损益”结合的计算过程，若输入的 x 的值为 1，输出的 x 的值为（ ）



- A. $\frac{64}{81}$ B. $\frac{32}{27}$ C. $\frac{8}{9}$ D. $\frac{16}{27}$

3. 刘徽(约公元 225 年-295 年), 魏晋期间伟大的数学家, 中国古典数学理论的奠基人之一他在割圆术中提出的, “割之弥细, 所失弥少, 割之又割, 以至于不可割, 则与圆周合体而无所失矣”, 这可视为中国古代极限观念的佳作, 割圆术的核心思想是将一个圆的内接正 n 边形等分成 n 个等腰三角形(如图所示), 当 n 变得很大时, 这 n 个等腰三角形的面积之和近似等于圆的面积, 运用割圆术的思想, 得到 $\sin 2^\circ$ 的近似值为 ()



- A. $\frac{\pi}{90}$ B. $\frac{\pi}{180}$ C. $\frac{\pi}{270}$ D. $\frac{\pi}{360}$

4. 已知 i 为虚数单位, 若复数 z 满足 $\frac{5}{1+2i} = \bar{z} - i$, 则 $z =$ ()

- A. $1+i$ B. $-1+i$ C. $1-2i$ D. $1+2i$

5. 已知函数 $f(x)$ 满足: 当 $x \in [-2, 2)$ 时, $f(x) = \begin{cases} x(x+2), & -2 \leq x \leq 0 \\ \log_2 x, & 0 < x < 2 \end{cases}$, 且对任意 $x \in \mathbf{R}$, 都有

$f(x+4) = f(x)$, 则 $f(2019) =$ ()

- A. 0 B. 1 C. -1 D. $\log_2 3$

6. 二项式 $\left(\frac{2}{\sqrt{x}}-x^2\right)^5$ 的展开式中, 常数项为 ()

- A. -80 B. 80 C. -160 D. 160

7. 正 $\triangle ABC$ 的边长为2, 将它沿 BC 边上的高 AD 翻折, 使点 B 与点 C 间的距离为 $\sqrt{3}$, 此时四面体 $A-BCD$ 的外接球表面积为 ()

- A. $\frac{10\pi}{3}$ B. 4π C. $\frac{13\pi}{3}$ D. 7π

8. 已知复数 z , 满足 $z(3-4i)=5i$, 则 $|z|$ 为 ()

- A. 1 B. $\sqrt{5}$ C. $\sqrt{3}$ D. 5

9. 记 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和. 若 $a_2=-5$, $S_4=-16$, 则 a_6 为 ()

- A. 5 B. 3 C. -12 D. -13

10. 已知复数 z 满足 $|z|=1$, 则 $|z+2-i|$ 的最大值为 ()

- A. $2+3$ B. $1+\sqrt{5}$ C. $2+\sqrt{5}$ D. 6

11. 二项式 $\left(\frac{x}{2}-\frac{3}{x}\right)^7$ 展开式中, $\frac{1}{x}$ 项的系数为 ()

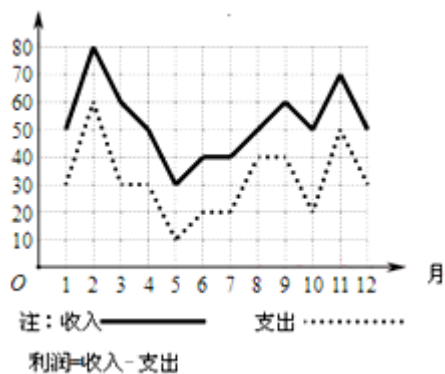
- A. $-\frac{945}{16}$ B. $-\frac{189}{32}$ C. $-\frac{21}{64}$ D. $\frac{2835}{8}$

12. 已知集合 $A=\left\{x\in\mathbb{Z}\mid\frac{x}{x+3}\leq 0\right\}$, 则集合 A 真子集的个数为 ()

- A. 3 B. 4 C. 7 D. 8

二、填空题: 本题共4小题, 每小题5分, 共20分。

13. 某商场一年中各月份的收入、支出情况的统计如图所示, 下列说法中正确的是_____.



①2至3月份的收入的变化率与11至12月份的收入的变化率相同;

②支出最高值与支出最低值的比是6:1;

③第三季度平均收入为 50 万元;

④利润最高的月份是 2 月份.

14. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - y^2 = 1 (a > 0)$ 的一条渐近线方程为 $x + y = 0$, 则 $a =$ _____.

15. 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 所对的边分别是 a, b, c , 若 $\cos B = \frac{4}{5}, \cos C = \frac{12}{13}, b = 1$, 则 $a =$ _____.

