第一章

1.3 解：

(a). $E_{\infty}=\lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{T}\left|x(t)\right|^{2}dt=\int_{0}^{\infty}e^{-4t}dt=\frac{1}{4}, P_{\infty}=0$

(b) $P_{\infty}=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\left|x(t)\right|^{2}dt=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}dt=1$

$$E_{\infty}=\lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{T}\left|x(t)\right|^{2}dt=\int_{-\infty}^{\infty}\left|x(t)\right|^{2}dt=\infty$$

(c).

$$E_{\infty}=\lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{T}\left|x(t)\right|^{2}dt=\int_{-\infty}^{\infty}\cos^{2}(t)dt=\infty,$$

$$P_{\infty}=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\left|x(t)\right|^{2}dt=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\frac{1+\cos(2t)}{2}dt=\frac{1}{2}$$

(d) $P_{\infty}=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{2N+1}\sum_{n=-N}^{N}\left|x[n]\right|^{2}=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{2N+1}\sum_{n=0}^{N}(\frac{1}{2})^{2n}=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{2N+1}\cdot\frac{4}{3}=0$

$$E_{\infty}=\lim_{N\to\infty}\sum_{-N}^{N}\left|x(n)\right|^{2}=\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{2})^{2n}=\frac{4}{3}$$

(e). $\left|x_{2}(n)\right|=1, E_{\infty}=\infty$

$$P_{\infty}=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{2N+1}\sum_{n=-N}^{N}\left|x[n]\right|^{2}=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{2N+1}\sum_{n=-N}^{N}1=1$$

(f) $P_{\infty}=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{2N+1}\sum_{n=-N}^{N}\left|x(n)\right|^{2}=\frac{1}{2}$

$$E_{\infty}==\lim_{N\to\infty}\sum_{n=-N}^{N}\left|x(n)\right|^{2}=\infty$$

1.9. a). $\omega_{0}=10, T_{0}=\frac{2\pi}{10}=\frac{\pi}{5}$； b) 非周期的； c) $\omega_{0}=7\pi, \frac{\omega_{0}}{2\pi}=\frac{m}{N_{0}}, N_{0}=2$

d). $N_{0}=10;$ e). 非周期的；

1.12 解：

$\sum_{k=3}^{\infty}\delta(n-1-k)$ 对于 $n\geq 4$ 时，为 1

即 $n\geq 4$ 时，x(n)为 0，其余 n 值时，x(n)为 1

易有：$x(n)=u(-n+3)$，$M=-1, n_{0}=-3;$

1.15 解：(a)

$y[n]=y_2[n]=x_2[n-2]+\frac{1}{2}x_2[n-3]$，又 $x_2(n)=y_1(n)=2x_1(n)+4x_1(n-1)$，

$\therefore y(n)=2x_1[n-2]+4x_1[n-3]+x_1[n-3]+2x_1[n-4]$， $x_1(n)=x(n)$

$y(n)=2x[n-2]+5x[n-3]+2x[n-4]$

其中 $x[n]$ 为系统输入。

(b) 交换级联次序后

$y[n]=y_1[n]=2x_1[n]+4x_1[n-2]$

$=2x_2[n-2]+4x_2[n-3]+x_2[n-3]+2x_2[n-4]$

$=2x[n-2]+5x[n-3]+2x[n-4]$

其中 $x[n]$ 为系统输入

通过比较可知，系统 s 的输入－输出关系不改变

1.16 解：

(a) 不是无记忆的，因为系统在某一时刻 n_0 的输出还与 n_0-2 时刻的输入有关。

(b) 输出 $y[n]=A\delta[n]\cdot A\delta[n-2]$

$=A^2\delta[n]\delta[n-2]=0$

(c) 由(b)可得，不论 A 为任意实数或者复数，系统的输出均为零，因此系统不可逆。

1.21．1.22 和 1.23 画图均略

1.26 解：

(a) $\because\ \frac{\omega_0}{2\pi}=\frac{3}{7}$，为有理数，$\therefore$ x[n]具有周期性，且周期 N＝7

(b) $\because\ \frac{\omega_0}{2\pi}=\frac{1}{16\pi}$，为无理数，$\therefore$ x[n]无周期性

(c) 由周期性的定义，如果存在 $N,$使得$\cos[\frac{\pi}{2}(n+N)^2]=\cos(\frac{\pi}{8}n^2),$则函数有周期性，即：$\frac{1}{8}(n+N)^2\pi=2k\pi+\frac{1}{8}\pi n^2$ $\quad\therefore N^2+2nN=16k$，对全部 n 成立取 N 的最小值 N＝8，即为周期。

(d) $x[n]=\cos(\frac{\pi}{2}n)\cos(\frac{\pi}{4}n)=\frac{1}{2}[\cos(\frac{3}{4}\pi n)+\cos(\frac{1}{4}\pi n)]$，与(a)同理，x[n]具有周期

性，对$\cos(\frac{3}{4}\pi n)$存在$N_1=8$, 对$\cos(\frac{1}{4}\pi n)$存在$N_2=8$，$\therefore$基波周期$N=8$

(e) 与上题同理，$N_1=8, N_2=16, N_3=4$ $\therefore$周期N＝16

1.27 a) 系统具有线性性与稳定性；

e). 系统具有线性性, 时不变性与因果性与稳定性；

1.28 c) 系统是无记忆的，线性的，因果的；

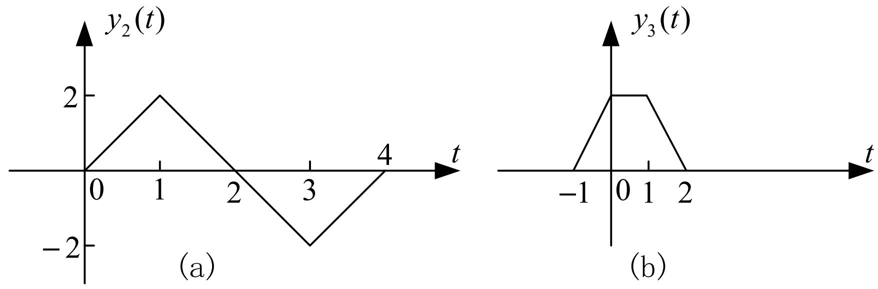
e) 系统是线性的，稳定的

g). 系统是线性的，稳定

1.31

解：（a）$\because$ $x_2(t)=x_1(t)-x_1(t-2)$ $\therefore$ $y_2(t)=y_1(t)-y_1(t-2)$ 如图 PS2.17(a)所示。

（b）$\because$ $x_3(t)=x_1(t+1)+x_1(t)$ $\therefore$ $y_3(t)=y_1(t+1)+y_1(t)$ 如图 PS2.17(b)所示。



1.33

1)正确。设$x(n)$的周期为N。如果N为偶数，则$y_1(n)$的周期为$N/2$；如果N 为奇数，则必须有$2N_0=2N$，才能保证周期性，此时$y_1(n)$的周期为$N_0=N$。

2)不正确。设$x(n)=g(n)+h(n)$，其中$g(n)=\sin\frac{\pi n}{4}$，对所有n，

$$h(n)=\begin{cases}\left(\frac{1}{3}\right)^n, n\text{奇}\\ 0, \quad n\text{偶}\end{cases}$$ 显然$x(n)$是非周期的，但$y_1(n)$是周期的。

3)正确。若$x(n)$的周期为N，则$y_2(n)$的周期为$2N$。

4)正确。若$y_2(n)$的周期为N，则N只能是偶数。$x(n)$的周期为$N/2$。

1.37 a) $\phi_{xy}(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t+\tau)y(\tau)d\tau=\phi_{yx}(-t)$

b) $\phi_{xx}(t)=\phi_{xx}(-t)$，奇部为零。

c). $\phi_{xy}(t)=\phi_{xx}(t-T), \phi_{yy}(t)=\phi_{xx}(t)$

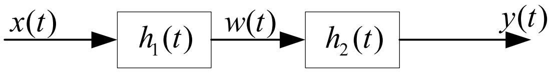
1.42 解：

（a）结论正确。设两线性时不变系统如下图所示级联。当 $x(t)=ax_1(t)+bx_2(t)$ 时，则有

$w(t)=aw_1(t)+bw_2(t)$，于是 $y(t)=ay_1(t)+by_2(t)$，因此整个系统是线性的。

若输入为 $x(t-t_0)$，则由于时不变性可知系统 1 的输出为 $w(t-t_0)$，这正是系统 2

的输入，因此总输出为 $y(t-t_0)$。即整个系统是时不变的。



（b）结论不对。如系统 1 为 $w(t)=x(t)+3t$，系统 2 为 $y(t)=w(t)-3t$。虽然两系统都不是线性的，但它们的级联 $y(t)=x(t)$ 却是线性的。

c)　设系统 1 的输出为 w(n), 系统 2 的输出为 z(n).

$$
\begin{aligned}
y(n)=z(2n)&=w(2n)+\frac{1}{2}w(2n-1)+\frac{1}{4}w(2n-2)\\
&=x(n)+\frac{1}{2}x(n-1)+\frac{1}{4}x(n-2)
\end{aligned}
$$

1.46 解：a). $y(n)=\delta(n-1)-y(n-1)$,n=0,y(n)=0,n=1,y(n)=1,n=2,y(n)=-1;

$$y(n)=(-1)^{n-1}u(n-1)$$

b). $y(n)=u(n-1)-y(n-1)$,

n=0,y(n)=0, n=1,y(n)=1,n=2,y(n)=0; n=3,y(n)=1,n=4,y(n)=0, n=5,y(n)=1……;

1.47 解：

a) $y_1(n)=S\left\{x_1(n)+c\right\}=L\left\{x_1(n)\right\}+C$，C 为系统的零输入响应。

$$
\begin{aligned}
y(n)&=S\left\{x_1(n)+x(n)\right\}-y_1(n)\\
&=L\left\{x_1(n)+x(n)\right\}+C-y_1(n)\\
&=L\left\{x_1(n)\right\}+L\{x(n)\}+C-y_1(n)=L\left\{x(n)\right\}
\end{aligned}
$$

c) $1,\ y_0(n)=n,\quad 2,\ y_0(n)=\begin{cases} n/2,\ n\ even\\ (n-1)/2,\ n\ odd\end{cases}$

3. 非增量线性系统；4. $y(t)=x(t)+tdx(t)/dt$, 非增量线性系统

5. 增量线性系统，$y(n)=\cos^2(\pi n)$

Chapter 2

2.1 解：(a) $y_1[n]=x[n]*h[n]=x[0]h[n]+x[1]h[n-1]+x[3]h[n-3]$

$$=2\delta[n+1]+4\delta[n]+2\delta[n-1]+2\delta[n-2]-2\delta[n-4]\text{(图略)}$$

(b) $y_2[n]=x[n+2]*h[n]=y_1[n+2]$

$$=2\delta[n+3]+4\delta[n+2]+2\delta[n+1]+2\delta[n]-2\delta[n-2]\text{(图略)}$$

(c) $y_3[n]=x[n]*h[n+2]=y_2[n]$(图略)

