难点 04 四边形综合问题

命题趋势

近几年四川中考看，几乎年年会出现四边形题目，经常以解答题的形式出现，内容主要是旋转、平移、折叠等几何变换考法，难度偏难，属于各市中考考查的重点，也是压轴题。

满分技巧

1、平行四边形四边形与特殊平行四边形的性质与判定；

2、中位线、中垂线、中线、高线、角平分线的性质及其常用辅助线作法；

3、全等与相似三角形的性质与基本模型；

限时检测

【中考真题】

1.（2022·四川绵阳·中考真题）如图，平行四边形 $ABCD$ 中，$DB=2\sqrt{3}$，$AB=4$，$AD=2$，动点 E，F 同时从 A 点出发，点 E 沿着 $A\to D\to B$ 的路线匀速运动，点 F 沿着 $A\to B\to D$ 的路线匀速运动，当点 E，F 相遇时停止运动.

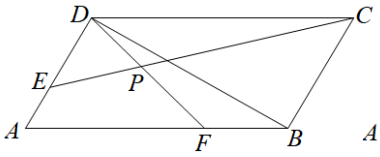


图1

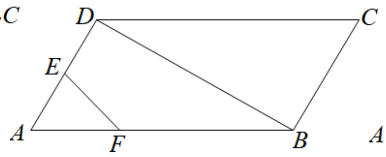


图2

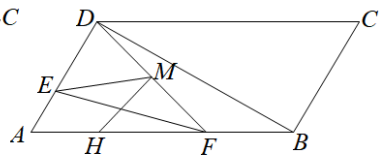


图3

(1)如图 1，设点 E 的速度为 1 个单位每秒，点 F 的速度为 4 个单位每秒，当运动时间为 $\frac{2}{3}$ 秒时，设 CE 与 DF 交于点 P，求线段 EP 与 CP 长度的比值；

(2)如图 2，设点 E 的速度为 1 个单位每秒，点 F 的速度为 $\sqrt{3}$ 个单位每秒，运动时间为 x 秒，ΔAEF 的面积为 y，求 y 关于 x 的函数解析式，并指出当 x 为何值时，y 的值最大，最大值为多少？

(3)如图 3，H 在线段 AB 上且 $AH=\frac{1}{3}HB$，M 为 DF 的中点，当点 E、F 分别在线段 AD、AB

上运动时，探究点 E、F 在什么位置能使 $EM=HM$．并说明理由．

【答案】(1)$\frac{EP}{PC}=\frac{4}{9}$；

(2)y 关于 x 的函数解析式为 $y=\begin{cases}\frac{3}{4}x^2\left(0\le x\le 2\right)\\ -\frac{\sqrt{3}}{4}x^2+\frac{3}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}x\left(2\le x\le\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)\\ 6+2\sqrt{3}-x-\sqrt{3}x\left(\frac{4\sqrt{3}}{3}\le x\le 2\sqrt{3}\right)\end{cases}$；当 $x=\frac{4\sqrt{3}}{3}$ 时，y 的最大值为 $2+\frac{2}{3}\sqrt{3}$；

(3)当 $EF\parallel BD$ 时，能使 $EM=HM$．理由见解析

【解析】（1）

解：如图，延长 DF 交 CB 的延长线于点 G，

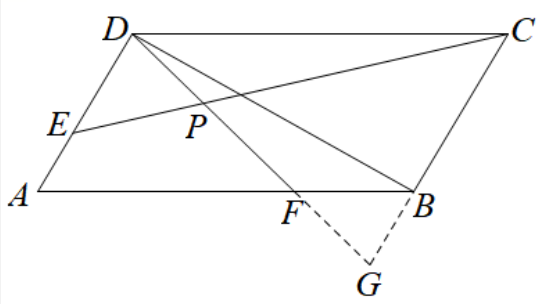


图1

∵四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

∴$CG\parallel AD$，

∴$\triangle AFD\sim\triangle BFG$，

∴$\frac{AF}{FB}=\frac{AD}{BG}$，

∵点 E 的速度为 1 个单位每秒，点 F 的速度为 4 个单位每秒，运动时间为 $\frac{2}{3}$ 秒，

∴$AF=\frac{8}{3}$，$AE=\frac{2}{3}$，

∵$AB=4$，$AD=2$，

∴$BF=\frac{4}{3}$，　$ED=\frac{4}{3}$，

∴$\frac{\frac{8}{3}}{\frac{4}{3}}=\frac{2}{BG}$，

∴$BG=1$，

∴$CG=3$，

∵$CG \parallel AD$，

∴$\triangle PDE \backsim \triangle PGC$，

∴$\frac{EP}{PC}=\frac{ED}{GC}$，

∴$\frac{EP}{PC}=\frac{4}{9}$；

（2）

解：根据题意得：当 $0\le x\le 2$ 时，E 点在 AD 上，F 点在 AB 上，此时 $AE=x$，$AF=\sqrt{3}x$，

∵$DB=2\sqrt{3}$，$AB=4$，$AD=2$，

∴$AD^2+BD^2=AB^2$，

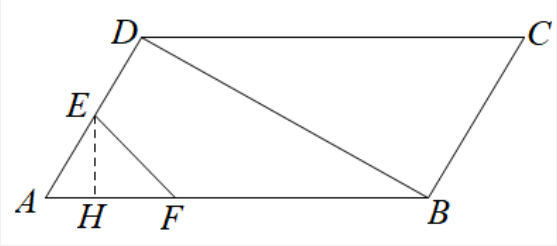
∴$\triangle ABD$ 是直角三角形，

∵$\frac{AD}{AB}=\frac{1}{2}$，

∴$\angle ABD=30°$，

∴$\angle A=60°$，

如图，过点 E 作 $EH\perp AB$ 交于 H，



∴$EH=AE\cdot\sin 60^{\circ}=\frac{\sqrt{3}}{2}x$，

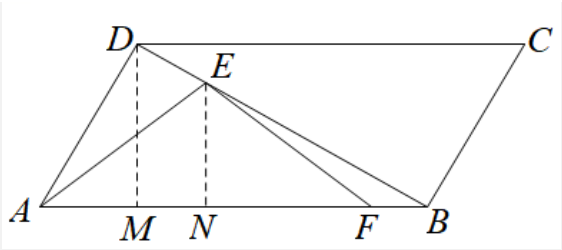
∴$y=\frac{1}{2}\times AF\times EH=\frac{1}{2}\times\sqrt{3}x\times\frac{\sqrt{3}}{2}x=\frac{3}{4}x^2$；