16. 在四面体 $ABCD$ 中, $\triangle ABD$ 与 $\triangle BDC$ 都是边长为 2 的等边三角形, 且平面 $ABD \perp$ 平面 BDC , 则该四面体外接球的体积为 _____.

三、解答题: 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (12 分) 在本题中, 我们把具体如下性质的函数 $f(x)$ 叫做区间 D 上的闭函数 ① $f(x)$ 的定义域和值域都是 D ; ② $f(x)$ 在 D 上是增函数或者减函数.

(1) 若 $f(x) = \tan(\omega x)$ 在区间 $[-1, 1]$ 上是闭函数, 求常数 ω 的值;

(2) 找出所有形如 $f(x) = a \log_3 x + b\sqrt{x}$ 的函数 (a, b 都是常数), 使其在区间 $[1, 9]$ 上是闭函数.

18. (12 分) 已知函数 $f(x) = e^x + ax$, $g(x) = e^x \ln x$.

(1) 若对于任意实数 $x \geq 0$, $f(x) > 0$ 恒成立, 求实数 a 的范围;

(2) 当 $a = -1$ 时, 是否存在实数 $x_0 \in [1, e]$, 使曲线 $C: y = g(x) - f(x)$ 在点 x_0 处的切线与 y 轴垂直? 若存在, 求出 x_0 的值; 若不存在, 说明理由.

19. (12 分) 在直角坐标系 xOy 中, 曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases} x = 2 \cos \alpha \\ y = 2 + 2 \sin \alpha \end{cases}$ (α 为参数), M 为 C_1 上的动点, P 点满足 $\vec{OP} = 2\vec{OM}$, 点 P 的轨迹为曲线 C_2 .

(I) 求 C_2 的方程;

(II) 在以 O 为极点, x 轴的正半轴为极轴的极坐标系中, 射线 $\theta = \frac{\pi}{3}$ 与 C_1 的异于极点的交点为 A , 与 C_2 的异于极点的交点为 B , 求 $|AB|$.

20. (12 分) 已知 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 且 $(\sin A - \sin B)^2 = \sin^2 C - \sin A \sin B$.

(I) 求 C ;

(II) 若 $c = 1$, $\triangle ABC$ 的周长是否有最大值? 如果有, 求出这个最大值, 如果没有, 请说明理由.

21. (12 分) 已知矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, 若矩阵 $M = BA$, 求矩阵 M 的逆矩阵 M^{-1} .

22. (10 分) 如图 1, $\triangle ADC$ 与 $\triangle ABC$ 是处在同一平面内的两个全等的直角三角形,

$\angle ACB = \angle ACD = 30^\circ$, $\angle ABC = \angle ADC = 90^\circ$, $AB = 2$, 连接 BD , E 边 BC 上一点, 过 E 作 $EF \parallel BD$, 交 CD 于点 F , 沿 EF 将 $\triangle CEF$ 向上翻折, 得到如图 2 所示的六面体 $P-ABEFD$,

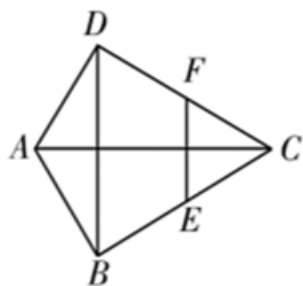


图1

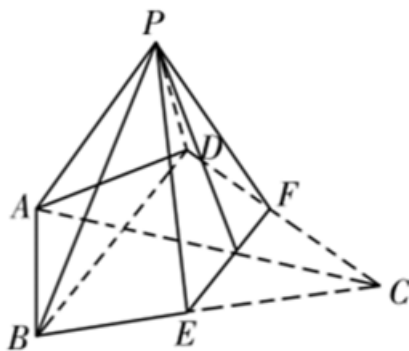


图2

(1) 求证: $BD \perp AP$;

(2) 设 $\overrightarrow{BE} = \lambda \overrightarrow{EC}$ ($\lambda \in R$), 若平面 $PEF \perp$ 底面 $ABEFD$, 若平面 PAB 与平面 PDF 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{5}}{5}$, 求 λ 的值;

(3) 若平面 $PEF \perp$ 底面 $ABEFD$, 求六面体 $P-ABEFD$ 的体积的最大值.

参考答案

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

1、C

【解析】

列出循环的每一步, 可得出输出的 n 的值.