2.5 解：$y[n]=\sum_{k=0}^{9}x[k]h[n-k]$，由 $y[4]=5$ 可知：$N\ge 4$

由 $y[14]=0$ 可知：$9+N+1\le 14$，即：$N\le 4$

所以：$N=4$

2.11 解：(a) $t\le 3$ 时，$y(t)=0$

$3<t\le 5$ 时，$y(t)=u(t-3)*h(t)=\int_3^t u(\tau-3)h(t-\tau)d\tau$

$$=\int_3^t e^{-3(t-\tau)}d\tau=\frac{1-e^{-3(t-3)}}{3}$$

$t>5$ 时，$y(t)=\left[(t-3)-u(t-5)\right]u*h(t)=\int_3^5 e^{-3(t-\tau)}d\tau=\frac{\left(1-e^{-6}\right)e^{-3(t-5)}}{3}$

因此：$y(t)=\begin{cases}0,t\le 3\\ \frac{1-e^{-3(t-3)}}{3},3<t\le 5\\ \frac{\left(1-e^{-6}\right)e^{-3(t-5)}}{3},t>5\end{cases}$

（b）$\frac{dx(t)}{dt}=\delta(t-3)-\delta(t-5)$

$\therefore g(t)=\frac{dx(t)}{dt}*h(t)=h(t-3)-h(t-5)=e^{-3(t-3)}u(t-3)-e^{-3(t-5)}u(t-5)$

(c) $g(t)=\frac{dy(t)}{dt}$

2.13 解：(a) 将 $h[n]=\left(\frac{1}{5}\right)^n u[n]$ 代入式子得：$\left(\frac{1}{5}\right)^n u[n]-A\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} u[n-1]=\delta[n]$

即：$\left(\frac{1}{5}\right)^n \left(u[n]-5Au[n-1]\right)=\delta[n]$

从而可得：$5A=1$，即：$A=\frac{1}{5}$

(b)由(a)可知：$h[n]-\frac{1}{5}h[n-1]=\delta[n]$

则 S_1 的逆系统 S_2 的单位脉冲响应为：$h_1[n]=\delta[n]-\frac{1}{5}\delta[n-1]$

2.16 解：(a)对。若 $n-N_2<N_1$，即：$n<N_1+N_2$，则 $x[k]$ 与 $h[n-k]$ 没有公共部分，显然有 $x[n]*h[n]=0$。

(b)错。$y[n-1]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-1-k]=x[n]*h[n-1]$

(c)对。$y(-t)=\int_{-\infty}^{+\infty} x(r)h(-t-r)dr$，令 $r=-\lambda$，则：

$$y(-t)=\int_{+\infty}^{-\infty} x(-\lambda)h(\lambda-t)d(-\lambda)=\int_{-\infty}^{+\infty} x(-\lambda)h(\lambda-t)d\lambda=x(-t)*h(-t)$$

(d)对。若 $t-T_2>T_1$，则没有公共部分，故 $t>T_1+T_2$ 时，$x(t)*h(t)=0$。

2.19 a). $y(n)=\alpha y(n-1)+\beta w(n)$，$w(n)=\frac{1}{\beta}y(n)+\frac{\alpha}{\beta}y(n-1)$

将 w(n)代入后经比较可得：$\alpha=\frac{1}{4}, \beta=1$。

b). 根据书上例题 2.15, 利用递推算法，可求得系统 S1，S2 的脉冲响应为：

$h_1(n)=\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$，$h_2(n)=\left(\frac{1}{4}\right)^n u(n)$

则总系统的单位脉冲响应为 $h(n)=h_1(n)*h_2(n)=\left(2\left(\frac{1}{2}\right)^n-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right)u(n)$

2.21 (a). $y(n)=\frac{\beta^{n+1}-\alpha^{n+1}}{\beta-\alpha}u(n)$； c). $y(n)=\begin{cases}(8/9)(-1/8)^4 4^n, n\le 6\\(8/9)(-1/2)^n, n>6\end{cases}$

2.22. (b) 当 $t\le 1$ 时，$y(t)=\int_0^2 e^{2(t-\tau)}d\tau-\int_2^5 e^{2(t-\tau)}d\tau=\frac{1}{2}\left[e^{2t}-2e^{2(t-2)}+e^{2(t-5)}\right]$

当$1\le t\le 3$时，$y(t)=\int_{t-1}^{2}e^{2(t-\tau)}d\tau-\int_{2}^{5}e^{2(t-\tau)}d\tau=\frac{1}{2}\left[e^{2}-2e^{2(t-2)}+e^{2(t-5)}\right]$

当$3\le t\le 6$时，$y(t)=-\int_{t-1}^{5}e^{2(t-\tau)}d\tau=\frac{1}{2}\left[e^{2(t-5)}-e^{2}\right]$

当$t>6$时，$y(t)=0$

(e). $\because x(t)$是周期信号，由此可推知$y(t)=x\left(t\right)*h(t)$也是周期的，且周期也为 2。因此只需求出$y(t)$的一个周期。

当$-\frac{1}{2}\le t\le\frac{1}{2}$时，$y(t)=\int_{t-1}^{-\frac{1}{2}}-(1-t+\tau)d\tau+\int_{-\frac{1}{2}}^{t}(1-t+\tau)d\tau=\frac{1}{4}+t+t^{2}$

2.24 解：a) $h_2(n)=\delta(n)+\delta(n-1)$，

$h(n)=h_1(n)*h_2(n)*h_2(n)=h_1(n)*\left(\delta(n)+2\delta(n-1)+\delta(n-2)\right)$；

$h(n)=h_1(n)+2h_1(n-1)+h_1(n-2)$，根据 h(n)的图形可推出 $h_1(n)$:

$h_1(0)=1$, : $h_1(1)=3$, : $h_1(2)=3$,　$h_1(4)=1$,: $h_1(5)=0$.n>5,h(n)=0.

b). $y(n)=h(n)-h(n-1)$

2.28 解：(a) $h[n]=\left(\frac{1}{5}\right)^{n}u[n]$

当$n<0$时，$h[n]=0$，因而是因果的。$\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left|h[k]\right|=\frac{5}{4}<\infty$，因而是稳定的。

(c) $h[n]=\left(\frac{1}{2}\right)^{n}u[-n]$

当$n<0$时，$h[n]\ne 0$，因而是非因果的。$\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left|h[k]\right|=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left|2^{k}\right|=\infty$，因而是非稳定的。

(e) $h[n]=\left(-\frac{1}{2}\right)^{n}u[n]+(1.01)^{n}u[-n-1]$

当$n<0$时，$h[n]=0$，因而是因果的。$\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left|h[k]\right|=\infty$，因而是非稳定的。

(g) $h[n]=n\left(\frac{1}{3}\right)^{n}u[n-1]$

当 $n<0$ 时，$h[n]=0$，因而是因果的。$\sum_{k=-\infty}^{+\infty}|h[k]|=\sum_{k=1}^{+\infty}k\left(\frac{1}{3}\right)^{k}=3<\infty$，因而是稳定的。

2.29 解：(b) $h(t)=e^{-6t}u(3-t)$

$t<0$ 时，$h(t)\neq 0$，因而是非因果的。$\int_{-\infty}^{+\infty}|h(\tau)|d\tau=\int_{-\infty}^{3}e^{-6\tau}d\tau=\infty$，因而是非稳定的。

(d) $h(t)=e^{2t}u(-1-t)$

$t<0$ 时，$h(t)\neq 0$，因而是非因果的。$\int_{-\infty}^{+\infty}|h(\tau)|d\tau=\int_{-\infty}^{-1}e^{2\tau}d\tau=\frac{1}{2}e^{-2}<\infty$，因而是稳定的。

(f). 因果的，稳定的。

2.31. 解：$\because$ 系统最初松弛， $\therefore$ 当 $n\le -3$ 时， $y(n)=0$

由 $y(n)=x(n)+2x(n-2)-2y(n-1)$ 可递推得出

$$
\begin{aligned}
&y(-2)=x(-2)+2x(-4)-2y(-3)=1\\
&y(-1)=x(-1)+2x(-3)-2y(-2)=0,\\
&y(0)=x(0)+2x(-2)-2y(-1)=5,\\
&y(1)=x(1)+2x(-1)-2y(0)=-4,\\
&y(2)=x(2)+2x(0)-2y(1)=16,\\
&y(3)=x(3)+2x(1)-2y(2)=-27,\\
&y(4)=x(4)+2x(2)-2y(3)=58,\\
&y(5)=x(5)+2x(3)-2y(4)=-114,
\end{aligned}
$$

$n\ge 6$ 时， $y(n)=-114(-2)^{n-5}$

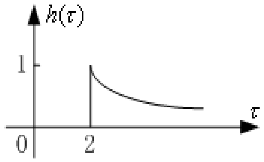
2.40 解：(a) $\because\ y(t)=\int_{-\infty}^{t}e^{-(t-\tau)}x(\tau-2)d\tau=\int_{-\infty}^{t-2}x(\sigma)e^{-(t-\sigma-2)}d\sigma=x(t)*e^{-(t-2)}u(t-2)$

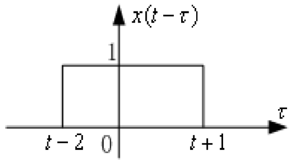
$\therefore\ h(t)=e^{-(t-2)}u(t-2)$

(b) 由图 PS3.7 知，当 $t\le 1$ 时， $y(t)=x(t)*h(t)=0$

当 $1<t\le 4$ 时， $y(t)=\int_{2}^{t+1}e^{-(\tau-2)}d\tau=1-e^{-(t-1)}$

当$t>4$时，$y(t)=\int_{t-2}^{t+1}e^{-(\tau-2)}d\tau=e^{-(t-4)}-e^{-(t-1)}$





2.44　a). $T_3=T_1+T_2$　b). $N_4=N_0+N_2$，$N_5=N_1+N_3$；$M_y=M_x+M_h-1$

2.47 (a) $\because\ x(t)=2x_0(t),\qquad h(t)=h_0(t)$

$\therefore\ y(t)=2x_0(t)*h_0(t)=2y_0(t)$　　如图 (a)所示。

(b) $\because\ \ x(t)=x_0(t)-x_0(t-2),\qquad h(t)=h_0(t)$

$\therefore\quad y(t)=y_0(t)-y_0(t-2)$　　如图 (b)所示。

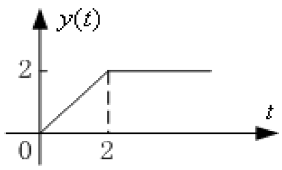
(c) $\because\quad x_0(t)*h_0(t+1)=y_0(t+1),\ \ x_0(t-2)*h_0(t+1)=y_0(t-1)$