【详解】

$n=1$, 输入 $m=40$, $n=1+1=2$, $m=1$ 不成立, m 是偶数成立, 则 $m=\frac{40}{2}=20$;

$n=2+1=3$, $m=1$ 不成立, m 是偶数成立, 则 $m=\frac{20}{2}=10$;

$n=3+1=4$, $m=1$ 不成立, m 是偶数成立, 则 $m=\frac{10}{2}=5$;

$n = 4 + 1 = 5$, $m = 1$ 不成立, m 是偶数不成立, 则 $m = 3 \times 5 + 1 = 16$;

$n = 5 + 1 = 6$, $m = 1$ 不成立, m 是偶数成立, 则 $m = \frac{16}{2} = 8$;

$n = 6 + 1 = 7$, $m = 1$ 不成立, m 是偶数成立, 则 $m = \frac{8}{2} = 4$;

$n = 7 + 1 = 8$, $m = 1$ 不成立, m 是偶数成立, 则 $m = \frac{4}{2} = 2$;

$n = 8 + 1 = 9$, $m = 1$ 不成立, m 是偶数成立, 则 $m = \frac{2}{2} = 1$;

$n = 9 + 1 = 10$, $m = 1$ 成立, 跳出循环, 输出 n 的值为 10.

故选: C.

【点睛】

本题考查利用程序框图计算输出结果, 考查计算能力, 属于基础题.

2、B

【解析】

根据循环语句, 输入 $x = 1$, 执行循环语句即可计算出结果.

【详解】

输入 $x = 1$, 由题意执行循环结构程序框图, 可得:

第 1 次循环: $x = \frac{2}{3}$, $i = 2 < 4$, 不满足判断条件;

第 2 次循环: $x = \frac{8}{9}$, $i = 3 < 4$, 不满足判断条件;

第 4 次循环: $x = \frac{32}{27}$, $i = 4 \geq 4$, 满足判断条件; 输出结果 $x = \frac{32}{27}$.

故选: B

【点睛】

本题考查了循环语句的程序框图, 求输出的结果, 解答此类题目时结合循环的条件进行计算, 需要注意跳出循环的判定语句, 本题较为基础.

3、A

【解析】

设圆的半径为 r , 每个等腰三角形的顶角为 $\frac{360^\circ}{n}$, 则每个等腰三角形的面积为 $\frac{1}{2} r^2 \sin \frac{360^\circ}{n}$, 由割圆术可得圆的面积为 $\pi r^2 = n \cdot \frac{1}{2} r^2 \sin \frac{360^\circ}{n}$, 整理可得 $\sin \frac{360^\circ}{n} = \frac{2\pi}{n}$, 当 $n = 180$ 时即可为所求.

【详解】

由割圆术可知当 n 变得很大时, 这 n 个等腰三角形的面积之和近似等于圆的面积,

设圆的半径为 r , 每个等腰三角形的顶角为 $\frac{360^\circ}{n}$,

所以每个等腰三角形的面积为 $\frac{1}{2}r^2 \sin \frac{360^\circ}{n}$,

所以圆的面积为 $\pi r^2 = n \cdot \frac{1}{2}r^2 \sin \frac{360^\circ}{n}$, 即 $\sin \frac{360^\circ}{n} = \frac{2\pi}{n}$,

所以当 $n=180$ 时, 可得 $\sin \frac{360^\circ}{180} = \sin 2^\circ = \frac{2\pi}{180} = \frac{\pi}{90}$,

故选: A

【点睛】

本题考查三角形面积公式的应用, 考查阅读分析能力.

4、A

【解析】

分析: 题设中复数满足的等式可以化为 $\bar{z} = \frac{5}{1+2i} + i$, 利用复数的四则运算可以求出 z .

详解: 由题设有 $\bar{z} = \frac{5}{1+2i} + i = 1 - 2i + i = 1 - i$, 故 $z = 1 + i$, 故选 A.

点睛: 本题考查复数的四则运算和复数概念中的共轭复数, 属于基础题.

5、C

【解析】

由题意可知 $f(2019) = f(-1)$, 代入函数表达式即可得解.

【详解】

由 $f(x+4) = f(x)$ 可知函数 $f(x)$ 是周期为 4 的函数,

$\therefore f(2019) = f(-1 + 4 \times 505) = f(-1) = -1 \times (-1 + 2) = -1$.

故选: C.

【点睛】

本题考查了分段函数和函数周期的应用, 属于基础题.

6、A

【解析】

求出二项式 $\left(\frac{2}{\sqrt{x}} - x^2\right)^5$ 的展开式的通式, 再令 x 的次数为零, 可得结果.