$\therefore\quad y(t)=x_0(t-2)*h_0(t+1)=y_0(t-1)$　　如图 (c)所示。

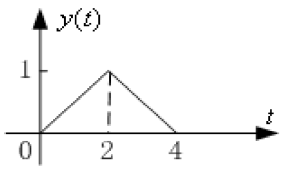
(d)　信号不能确定；

e). $y(t)=x(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x_0(-\tau)h_0(\tau-t)d\tau=\int_{-\infty}^{\infty}x_0(\tau)h_0(-t-\tau)d\tau=y_0(-t)$

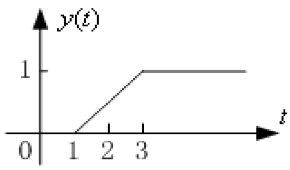
(f) $y(t)=x_0^{'}(t)*h_0^{'}(t)=y_0^{''}(t)$　　如图 (f)所示。



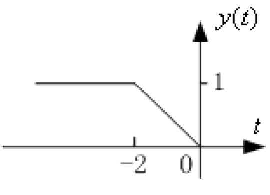
(a)



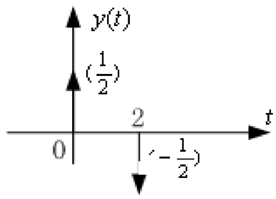
(b)



(c)



e



2.48 解：(a) 正确。$\because\ h(t)$为周期性非零函数时，$\int_{-\infty}^{\infty}|h(t)|dt=\infty$。

(b) 错误。若系统的冲激响应为$\delta(t-t_0),t_0>0$，则其逆系统的冲激响应为$\delta(t+t_0)$，显然是非因果的。

(c) 错误。若 $h(n)=u(n)$，显然 $|h(n)|\le 1$；但 $\sum_{n=-\infty}^{\infty}|h(n)|=\infty$，因此系统不稳定。

(d) 正确。$\because$ $h(n)$ 为有限长时，必然有 $\sum_{n=-\infty}^{\infty}|h(n)|<\infty$。

(e) 错误。若 $h(t)=u(t)$，显然系统是因果的，但由于 $\int_0^{\infty}|h(t)|=\infty$，因此系统不稳定。

(f) 错误。若系统 A 的冲激响应 $h_A(t)=\delta(t+3)$，系统 B 的冲激响应 $h_B(t)=\delta(t-5)$；系统 A 非因果，系统 B 因果；但它们级联后有 $h(t)=h_A(t)*h_B(t)=\delta(t-2)$，显然是因果的。

(g) 错误。若某系统的 $h(t)=e^{-t}u(t)$，显然该系统稳定，但其阶跃响应 $S(t)=\int_0^t e^{-\tau}d\tau=(1-e^{-t})u(t)$ 并不绝对可积。

(h) 正确。$\because$ $u(n)=\sum_{k=0}^{\infty}\delta(n-k),\ S(n)=\sum_{k=0}^{\infty}h(n-k)$，如果 $n<0$ 时，$S(n)=0$，则必有 $n<0$ 时，$h(n)=0$，从而系统是因果的。反之，若系统因果，则 $n<0$ 时，$h(n)=0$，从而必有 $n<0$，$s(n)=\sum_{k=-\infty}^{n}h(k)=0$。

2.50 解：(a) $\because$ 系统 B 是系统 A 的逆系统，$\therefore$ 图 P3.12 所示的整个系统是恒等系统。系统 A 对

$ax_1(t)+bx_2(t)$ 的响应为 $ay_1(t)+by_2(t)$，因此系统 B 对输入 $ay_1(t)+by_2(t)$ 的响应为 $ax_1(t)+bx_2(t)$。

(b) $\because$ 系统 A 对 $x_1(t-\tau)$ 的响应是 $y_1(t-\tau)$，

$\therefore$ 系统 B 对 $y_1(t-\tau)$ 的响应是 $x_1(t-\tau)$。

第三章

3.5 解：

由于 $x_2(t)$ 只是对 $x_1(t)$ 做了平移变换

所以，$\omega_1 = \omega_2$

而由傅立叶级数的性质有，$b_k = b_{k1} + b_{k2} = a_{-k}e^{-jk\omega_1} + a_k e^{-jk\omega_1}$

$$= e^{-jk\omega_1}(a_{-k} + a_k)$$

3.8 解：

由 1，$a_k^* = a_{-k} = -a_k, \therefore a_k$ 是虚的奇函数

由 2，$T = 2, \quad \omega = \frac{2\pi}{T} = \pi$

由 3，$x(t)$ 至多有三个非零傅立叶级数系数，a_0, a_1, a_{-1}

又 $a_0 = \frac{1}{T}\int_T x(t)dt = 0$，$a_{-1} = -a_1$

$\therefore x(t) = a_1(e^{j\pi t} - e^{-j\pi t})$

由 4，利用 parseval 定理，$\left|a_{-1}\right|^2 + \left|a_1\right|^2 = 1,$ 即 $\left|a_{-1}\right| = \left|a_1\right| = \frac{1}{2}$

$\therefore a_1 = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}j, a_{-1} = \mp\frac{\sqrt{2}}{2}j$

$\therefore x(t) = \pm\sqrt{2}\sin(\pi t)$

3.11 解：

由 1，a_k 是实偶函数

由 2，3 可知，$N = 10, a_{11} = 5 \Rightarrow a_1 = a_{-1} = 5$

由 4，$\frac{1}{10}\sum_{n=0}^{9}\left|x[n]\right|^2 = \sum_{k=0}^{9}\left|a_k\right|^2 = 50 \quad \Rightarrow \sum_{k=-5}^{5}\left|a_k\right|^2 = 50$

又 $a_1 = a_{-1} = 5$

$$\therefore a_k = \begin{cases} 5, & k = N \pm 1 \\ 0, & k\text{取其它值} \end{cases}$$

综上，$x[n] = \sum_{k=\langle N\rangle} a_k e^{j2\pi/N n} = \sum_{k=-5}^{5} a_k e^{j2\pi/N n} = 10\cos(\frac{\pi}{5}n)$

故有， $A=10, B=\dfrac{\pi}{5}, C=0$

3.22 解：

(a). (a) $T=2$，$\because x(t)$ 是实的奇函数，$\therefore a_0=0$

$$a_k=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} te^{-jk\pi t}=-\frac{1}{2jk\pi}\left[te^{-jk\pi t}\mid_{-1}^{1}+\frac{1}{jk\pi}e^{-jk\pi t}\mid_{-1}^{1}\right]=\frac{j(-1)^k}{k\pi},\ (k\neq 0)$$

$$\therefore\ x(t)=\sum_{k=-\infty}^{-1}\frac{j(-1)^k}{k\pi}e^{jk\pi t}+\sum_{k=-1}^{\infty}\frac{j(-1)^k}{k\pi}e^{jk\pi t}$$

b). $T=6$，$\therefore a_0=\dfrac{1}{2}$

$$a_k=\begin{cases}0 & k\ even\\ \dfrac{j(-1)^k}{k\pi} & k\ odd\end{cases},\ \therefore\ x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k e^{jkw_0 t}$$

c). T=3, $\therefore a_0=1$

$$a_k=\frac{3j}{2k^2\pi^2}\left[e^{jk2\pi/3}\sin(k2\pi/3)+2e^{jk\pi/3}\sin(k\pi/3)\right],\ (k\neq 0)$$

$$\therefore\ x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k e^{jk\omega_0 t}$$

3.28 解：

a). a) N=7, $a_k=\dfrac{1}{7}\displaystyle\sum_{n=0}^{6}x[n]e^{-j\frac{2\pi}{7}kn}=\dfrac{1}{7}\dfrac{e^{-j\frac{4\pi}{7}k}\sin(\frac{5\pi}{7}k)}{\sin(\frac{\pi}{7}k)}$

b). N=6, $a_k=\dfrac{1}{6}\displaystyle\sum_{n=0}^{5}x[n]e^{-j\frac{\pi}{3}kn}=\dfrac{1}{6}\sum_{n=0}^{5}e^{-j\frac{\pi}{3}kn}=\dfrac{1}{6}\bullet\dfrac{1-e^{-j\frac{4\pi}{3}k}}{1-e^{-j\frac{\pi}{3}k}}$

$$=\frac{1}{6}\frac{e^{-j\frac{\pi}{2}k}\sin\frac{2\pi}{3}k}{\sin\frac{\pi}{6}k}\quad 1\le k\le 5;\quad a_0=\frac{2}{3}$$

c). $a_k=\dfrac{1}{6}\displaystyle\sum_{n=-2}^{n=2}x[n]e^{-j\frac{\pi}{3}kn}=\dfrac{1}{6}[-e^{j\frac{2\pi}{3}k}+2e^{j\frac{\pi}{3}k}+1+2e^{-j\frac{\pi}{3}k}-e^{-j\frac{2\pi}{3}k}]$

$$=\frac{1}{6}+\frac{2}{3}\cos\frac{\pi}{3}k-\frac{1}{3}\cos\frac{2\pi}{3}k,\qquad 0\le k\le 5$$

c). (c) $\quad x[n]=1-\sin\frac{\pi n}{4}=1-\frac{1}{2j}(e^{j\frac{\pi}{4}n}-e^{-j\frac{\pi}{4}n})$, $\qquad (0\le n\le 3)$

$$a_k=\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{8}e^{-j\frac{\pi}{2}kn}-\frac{1}{8j}\sum_{n=0}^{8}e^{-j\frac{\pi}{2}n(k-\frac{1}{2})}+\frac{1}{8j}\sum_{n=0}^{8}e^{-j\frac{\pi}{2}n(k+\frac{1}{2})}$$

$$=\frac{1}{4}\bullet\frac{1-e^{-j2\pi k}}{1-e^{-j\frac{\pi}{2}k}}-\frac{1}{8j}\bullet\frac{1-e^{-j2\pi(k-\frac{1}{2})}}{1-e^{-j\frac{\pi}{2}(k-\frac{1}{2})}}+\frac{1}{8j}\bullet\frac{1-e^{-j2\pi(k+\frac{1}{2})}}{1-e^{-j\frac{\pi}{2}(k+\frac{1}{2})}}$$

$$=\frac{1}{4}\bullet\frac{1-e^{-j2\pi k}}{1-e^{-j\frac{\pi}{2}k}}-\frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}/2}{2\cos\frac{\pi}{2}k-\sqrt{2}}$$

即： $a_0=1-\frac{1}{4}(1+\sqrt{2})=\frac{3-\sqrt{2}}{4}$,

$$a_k=\frac{1}{4}(-1)^{k+1}(1+\sqrt{2}\cos\frac{k\pi}{2}),\qquad k=1,2,3$$

(d) $\quad a_k=\frac{1}{12}\sum_{n=0}^{11}e^{-j\frac{\pi}{6}kn}-\frac{1}{24j}\sum_{n=0}^{11}e^{-j\frac{\pi}{6}n(k-\frac{3}{2})}+\frac{1}{24j}\sum_{n=0}^{11}e^{-j\frac{\pi}{6}n(k+\frac{3}{2})}$

$$=\frac{1}{12}\bullet\frac{1-e^{-j2\pi k}}{1-e^{-j\frac{\pi}{6}k}}-\frac{1}{24j}\bullet\frac{1-e^{-j2\pi(k-\frac{3}{2})}}{1-e^{-j\pi/6(k-\frac{3}{2})}}+\frac{1}{24j}\bullet\frac{1-e^{-j2\pi(k+\frac{3}{2})}}{1-e^{-j\pi/6(k+3/2)}}$$

$$=\frac{1}{12}\bullet\frac{1-e^{-j2\pi k}}{1-e^{-j\frac{\pi}{6}k}}-\frac{1}{6}\bullet\frac{\sqrt{2}/2}{2\cos\frac{\pi}{6}k-\sqrt{2}}$$

即： $a_0=1-\frac{1}{6}\bullet\frac{\sqrt{2}/2}{2-\sqrt{2}}=\frac{11-\sqrt{2}}{12}$

$$a_k=-\frac{1}{12}\frac{\sqrt{2}}{2\cos\frac{\pi}{6}k-\sqrt{2}}=-\frac{1}{12}\frac{\sqrt{2}\cos\frac{k\pi}{6}+1}{\cos\frac{\pi}{3}k},\qquad 1\le k\le 11$$

3.30 N=6, a). $a_0=1, a_1=a_{-1}=1/2$, b). $b_1=b^*_{-1}=e^{-j\pi/4}/2$,

c). $c_k=\sum_{l=-2}^{2}a_l b_{k-l}$,可求得： $c_0=\cos(\pi/4)/2, c_1=c^*_{-1}=e^{-j\pi/4}/2, c_2=c^*_{-2}=e^{-j\pi/4}/2$

3.34 解：设 $y(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}b_k e^{jk\omega_0 t}$,则 $b_k=a_k H(k\omega_0)$;其中 a_k 、 b_k 分别是 $x(t)$ 和 $y(t)$ 的傅里叶

级数系数。

$$H(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-4|t|}e^{-j\omega t}dt=\frac{8}{\omega^2+16}$$

(c) $x(t)=\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n\delta(t-n)$; $T=2,\omega_0=\pi;$

$$a_k=\frac{1}{2}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\left[\delta(t)-\delta(t-1)\right]e^{-jk\pi t}dt=\frac{1}{2}(1-e^{jk\pi})=\begin{cases}0, & k偶\\1, & k奇\end{cases}$$

$$\therefore \quad b_k=\begin{cases}0 & ,\ k偶\\ \dfrac{1}{4+jk\pi}, & k奇\end{cases}$$

(d) 由图所示 $x(t)$ 可得： $T=1,\omega_0=2\pi$

$$a_0=\frac{1}{2},\ a_k=\frac{1}{2}\frac{\sin(k\pi/2)}{k\pi/2},\ k=\pm1,\pm2,\cdots\cdots$$

$$\therefore \quad b_0=\frac{1}{8},\ b_k=\begin{cases}0 & ,k偶，k\neq0\\ \dfrac{\sin(k\pi/2)}{k\pi(4+j2k\pi)}, & k奇\end{cases}$$

3.36 解： $e^{j\omega n}\to H(e^{j\omega})e^{j\omega n}$，将此代入差分方程中可得：

$$e^{j\omega n}H(e^{j\omega})-\frac{1}{4}e^{-j\omega}e^{j\omega n}H(e^{j\omega})=e^{j\omega n},\ 求得\ H(e^{j\omega})=\frac{1}{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}},$$

a). N=8, 信号中的谐波分量为正负 3 次谐波，可得 $a_3=a^*_{-3}=1/2j,$

输出信号中的傅立叶级数系数为

$$b_3=a_3H(e^{j3\pi/4}),b_{-3}=a_{-3}H(e^{-j3\pi/4})$$

b). N=8, 信号中的谐波分量为正负 1 次谐波与正负 2 次谐波，可得

$$a_1=a_{-1}=1/2,\ a_2=a_{-2}=1$$

输出信号中的傅立叶级数系数为

$$b_1=a_1H(e^{j\pi/4}),b_{-1}=a_{-1}H(e^{-j\pi/4}),b_2=a_2H(e^{j\pi/2}),b_{-2}=a_{-2}H(e^{-j\pi/2})$$

3.43 解：

(a) $a_k=\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T x(t)e^{-jk\frac{2\pi}{T}t}dt=\frac{1}{T}\left[\int_0^{T/2}x(t)e^{-jk\frac{2\pi}{T}t}dt+\int_{T/2}^{T}x(t)e^{-jk\frac{2\pi}{T}t}dt\right]$

若 $x(t)=-x(t+\dfrac{T}{2})$，则 $a_k=\dfrac{1}{T}\left[\displaystyle\int_0^{T/2}x(t)e^{-jk\frac{2\pi}{T}t}dt-(-1)^{k\pi}\int_0^{T/2}x(t)e^{-jk\frac{2\pi}{T}t}dt\right]$

当 k 为奇数时， $a_k = \frac{2}{T}\int_0^{T/2} x(t) e^{-jk\frac{2\pi}{T}t} dt$

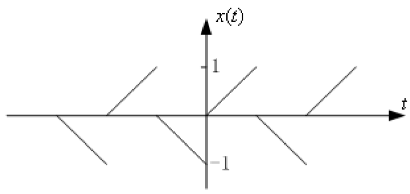
当 k 为偶数时， $a_k = 0$

$\therefore$ 只有奇次谐波

(b) $x(t): T = 2,$ 奇谐信号， $x(t) = -x(t - \frac{T}{2})$

$$\therefore x(t) = \begin{cases} t \quad ,0 < t < 1 \\ -(1+t), \ -1 < t < 0 \end{cases}$$

$x(t)$ 如下图所示。



$$a_k = \int_0^1 t e^{-jk\pi t} dt = -\frac{1}{jk\pi}\left[t e^{-jk\pi t} + \frac{1}{jk\pi} e^{-jk\pi t} \right]\Bigg|_0^1$$ ，（k 为奇数）

$$= \frac{1}{jk\pi} - \frac{2}{(k\pi)^2}$$

$a_k = 0$， （k 为偶数）

3.44 解：

由 T＝6，可得 $\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{3}$

由条件 4 可知， $\sum_{-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\frac{\pi}{3}t} = -\sum_{-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\frac{\pi}{3}(t-3)}$

即， $(-1)^{k+1} = 1$，所以 k 为奇数

由于当 k＝0 和 k>2 时，有 $a_k = 0$

所以 当 k＝2 时， $a_2 = 0$ 且 $a_{-2} = 0$

因此， $x(t) = a_1 e^{j\frac{\pi}{3}t} + a_{-1} e^{-j\frac{\pi}{3}t}$

又由 $x(t)$ 为实信号可知， $a_1^* = a_{-1} = a_1$

由条件 5，6 可知 $\frac{1}{6}\int_{-3}^{3} |x(t)|^2 dt = a_1^2 + a_{-1}^2 = 2a_1^2 = \frac{1}{2}$

所以 $a_{-1}=a_1=\frac{1}{2}$

则，$A=1,\quad B=\frac{\pi}{3}$，$\quad C=0$

3.48 解：

(a) $\hat{a}_k=\frac{1}{N}\sum_{n=<N>}x[n-n_0]e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}=\frac{1}{N}\sum_{m=<N>}x[m]e^{-jk\frac{2\pi}{N}m}\bullet e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}=a_k e^{-jk\frac{2\pi}{N}n_0}$

(b) $\hat{a}_k=\frac{1}{N}\sum_{n=<N>}(x[n]-x[n-1])e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}=a_k-a_k e^{-jk\frac{2\pi}{N}}$

c). $\hat{a}_k=\frac{1}{N}\sum_{n=<N>}(x[n]-x[n-\frac{N}{2}])e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}=a_k-a_k e^{-jk\pi}=\begin{cases}0 & keven\\ 2a_k & k\ odd\end{cases}$

(d)

$$\begin{aligned}
\hat{a}_k&=\frac{2}{N}\sum_{n=<N/2>}(x[n]+x[n+\frac{N}{2}])e^{-jk\frac{4\pi}{N}n}\\
&=\frac{2}{N}\left(\sum_{n=0}^{N-1}x[n]e^{-j2k\frac{2\pi}{N}n}+\sum_{n=0}^{N/2-1}x[n+\frac{N}{2}]e^{-jk\frac{4\pi}{N}n}-\sum_{n=N/2}^{N-1}x[n]e^{-jk\frac{4\pi}{N}n}\right)\\
&\left(\text{令}m=n-\frac{N}{2}\right)=2a_{2k}+\frac{2}{N}\sum_{n=0}^{N/2-1}x\left[n+\frac{N}{2}\right]e^{-jk\frac{4\pi}{N}n}-\sum_{m=0}^{N/2-1}x\left[m+\frac{N}{2}\right]e^{-jk\frac{4\pi}{N}\left(m+\frac{N}{2}\right)}\\
&=2a_{2k}+\frac{2}{N}\sum_{n=0}^{N/2-1}x\left[n+\frac{N}{2}\right]e^{-jk\frac{4\pi}{N}n}-\sum_{n=0}^{N/2-1}x\left[n+\frac{N}{2}\right]e^{-jk\frac{4\pi}{N}n}e^{-jk2\pi}\\
&=2a_{2k}
\end{aligned}$$

$\therefore \hat{a}_k=2a_{2k}$

e). $\hat{a}_k=\frac{1}{N}\sum_{n=<N>}x^*[-n\ ]e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}=\frac{1}{N}[\sum_{n=<N>}x[-n]e^{jk\frac{2\pi}{N}n}]^*=a_k{}^*$

f) $\hat{a}_k=\frac{1}{N}\sum_{n=<N>}(-1)^n x[n\ ]e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}=\frac{1}{N}[\sum_{n=<N>}x[n]e^{-j(k-\frac{N}{2})\frac{2\pi}{N}n}]=a_{(k-\frac{N}{2})}$