【详解】

解: 二项式 $\left(\frac{2}{\sqrt{x}} - x^2\right)^5$ 展开式的通式为 $T_{r+1} = C_5^r \left(\frac{2}{\sqrt{x}}\right)^{5-r} (-x^2)^r = (-1)^r C_5^r 2^{\frac{5-r}{2}} x^{\frac{5-r}{2} + 2r}$,

令 $-\frac{5-r}{2} + 2r = 0$ ，解得 $r = 1$ ，

则常数项为 $(-1)^1 C_5^1 2^4 = -80$ 。

故选：A.

【点睛】

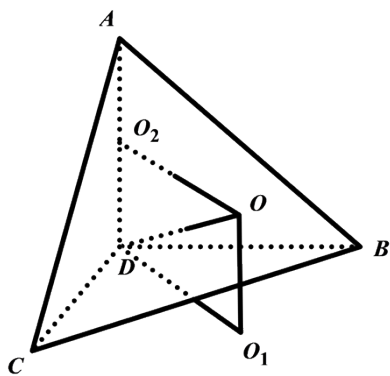
本题考查二项式定理指定项的求解，关键是熟练应用二项展开式的通式，是基础题.

7、D

【解析】

如图所示，设 AD 的中点为 O_2 ， $\triangle BCD$ 的外接圆的圆心为 O_1 ，四面体 $A-BCD$ 的外接球的球心为 O ，连接 OO_1, OO_2, OD ，利用正弦定理可得 $DO_1 = 1$ ，利用球心的性质和线面垂直的性质可得四边形 OO_2DO_1 为平行四边形，最后利用勾股定理可求外接球的半径，从而可得外接球的表面积.

【详解】



如图所示，设 AD 的中点为 O_2 ， $\triangle BCD$ 外接圆的圆心为 O_1 ，四面体 $A-BCD$ 的外接球的球心为 O ，连接 OO_1, OO_2, OD ，则 $OO_1 \perp$ 平面 BCD ， $OO_2 \perp AD$ 。

因为 $CD = BD = 1, BC = \sqrt{3}$ ，故 $\cos \angle BDC = \frac{2-3}{2 \times 1 \times 1} = -\frac{1}{2}$ ，

因为 $\angle BDC \in (0, \pi)$ ，故 $\angle BDC = \frac{2\pi}{3}$ 。

由正弦定理可得 $2DO_1 = \frac{\sqrt{3}}{\sin \frac{2\pi}{3}} = 2$ ，故 $DO_1 = 1$ ，又因为 $AD = \sqrt{3}$ ，故 $DO_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 。

因为 $AD \perp DB, AD \perp CD, DB \cap CD = D$ ，故 $AD \perp$ 平面 BCD ，所以 $OO_1 \parallel AD$ ，

因为 $AD \perp$ 平面 BCD ， $DO_1 \subset$ 平面 BCD ，故 $AD \perp DO_1$ ，故 $OO_2 \parallel DO_1$ ，

所以四边形 OO_2DO_1 为平行四边形, 所以 $OO_1 = DO_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

所以 $OD = \sqrt{\frac{3}{4} + 1} = \frac{\sqrt{7}}{2}$, 故外接球的半径为 $\frac{\sqrt{7}}{2}$, 外接球的表面积为 $4\pi \times \frac{7}{4} = 7\pi$.

故选: D.

【点睛】

本题考查平面图形的折叠以及三棱锥外接球表面积的计算, 还考查正弦定理和余弦定理, 折叠问题注意翻折前后的变量与不变量, 外接球问题注意先确定外接球的球心的位置, 然后把半径放置在可解的直角三角形中来计算, 本题有一定的难度.

8、A

【解析】

首先根据复数代数形式的除法运算求出 z , 求出 z 的模即可.

【详解】

$$\text{解: } z = \frac{5i}{3-4i} = \frac{5i(3+4i)}{25} = \frac{-4+3i}{5},$$

$$\therefore |z| = \sqrt{\left(-\frac{4}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{5}\right)^2} = 1,$$

故选: A

【点睛】

本题考查了复数求模问题, 考查复数的除法运算, 属于基础题.

9、B

【解析】

由题得 $a_1 + d = -5$, $4a_1 + \frac{4 \times 3}{2}d = -16$, 解得 $a_1 = -7$, $d = 2$, 计算可得 a_6 .

【详解】

$$\text{Q } a_2 = -5, S_4 = -16, \therefore a_1 + d = -5, 4a_1 + \frac{4 \times 3}{2}d = -16, \text{ 解得 } a_1 = -7, d = 2,$$

$$\therefore a_6 = a_1 + 5d = 3.$$

故选: B

【点睛】

本题主要考查了等差数列的通项公式, 前 n 项和公式, 考查了学生运算求解能力.

10、B

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/427160053006006102>