(k=0,1,2,……..N-1)

g) $\hat{a}_k=\frac{1}{2N}\sum_{n=<2N>}(-1)^n x[n\ ]e^{-jk\frac{\pi}{N}n}=\frac{1}{2N}\sum_{n=<2N>}x[n]e^{-jk\frac{\pi}{N}n}\bullet e^{j\pi n}$

$$=\frac{1}{2N}[\sum_{n=0}^{N-1}x[n]e^{-j\frac{2\pi}{N}n(\frac{k-N}{2})}+\sum_{n=N}^{2N-1}x[n]e^{-j\frac{2\pi}{N}n(\frac{k-N}{2})}]$$

$$=\frac{1}{2N}[\sum_{n=0}^{N-1}x[n]e^{-j\frac{2\pi}{N}n(\frac{k-N}{2})}+\sum_{n=0}^{N-1}x[n+N]e^{-j\frac{2\pi}{N}n(\frac{k-N}{2})}\bullet e^{-j\pi(k-N)}]$$

$$=\frac{1}{2}a_{(k-N)/2}(1+e^{-j\pi(k-N)})$$

$$=\begin{cases} a_{(k-N)/2}，\text{k为奇数} \\ 0，\text{k为偶数} \end{cases}$$

(h) ∵ $y(n)=\frac{1}{2}\left(x(n)+(-1)^n x(n)\right)$

对信号 x(n)周期为偶数时，y(n)的周期大小不变，仍为 N, 直接利用变换性质即可，

$$\hat{a}_k=\frac{1}{2}\left[a_k+a_{k-\frac{N}{2}}\right]$$

对信号 x(n)周期为奇数时，此时 y(n)的周期性发生了变换，周期为 2*N*, 傅立叶级数系数为

$$\hat{a}_k=\frac{1}{2N}\sum_{n=<2N>}(x(n)+(-1)^n x(n))e^{-jk\frac{2\pi}{2N}n}$$

再分成前后两部分，

$$\hat{a}_k=\frac{1}{2N}\left\{\sum_{n=0}^{N-1}(x(n)+(-1)^n x(n))e^{-jk\frac{2\pi}{2N}n}+\sum_{n=N}^{2N-1}(x(n)+(-1)^n x(n))e^{-jk\frac{2\pi}{2N}n}\right\}$$

经整理后得：

$$\hat{a}_k=\frac{1}{2N}\left\{\sum_{n=0}^{N-1}(x(n)+(-1)^n x(n))e^{-jk\frac{2\pi}{2N}n}+\sum_{n=0}^{N-1}(x(n)-(-1)^n x(n))e^{-jk\frac{2\pi}{2N}n}(-1)^k\right\}$$

$$\therefore \quad \hat{a}_k=\frac{1}{2}a_k$$

3.52 解： (a) ∵ x[n]是实信号，∴ $x*[n]=x[n]$

而 $x*[n]=\sum_{k=0}^{N-1}a_k*e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}=\sum_{k=0}^{N-1}a_{-k}*e^{jk\frac{2\pi}{N}n}=x[n]=x*[n]=\sum_{k=0}^{N-1}a_k e^{jk\frac{2\pi}{N}n}$

∴ $a_k=a_{-k}*$或写为$a_k*=a_{-k}$

令 $a_k=b_k+jc_k$，则有$a_{-k}=b_{-k}+jc_{-k}$，从而有

$b_k=b_{-k}$， $c_k=-c_{-k}$

(b) 当 N 为偶数时，$N/2$为一整数。

$$a_{N/2}=\frac{1}{N}\sum_{0}^{N-1}x[n]e^{-j\frac{2\pi}{N}\bullet\frac{N}{2}n}=\frac{1}{N}\sum_{0}^{N-1}x[n]e^{-j\pi n}=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}(-1)^n x[n]$$

显然， $a_{N/2}$是一个实数。

(c) $x[n]=\sum_{k=0}^{N-1} a_k e^{jk\frac{2\pi}{N}n}=\sum_{k=0}^{N-1}(b_k+jc_k)e^{jk\frac{2\pi}{N}n}$

当 N 为奇数时，上式可写为:

$$x[n]=a_0+\sum_{k=1}^{(N-1)/2}(a_k e^{jk\frac{2\pi}{N}n}+a_{-k}e^{j\frac{2\pi}{N}(-k)n})$$

$$x(n)=a_0+\sum_{k=1}^{(N-1)/2}(a_k e^{jk\frac{2\pi}{N}n}+a^*{}_k e^{-j\frac{2\pi}{N}kn})=a_0+2\sum_{k=1}^{(N-1)/2}\mathrm{Re}\left\{a_k e^{jk\frac{2\pi}{N}n}\right\}$$

$$=a_0+2\sum_{k=1}^{(N-1)/2}(b_k\cos\frac{2\pi}{N}kn-c_k\sin(\frac{2\pi}{N}kn)\ )$$

当 N 为偶数时，有 $x[n]=a_0+a_{N/2}(-1)^n+\sum_{k=1}^{(N)/2-1}(a_k e^{jk\frac{2\pi}{N}n}+a_{-k}e^{j\frac{2\pi}{N}(-k)n})$

$$x(n)=a_0+a_{N/2}(-1)^n+\sum_{k=1}^{(N)/2-1}(a_k e^{jk\frac{2\pi}{N}n}+a^*{}_k e^{-j\frac{2\pi}{N}kn})$$

$$=a_0+a_{N/2}(-1)^n+2\sum_{k=1}^{(N)/2-1}(b_k\cos\frac{2\pi}{N}kn-c_k\sin(\frac{2\pi}{N}kn)\ )$$

(d) 由(c)知，当 $a_k=A_k e^{j\theta_k}$ 时，有

N 为奇数时：

$$x[n]=a_0+2\sum_{k=1}^{(N-1)/2}\mathrm{Re}\{a_k e^{jk\frac{2\pi}{N}n}\}=a_0+2\sum_{k=1}^{(N-1)/2}(A_k\cos(\frac{2\pi}{N}kn+\theta_K)$$

N 为偶数时：

$$x[n]=a_0+a_{N/2}(-1)^n+2\sum_{k=1}^{(N)/2-1}(\mathrm{Re}\{a_k e^{jk\frac{2\pi}{N}n}\}$$

$$=a_0+a_{N/2}(-1)^n+2\sum_{k=1}^{(N)/2-1}A_k\cos(\frac{2\pi}{N}kn+\theta_k)$$

(e) $\because$ $y(n)=(a_0-d_0)+2\sum_{k=1}^{3}[d_k\cos(2\pi kn/7)+(f_k-c_k)\sin(2\pi kn/7)]$

分别求出信号 x(n),z(n)的偶部与奇部

$$E_v\{x[n]\}=a_0+2\sum_{k=1}^{3}b_k\cos\frac{2\pi}{7}kn,\quad O_d\{x[n]\}=-2\sum_{k=1}^{3}c_k\sin\frac{2\pi}{7}kn$$

$$E_v\{z[n]\}=d_0+2\sum_{k=1}^{3}d_k\cos\frac{2\pi}{7}kn,\quad O_d\{z[n]\}=-2\sum_{k=1}^{3}f_k\sin\frac{2\pi}{7}kn$$

$$\therefore \quad y(n) = a_0 - 2d_0 + E_v\{z[n]\} + O_d\{x[n]\} - O_d\{z[n]\}$$

Chapter 4 习题解答

4.10 (a) 解：$x(t)=\frac{1}{\pi}\sin t\cdot\frac{\sin t}{\pi t}$

令：$x_1(t)=\sin t, x_2(t)=\frac{\sin t}{\pi t}$

则：

$$X_1(j\omega)=\frac{\pi}{j}\delta(\omega-1)-\frac{\pi}{j}\delta(\omega+1)$$

$$X_2(j\omega)=\begin{cases}0,|\omega|>1\\1,|\omega|<1\end{cases}$$

所以：$X(j\omega)=\begin{cases}\frac{j}{2\pi},-2\le\omega<0\\-\frac{j}{2\pi},0\le\omega<2\\0,\text{其他}\omega\end{cases}$

（b）$A=\int_{-\infty}^{+\infty}t^2(\frac{\sin t}{\pi t})^4dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|X(j\omega)|^2d\omega=\frac{1}{2\pi^3}$

4.11 证明：$G(j\omega)=\frac{1}{3}X(j\omega)\cdot\frac{1}{3}H(\frac{j\omega}{3})=\frac{1}{9}Y(j\omega)$

因为 $y(3t)\leftrightarrow\frac{1}{3}Y(\frac{j\omega}{3})$

所以 $\frac{1}{3}y(3t)\leftrightarrow\frac{1}{9}Y(\frac{j\omega}{3})=G(j\omega)$

即：$g(t)=\frac{1}{3}y(3t)\Rightarrow A=\frac{1}{3},B=3$

4.13 (a) $x(t)=\frac{1}{2\pi}(1+e^{j\pi t}+e^{j5t})\Rightarrow x(t)$非周期

(b) $F\left[x(t)*h(t)\right]=X(j\omega)\cdot H(j\omega)$

$$=\left[\delta(\omega)+\delta(\omega-2)+\delta(\omega-5)\right]\cdot\left[\frac{1}{j\omega}+\pi\delta(\omega)-(\frac{1}{j\omega}+\pi\delta(\omega))e^{-j\omega2}\right]$$

则：$x(t)*h(t)=F^{-1}\left[X(j\omega)\cdot H(j\omega)\right]=\frac{1}{10\pi j}(1-e^{-10j})e^{j5t}$

因此：$x(t)*h(t)$是周期的，周期为$\frac{2}{5}\pi$。

(c) 由(b)可知，$x(t)$ 和 $h(t)$ 都不是周期的，但卷积周期。这说明两个非周期信号的卷积有可能是周期的。

4.14 解： 由条件 2 得：$F\left[Ae^{-2t}u(t)\right]=\dfrac{A}{2+j\omega}$

所以：$(1+j\omega)X(j\omega)=\dfrac{A}{2+j\omega}$

即：$X(j\omega)=\dfrac{A}{(2+j\omega)(1+j\omega)}=A(\dfrac{1}{1+j\omega}-\dfrac{1}{2+j\omega})$

$x(t)=A(e^{-t}-e^{-2t})u(t)$

由条件 3 知：$\int_{-\infty}^{+\infty}\left|x(t)\right|^2 dt=1 \Rightarrow \int_{0}^{+\infty}A^2(e^{-t}-e^{-2t})^2 dt=1$

$\Rightarrow A^2=12$，由 $x(t)\geq 0 \Rightarrow A=2\sqrt{3}$

从而有 $x(t)=2\sqrt{3}(e^{-t}-e^{-2t})u(t)$。

4.21 解 (a) $[e^{-at}\cos w_0 t]u(t), a>0$

$$e^{-at}u(t), a>0 \leftrightarrow \frac{1}{a+jw}$$

$$\therefore X(jw)=\frac{1}{2}[\frac{1}{a+j(w-w_0)}+\frac{1}{a+j(w+w_0)}]$$

(c)

$$x(t)=\begin{cases}1+\cos\pi t, |t|\leq 1\\ 0, |t|>1\end{cases}$$

$$x(t)=\begin{cases}1+\cos\pi t, |t|\leq 1\\ 0, |t|>1\end{cases}=\begin{cases}1, |t|\leq 1\\ 0, |t|>1\end{cases}+\begin{cases}\frac{1}{2}e^{j\pi t}, |t|\leq 1\\ 0, |t|>1\end{cases}+\begin{cases}\frac{1}{2}e^{-j\pi t}, |t|\leq 1\\ 0, |t|>1\end{cases}$$

$$\therefore X(w)=\frac{2\sin w}{w}+\frac{\sin w}{\pi-w}-\frac{\sin w}{w+\pi}$$

$(e)[te^{-2t}\sin 4t]u(t),$

$\because e^{-2t}\sin 4tu(t)\leftrightarrow A(w)=\frac{1}{-2j}[\frac{1}{2+j(w+4)}-\frac{1}{2+j(w-4)}]$

$\therefore X(w)=j\frac{dA(w)}{dw}=\frac{j}{2}[\frac{1}{[2+j(w+4)]^2}-\frac{1}{[2+j(w-4)]^2}]$

(g) 如图所示

$\because \frac{dx(t)}{dt}=-\delta(t+2)-\delta(t-2)+\begin{cases}1,|t|\le 1\\0,|t|>1\end{cases}$

$-\delta(t+2)-\delta(t-2)\leftrightarrow -2\cos 2w;$

$\begin{cases}1,|t|\le 1\\0,|t|>1\end{cases}\leftrightarrow\frac{2\sin w}{w}$

$\frac{dx(t)}{dt}\leftrightarrow A(w)=-2\cos 2w+\frac{2\sin w}{w}$;而且$A(0)=0$

$\therefore X(w)=\frac{A(w)}{jw}+\pi A(0)\delta(w)=\frac{2}{jw}[-\cos 2w+\frac{\sin w}{w}]$

$(a)X(jw)=\frac{2\sin[3(w-2\pi)]}{w-2\pi}$

4．22 解 $\because\begin{cases}1,|t|\le 3\\0,|t|>3\end{cases}\leftrightarrow\frac{2\sin 3w}{w}$

$\therefore x(t)=\begin{cases}e^{j2\pi t},|t|\le 3\\0,|t|>3\end{cases}$

(c) $\because\begin{cases}j,-1\le w\le 0\\-j,0\le w\le 1\end{cases}=j\begin{cases}1,-1\le w\le 0\\0,0\le w\le 1\end{cases}+(-j)\begin{cases}0,-1\le w\le 0\\1,0\le w\le 1\end{cases}$

$\leftrightarrow a(t)=je^{-j0.5t}\frac{\sin 0.5t}{\pi t}+(-j)e^{j0.5t}\frac{\sin 0.5t}{\pi t}=\frac{2\sin^2 0.5t}{\pi t}$

$\therefore\begin{cases}-w,-1\le w\le 0\\w,0\le w\le 1\end{cases}\leftrightarrow\frac{da(t)}{dt}=\frac{1}{\pi}[\frac{\sin t}{t}-\frac{1-\cos t}{t^2}]$

$\therefore\begin{cases}-we^{-j3w},-1\le w\le 0\\we^{-j3w},0\le w\le 1\end{cases}\leftrightarrow\frac{1}{\pi}[\frac{\sin(t-3)}{t-3}-\frac{1-\cos(t-3)}{(t-3)^2}]$

$x(t)=\frac{1}{\pi}[\frac{\sin(t-3)}{t-3}-\frac{1-\cos(t-3)}{(t-3)^2}]$

(e) $\because \dfrac{\mathrm{dX(w)}}{\mathrm{dw}} = -\delta(w+3) - \delta(w-3) + \begin{cases} 1, -2 \le w \le -1 \\ 0, 其他 \end{cases} + \begin{cases} 1, 1 \le w \le 2 \\ 0, 其他 \end{cases}$

$\therefore -jtx(t) = -\dfrac{1}{2\pi} e^{-j3t} - \dfrac{1}{2\pi} e^{j3t} + e^{-j1.5t} \dfrac{\sin 0.5t}{\pi t} + e^{j1.5t} \dfrac{\sin 0.5t}{\pi t}$

$\therefore x(t) = \dfrac{\cos 3t}{j\pi t} - \dfrac{2\sin 0.5t \cos 1.5t}{j\pi t^2} = \dfrac{\cos 3t}{j\pi t} + \dfrac{\sin t - \sin 2t}{j\pi t^2}$

4.24 解 (a) （1）说明 x(t)是实奇的，满足的有 a,d;

（2）说明 x(t)是实偶的,满足的有 e,f;

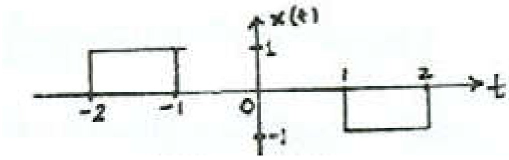
(3)存在 a 使得 x(t+a)为实偶的；

（4）说明 x(0)=0,满足的有 a,b,c,d,f;

(5) 说明 $\dfrac{dx(t)}{dt}\Big|_{t=0} = 0$, 满足的有 b,c,e,f;

(6)说明 x(t)是离散的，满足的有 b.

(b)要求只满足（1）（4）（5），其余不满足。例如：



4.25 (a) $\because$ x(t+1)是实偶的，则$e^{jw}X(w)$为实偶的

$\therefore \sphericalangle X(w)=-w$

$$(b)X(j0)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)dt=7$$

$$(c)2\pi x(0)=\int_{-\infty}^{\infty}X(w)dw=7$$

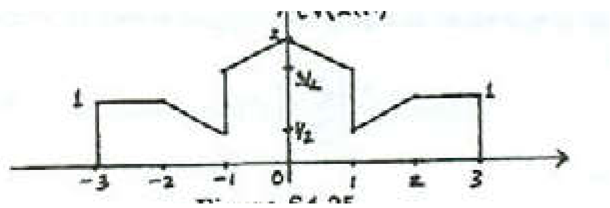
$$(d)a(t)=\begin{cases}1,-3\le t\le -1\\0,otherwise\end{cases}\leftrightarrow e^{j2w}\frac{2\sin w}{w}$$

$$\therefore\int_{-\infty}^{\infty}X(w)e^{j2w}\frac{2\sin w}{w}dw=2\pi x(t)\otimes a(t)\big|_{t=0}=7\pi$$

$$(e)\int_{-\infty}^{\infty}\left|X(w)\right|^2dw=2\pi\int_{-\infty}^{\infty}\left|x(t)\right|^2dt=26\pi$$

$$(f)x_e(t)\leftrightarrow \operatorname{Re}\{X(w)\}$$

$\therefore x_e(t)$如下图所示



4.27 解：(a) 设：$x(t)=y(t-2)$，

$$则：F\left[y(t)\right]=\int_{-1}^{0}e^{-j\omega t}dt+\int_{0}^{1}-e^{-j\omega t}dt=-\frac{2j(\cos\omega-1)}{\omega}$$

$$所以：X(j\omega)=-\frac{2j(\cos\omega-1)}{\omega}e^{-j2\omega}$$

$$(b)\quad a_k=\frac{1}{T}\int_T\tilde{x}(t)e^{-j\omega kt}dt=-\frac{j(\cos\frac{2\pi k}{T}-1)}{\pi k}e^{-j\frac{4\pi k}{T}}$$

$$\Rightarrow a_k=\frac{1}{T}X(j\frac{2\pi k}{T})$$

$$4.31(a) H_1(w)=\frac{1}{jw}+\pi\delta(w),$$

$$H_2(w)=\frac{5}{2+jw}-2,$$

$$H_3(w)=\frac{2}{(1+jw)^2};$$

经计算得: $Y_1(w)=Y_2(w)=Y_3(w)=X_1(w)H_1(w)=X_2(w)H_2(w)=X_3(w)H_3(w)$

$$=\frac{\pi}{j}[\delta(w-1)+\delta(w+1)]$$

$\therefore y(t)=\sin t$

(b) 例如：$h_4(t)=0.5h_1(t)+0.5h_2(t)$可以证明当组合系数总和为1时，$h_1(t),h_2(t),h_3(t)$的线性组合均符合题意

$$4.32\, h(t)=\frac{\sin 4(t-1)}{\pi(t-1)},$$

$$\because \frac{\sin 4t}{\pi t}\leftrightarrow \begin{cases}1, |w|<4\\ 0, |w|>4\end{cases}$$

$$\therefore H(w)=\begin{cases}e^{-jw}, |w|<4\\ 0, |w|>4\end{cases}$$

$$(a) x_1(t)=\cos(6t+\frac{\pi}{2}),$$

$$\because \cos(t+\frac{\pi}{2})\leftrightarrow e^{jw\frac{\pi}{2}}\pi[\delta(w-1)+\delta(w+1)],$$

$$\therefore X_1(w)=\frac{\pi}{6}e^{jw\frac{\pi}{12}}[\delta(w-6)+\delta(w+6)]$$

$$\therefore Y_1(w)=X_1(w)H(w)=0$$

$$\therefore y_1(t)=0$$

$$(b) x_2(t)=\sum_{k=0}^{\infty}(\frac{1}{2})^k\sin 3kt$$

$$X_2(w)=\frac{\pi}{j}\sum_{k=0}^{\infty}(\frac{1}{2})^k[\delta(w-3k)-\delta(w+3k)]$$

$$\therefore Y_2(w)=\frac{\pi}{j}[\frac{1}{2}e^{-3j}\delta(w-3)-\frac{1}{2}e^{3j}\delta(w+3)]=\frac{\pi}{j}\frac{1}{2}e^{-jw}[\delta(w-3)-\delta(w+3)]$$

$$\therefore y_2(t)=0.5\sin 3(t-1)$$

$$(c)x_3(t)=\frac{\sin 4(t+1)}{\pi(t+1)},$$

$$\because \frac{\sin 4t}{\pi t}\leftrightarrow\begin{cases}1,|w|<4\\0,|w|>4\end{cases}$$

$$\therefore H(w)=\begin{cases}e^{jw},|w|<4\\0,|w|>4\end{cases}$$

$$\therefore Y_3(w)=\begin{cases}1,|w|<4\\0,|w|>4\end{cases}$$

$$\therefore y_3(t)=\frac{\sin 4t}{\pi t}$$

$$(d)x_4(t)=(\frac{\sin 2t}{\pi t})^2,$$

$$\because \frac{\sin 2t}{\pi t}\leftrightarrow\begin{cases}1,|w|<2\\0,|w|>2\end{cases}$$

$$\therefore X_4(w)=\frac{1}{2\pi}\begin{cases}1,|w|<2\\0,|w|>2\end{cases}\otimes\begin{cases}1,|w|<2\\0,|w|>2\end{cases}=\begin{cases}\frac{-w+4}{8\pi},w>0\\\frac{w+4}{8\pi},w<0\end{cases}$$

$$\therefore y_4(t)=x_4(t-1)=[\frac{\sin 2(t-1)}{\pi(t-1)}]^2$$

$$4.34H(w)=\frac{Y(w)}{X(w)}=\frac{jw+4}{6-w^2+5jw}=\frac{2}{2+jw}-\frac{1}{3+jw}$$

$$(a)\frac{dx(t)}{dt}+4x(t)=6y(t)+\frac{dy^2(t)}{dt^2}+5\frac{dy(t)}{dt},$$

$$(b)h(t)=(2e^{-2t}+e^{-3t})u(t)$$

$$x(t)=(e^{-4t}-te^{-4t})u(t)$$

$$X(w)=\frac{3+jw}{(4+jw)^2}$$

$$(c)\therefore Y(w)=\frac{-0.5}{4+jw}+\frac{0.5}{2+jw}$$

$$\therefore y(t)=(-0.5e^{-4t}+0.5e^{-2t})u(t)$$

$4.35(a)$

$$H(w)=\frac{a-jw}{a+jw},\left|H(w)\right|=\left|\frac{a-jw}{a+jw}\right|=\frac{a^2+w^2}{a^2+w^2}=1,$$

$$\measuredangle H(w)=tg^{-1}\frac{-2w}{a^2-w^2}=-2tg^{-1}\frac{w}{a}$$

$$(b)\,y(t)=\cos(\frac{t}{\sqrt{3}}-\frac{\pi}{3})-cos(t-\frac{\pi}{2})+\cos(\sqrt{3}t-\frac{2\pi}{3})$$

4.36 解：(a) 由于$Y(j\omega)=X(j\omega)\cdot H(j\omega)$

$$因此：H(j\omega)=\frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)}=\frac{\frac{2}{1+j\omega}-\frac{2}{4+j\omega}}{\frac{1}{1+j\omega}+\frac{2}{3+j\omega}}=\frac{9+3j\omega}{8+6j\omega-\omega^2}$$

(b) $H(j\omega)=\frac{3}{2}(\frac{1}{2+j\omega}+\frac{1}{4+j\omega})$

所以：$h(t)=\frac{3}{2}(e^{-2t}+e^{-4t})u(t)$

(c) 由于$H(j\omega)=\frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)}=\frac{9+3j\omega}{8+6j\omega+(j\omega)^2}$

所以关联该系统的输入和输出的微分方程为：

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2}+6\frac{dy(t)}{dt}+8y(t)=3\frac{dx(t)}{dt}+9x(t)$$

4.43 解：设$Y(j\omega)=F\left[\frac{\sin t}{\pi t}\right]=\begin{cases}1,|\omega|<1\\0,|\omega|>1\end{cases}$

对$g(t)=x(t)\cos^2 t*\frac{\sin t}{\pi t}$两边取傅立叶变换，其中$|\omega|<1$。

$$G(j\omega)=F\left[x(t)\cos^2 t\right]Y(j\omega)=\frac{1}{2}F\left[x(t)\left(\cos 2t+1\right)\right]Y(j\omega)$$

$$=\left\{\frac{1}{2}X(j\omega)+\frac{1}{2}F\left[x(t)\cos 2t\right]\right\}Y(j\omega)$$

$$=\left\{\frac{1}{2}X(j\omega)+\frac{1}{4}X[j(\omega-2)]+\frac{1}{4}X[j(\omega+2)]\right\}Y(j\omega)$$

由于$|\omega|\geq 1$时，$X(j\omega)=0$

所以 $X[j(\omega-2)]=0$， $X[j(\omega+2)]=0$

即：$G(j\omega)=\dfrac{1}{2}X(j\omega)Y(j\omega)$。也就是说，存在一个 LTI 系统 S，其单位冲激响应为：$h(t)=\dfrac{\sin t}{2\pi t}$，有 $x(t)\xrightarrow{S}g(t)$。

4.47 $(a)h_e(t)=\dfrac{h(t)+h(-t)}{2}$ 由于 h(t) 是实因果的，

$$\therefore h_e(t)\leftrightarrow H_e(w)=\frac{H(w)+H(-w)}{2}=\frac{H(w)+H^*(w)}{2}=\mathrm{Re}\{H(w)\}$$

$$h(t)=\begin{cases}0,t<0\\ h_e(0),t=0\\ 2h_e(t),t>0\end{cases}$$

$$(b)H_e(w)=\mathrm{Re}\{H(w)\}=\cos w$$

$$\therefore h_e(t)=\frac{\delta(t+1)+\delta(t-1)}{2}$$

$$\therefore h(t)=\begin{cases}0,t\le 0\\ 2h_e(t)=\delta(t-1),t>0\end{cases}$$

$$\therefore h(t)=\delta(t-1)$$

$$(c)h_o(t)=\frac{h(t)-h(-t)}{2}$$

$$\therefore h_o(t)\leftrightarrow H_o(w)=\frac{H(w)-H(-w)}{2}=\frac{H(w)-H^*(w)}{2}=j\,\mathrm{Im}\{H(w)\}$$

$$h(t)=\begin{cases}0,t<0\\ \text{不定},t=0\\ 2h_o(t),t>0\end{cases}$$

当 h(t)在 t=0 不包含任何奇异函数的话，$H(w)=\int_{-\infty}^{+\infty}h(t)e^{-jwt}dt$ 将不因 t=0 这一点为任意有限值而改变，这时由上式知道，H(w)也可以完全由其虚部来确定。

第五章　习题解答

【注】：F{}表示傅立叶变换

5.9 对某一特殊的 $x[n]$，其傅立叶变化 $X(e^{jw})$，已知下面四个条件

1、$x[n]$=0，$n>0$

2、$x[0]>0$

3、$\mathrm{Im}\{X(e^{jw})\}=\sin w-\sin 2w$

4、$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|x(e^{jw})\right|^2 dw=3$

求 $x[n]$。

解：

由条件(1), (2) 和(3)得 $X(j\omega)=e^{j\omega}-e^{2j\omega}+A$

所以，$x[n]=\delta[n+1]-\delta[n+2]+A\delta[n]$

代入条件 4，则可得

$$x[n]=\delta[n+1]-\delta[n+2]+\delta[n]$$

5.12 设 $y[n]=(\frac{\sin\frac{\pi}{4}n}{\pi n})^2*(\frac{\sin w_c n}{\pi n})$

式中*记为卷积，且 $\left|w_c\right|\le\pi$。试对 w_c 确定一个较严格的限制，以保证

$$y[n]=(\frac{\sin\frac{\pi}{4}n}{\pi n})^2。$$

解：

$$F\{[\frac{\sin\frac{\pi}{4}n}{\pi n}]^2\}=F\{\frac{\sin\frac{\pi}{4}n}{\pi n}\}*F\{\frac{\sin\frac{\pi}{4}n}{\pi n}\}$$

$$=\begin{cases}\omega-1\,, & 0\le|\omega|\le\frac{\pi}{4}\\ \frac{\pi}{2}-\omega\,, & \frac{\pi}{4}\le|\omega|\le\frac{\pi}{2}\\ 0\,, & \frac{\pi}{2}\le|\omega|\le\pi\end{cases}$$

所以，$F\{\frac{\sin\frac{\pi}{4}n}{\pi n}\}=\begin{cases}1 & 0\le|\omega|\le\omega_c\\ 0 & \omega_c\le|\omega|\le\pi\end{cases}$

易见，$\frac{\pi}{2}\le\omega_c\le\pi$ 时，满足条件

5.14 假设一单位脉冲响应为 $h[n]$，频率响应为 $H(e^{jw})$ 的 LTI 系统 S，具有下列条件：

1、$(\frac{1}{4})^n u[n]\to g[n]$，其中 $g[n]=0, n\ge 0, n<0$

2、 $H(e^{j\pi/2})=1$

3、$H(e^{jw})=H(e^{j(w-\pi)})$

求 $h[n]$。

解：

$$G(e^{j\omega})=\sum_{-\infty}^{\infty}g[n]e^{-j\omega n}=g[1]e^{-j\omega}+g[0]$$

$$\because G(e^{j\omega})=\frac{1}{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}}H(e^{j\omega})$$

$$\therefore H(e^{j\omega})=(1-\frac{1}{4}e^{-j\omega})G(e^{j\omega})$$

$$=g[1]e^{-j\omega}+g[0]-\frac{1}{4}g[1]e^{-2j\omega}-\frac{1}{4}g[0]e^{-j\omega}$$

$$\because H(e^{j\frac{\pi}{2}})=H(e^{-j\frac{\pi}{2}})=1$$

$$\therefore -jg[1]+g[0]+\frac{1}{4}g[1]+j\frac{1}{4}g[0]=1$$

$$\therefore g[0]+\frac{1}{4}g[1]=1 \qquad \frac{1}{4}g[0]-g[1]=0$$

可得，g[0]=16/17, g[1]=1/17

所以，$H(e^{j\omega})=16/17-1/17e^{-2j\omega}$ $\quad\therefore h[n]=16/17\delta[n]-1/17\delta[n-2]$

5.16 有一信号的傅立叶变化是 $X(e^{jw})=\sum_{k=0}^{3}\frac{(\frac{1}{2})^k}{1-\frac{1}{4}e^{-j(w-\pi/2k)}}$

可以证明 $x[n]=g[n]q[n]$，其中 $g[n]$ 具有 $a^n u[n]$ 的形式，$q[n]$ 是周期为 N 的周期信号。

（a）、求 a 的值。

（b）、求 N 的值。

（c）、 $x[n]$是实序列吗？

解：

$$X(e^{j\omega})=\frac{1}{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}}+\frac{1/2}{1-\frac{j}{4}e^{-j\omega}}+\frac{1/4}{1+\frac{1}{4}e^{-j\omega}}+\frac{1/8}{1+\frac{j}{4}e^{-j\omega}}$$

则 $x[n]=(\frac{1}{4})^n u[n]+\frac{1}{2}(\frac{j}{4})^n u[n]+\frac{1}{4}(-\frac{1}{4})^n u[n]+\frac{1}{8}(-\frac{j}{4})^n u[n]$

$$=(\frac{1}{4})^n u[n][1+\frac{1}{2}(j)^n+\frac{1}{4}(-1)^n+\frac{1}{8}(-j)^n]$$

因此，$g[n]=(\frac{1}{4})^n u[n]$

$$q[n]=1+\frac{1}{2}(j)^n+\frac{1}{4}(-1)^n+\frac{1}{8}(-j)^n$$

$$=1+\frac{1}{2}e^{\frac{\pi}{2}nj}+\frac{1}{4}e^{\pi nj}+\frac{1}{8}e^{\frac{3}{2}\pi nj}$$

由于 $q[n]=q[n+N]$

可得，$N=4$

故(a) $\alpha=\frac{1}{4}$ (b) N=4 (c) x[n]不是实序列。

5.19 考虑一因果稳定的 LTI 系统 S 其输入$x[n]$和输出$y[n]$通过下面二阶差分方程

$$y[n]-\frac{1}{6}y[n-1]-\frac{1}{6}y[n-2]=x[n]$$

（a）、求该系统 S 的频率响应$H(e^{jw})$。

(b)、求该系统 S 的频率响应$h[n]$。

解：

(a) $H(e^{j\omega})=\frac{1}{1-\frac{1}{6}e^{-j\omega}-\frac{1}{6}e^{-2j\omega}}$

(b) 由于 $H(e^{j\omega})=\frac{3}{5}\frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}+\frac{2}{5}\frac{1}{1+\frac{1}{3}e^{-j\omega}}$

所以，$h[n]=\frac{3}{5}(\frac{1}{2})^n u[n]+\frac{2}{5}(-\frac{1}{3})^n u[n]$

5.21 计算下列信号的傅立叶变化。

（b）、 $x[n]=(\frac{1}{2})^{-n}u[-n-1]$

（d）、$x[n]=2^n\sin(\frac{\pi}{4}n)u[-n]$

（e）、$x[n]=(\frac{1}{2})^{|n|}\cos(\frac{\pi}{8}(n-1))$

（k）、$x[n]=(\frac{\sin(\pi n/5)}{\pi n})\cos(\frac{7\pi}{2}n)$

解：

(b) $X(e^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]e^{-j\omega n}=\sum_{n=-\infty}^{-1}(\frac{1}{2})^n e^{-j\omega n}$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{2}e^{j\omega})^n=\frac{1}{2}e^{j\omega}/(1-\frac{1}{2}e^{j\omega})=\frac{e^{j\omega}}{2-e^{j\omega}}$$

(d) $X(e^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]e^{-j\omega n}=\sum_{n=-\infty}^{0}2^n\sin\frac{\pi}{4}ne^{-j\omega n}$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{2})^n\sin(-\frac{\pi}{4}n)e^{j\omega n}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{2})^n\frac{e^{-j\frac{\pi}{4}n}-e^{j\frac{\pi}{4}n}}{2j}e^{j\omega n}$$

$$=\frac{1}{2j}\sum_{n=0}^{\infty}[\frac{1}{2}e^{j(\omega-\frac{\pi}{4})}]^n-\frac{1}{2j}\sum_{n=0}^{\infty}[\frac{1}{2}e^{j(\frac{\pi}{4}+\omega)}]^n$$

$$=\frac{1}{2j}[\frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{j(\omega-\frac{\pi}{4})}}-\frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{j(\omega+\frac{\pi}{4})}}]$$

(e) $X(e^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]e^{-j\omega n}$

$$=\sum_{n=-\infty}^{-1}(\frac{1}{2})^{-n}\cos\frac{\pi}{8}(n-1)e^{-j\omega n}+\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{2})^n\cos\frac{\pi}{8}(n-1)e^{-j\omega n}$$

$$=\frac{e^{j\frac{\pi}{8}}}{2}\frac{\frac{1}{2}e^{j(\frac{\pi}{8}+\omega)}}{1-\frac{1}{2}e^{j(\frac{\pi}{8}+\omega)}}+\frac{e^{-j\frac{\pi}{8}}}{2}\frac{\frac{1}{2}e^{j(-\frac{\pi}{8}+\omega)}}{1-\frac{1}{2}e^{j(-\frac{\pi}{8}+\omega)}}+\frac{e^{-j\frac{\pi}{8}}}{2}\frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j(-\frac{\pi}{8}+\omega)}}$$

$$+\frac{e^{j\frac{\pi}{8}}}{2}\frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j(\frac{\pi}{8}+\omega)}}$$

$$=\frac{\frac{3}{2}e^{j\frac{\pi}{8}}}{5-2(e^{j(\frac{\pi}{8}+\omega)}+e^{-j(\omega+\frac{\pi}{8})})}+\frac{\frac{3}{2}e^{-j\frac{\pi}{8}}}{5-2(e^{-j(-\frac{\pi}{8}+\omega)}+e^{j(\omega-\frac{\pi}{8})})}$$

$$=\frac{3}{2}[\frac{e^{j\frac{\pi}{8}}}{5-4\cos(\omega+\frac{\pi}{8})}+\frac{e^{-j\frac{\pi}{8}}}{5-4\cos(\omega-\frac{\pi}{8})}]$$

(k) $F\{x[n]\}=\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}X_1(e^{j\theta})X_2(e^{j(\omega-\theta)})d\theta$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X_1(e^{j\theta})X_2(e^{j(\omega-\theta)})d\theta$$

其中 $X_1(e^{j\omega})=F\{\frac{\sin(\frac{\pi n}{5})}{\pi n}\}$

$X_2(e^{j\omega})=F\{\cos(7\pi n/2)\}$

$$\therefore X(e^{j\omega})=\begin{cases}\frac{1}{2}, & 2m\pi+\frac{3}{10}\pi<|\omega|<2m\pi+\frac{7}{10}\pi\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

5.22 下面是各离散时间信号的傅立叶变化，求相应于每一变化的信号。

（a）、$X(e^{jw})=1,\frac{\pi}{4}\le|w|\le\frac{3\pi}{4}$

$=0,\frac{3\pi}{4}\le|w|\le\pi,0\le|w|\le\frac{\pi}{4}$

（d）、$X(e^{jw})=\cos^2 w+\sin^2 3w$

（f）、$X(e^{jw})=\frac{e^{-jw}-\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{5}e^{-jw}}$

（g）、$X(e^{jw})=\frac{1-\frac{1}{3}e^{-jw}}{1-\frac{1}{4}e^{-jw}-\frac{1}{8}e^{-2jw}}$

解：

(a) $\frac{\pi}{4}\le|\omega|\le\frac{3\pi}{4}\Leftrightarrow 0\le\left|\omega-\frac{\pi}{4}\right|\le\frac{\pi}{2}$

$\therefore x[n]=\frac{1}{\pi n}(\sin(\frac{3\pi n}{4})-\sin(\frac{\pi}{4}n))$

(d) $X(e^{j\omega})=\cos^2\omega+\sin^2 3\omega=\frac{1}{2}(1+\cos 2\omega)+\frac{1}{2}(1-\cos 6\omega)$

$$=1+\frac{1}{4}e^{j2\omega}+\frac{1}{4}e^{-j2\omega}-\frac{1}{4}e^{j6\omega}-\frac{1}{4}e^{-j6\omega}$$

$$\therefore x[n]=\delta[n]+\frac{1}{4}\delta[n+2]+\frac{1}{4}\delta[n-2]-\frac{1}{4}\delta[n+6]-\frac{1}{4}\delta[n-6]$$

(f) $$X(e^{j\omega})=\frac{e^{-j\omega}-\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{5}e^{-j\omega}}=\frac{e^{-j\omega}}{1-\frac{1}{5}e^{-j\omega}}-\frac{\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{5}e^{-j\omega}}$$

$$2\pi x[0]=\int x(e^{jw})dw$$

(g) $$X(e^{j\omega})=\frac{1-\frac{1}{3}e^{-j\omega}}{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}-\frac{1}{8}e^{-2j\omega}}=\frac{\frac{2}{9}}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}+\frac{\frac{7}{9}}{1+\frac{1}{4}e^{-j\omega}}$$

$$\therefore x[n]=\frac{2}{9}(\frac{1}{2})^{n}u[n]+\frac{7}{9}(-\frac{1}{4})^{n}u[n]$$

5.23.设 $X(e^{jw})$ 是如图 5.23 所示的 $x[n]$ 信号的傅立叶变化，不经求出 $X(e^{jw})$ 完成下列计算。

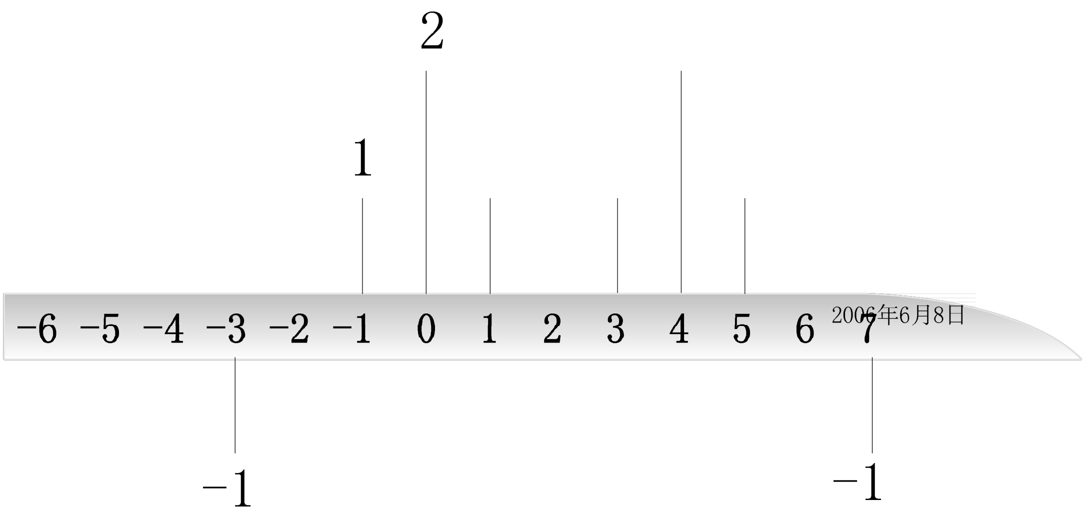


图 5.23

（a）、求 $X(e^{j0})$

（b）、求 $\measuredangle X(e^{jw})$。

（c）、求 $\int_{-\pi}^{\pi}X(e^{jw})dw$

（d）、求 $X(e^{j\pi})$。

（e）、求并画出傅立叶变化为 $\mathrm{Re}\{x(w)\}$ 的信号。