∴当 $x>0$ 时，y 随 x 的增大而增大，

此时当 $x=2$ 时，y 有最大值 3；

当 $2\le x\le\frac{4\sqrt{3}}{3}$ 时，E 点在 BD 上，F 点在 AB 上，

如图，过点 E 作 $EN\perp AB$ 交于 N，过点 D 作 $DM\perp AB$ 交于 M，则 $EN\parallel DM$，



根据题意得：$DE=x-2$，

$\therefore BE=2\sqrt{3}+2-x$，

在 $Rt\triangle ABD$ 中，$DM=AD\cdot\sin A=\sqrt{3}$，$AM=1$，

$\because EN\parallel DM$，

$\therefore\triangle BEN\backsim\triangle BDM$，

$\therefore\dfrac{EN}{DM}=\dfrac{BE}{BD}$，

$\therefore\dfrac{EN}{\sqrt{3}}=\dfrac{2+2\sqrt{3}-x}{2\sqrt{3}}$

$\therefore EN=1+\sqrt{3}-\dfrac{1}{2}x$，

$\therefore y=\dfrac{1}{2}\times AF\times EN=\dfrac{1}{2}\times(\sqrt{3}x)\times(1+\sqrt{3}-\dfrac{1}{2}x)=-\dfrac{\sqrt{3}}{4}x^2+\dfrac{3+\sqrt{3}}{2}x$，

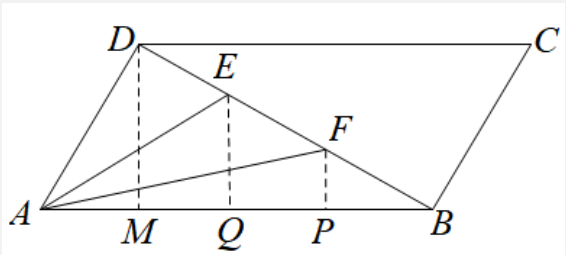
此时该函数图象的对称轴为直线 $x=\sqrt{3}+1$ ，

$\therefore$当 $2\le x\le\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$ 时，y 随 x 的增大而增大，

此时当 $x=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$ 时，y 有最大值 $2+\dfrac{2}{3}\sqrt{3}$；

当 $\dfrac{4\sqrt{3}}{3}\le x\le 2\sqrt{3}$ 时，点 E、F 均在 BD 上，

过点 E 作 $EQ\perp AB$ 交于 Q，过点 F 作 $FP\perp AB$ 交于 P，过点 D 作 $DM\perp AB$ 于点 M，



$\therefore AB+BF=\sqrt{3}x$，$DA+DE=x$，

$\because AB=4$，$AD=2$，

$\therefore BE=2\sqrt{3}-x+2$，$DF=4+\sqrt{3}$，

$\because PF\parallel DM$，

∴△BFP∽△BDM，

∴$\frac{BF}{BD}=\frac{PF}{DM}$，即$\frac{\sqrt{3}x-4}{2\sqrt{3}}=\frac{PF}{\sqrt{3}}$，

∴$PF=\frac{\sqrt{3}}{2}x-2$，

∵$EQ//DM$，∴△BEQ∽△BDM，

∴$\frac{BE}{BD}=\frac{EQ}{DM}$，即$\frac{2\sqrt{3}+2-x}{2\sqrt{3}}=\frac{EQ}{\sqrt{3}}$，∴$EQ=\sqrt{3}+1-\frac{1}{2}x$，

∴$y=\frac{1}{2}\times AB\times(EQ-PF)=\frac{1}{2}\times4\times(\sqrt{3}+1-\frac{1}{2}x-\frac{\sqrt{3}}{2}x+2)=6+2\sqrt{3}-\left(1+\sqrt{3}\right)x$，

此时 y 随 x 的增大而减小，

此时当$x=\frac{4\sqrt{3}}{3}$时，y 有最大值$2+\frac{2}{3}\sqrt{3}$；

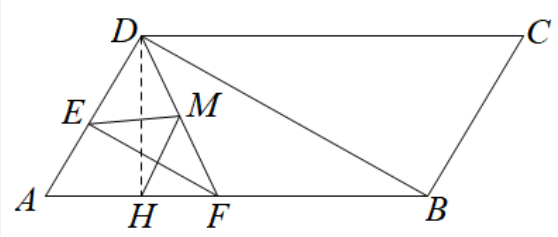
综上所述：y 关于 x 的函数解析式为$y=\begin{cases}\frac{3}{4}x^2\left(0\le x\le2\right)\\-\frac{\sqrt{3}}{4}x^2+\frac{3}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}x\left(2\le x\le\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)\\6+2\sqrt{3}-x-\sqrt{3}x\left(\frac{4\sqrt{3}}{3}\le x\le2\sqrt{3}\right)\end{cases}$

当$x=\frac{4\sqrt{3}}{3}$时，y 最大值为$2+\frac{2}{3}\sqrt{3}$；

（3）

解：当 $EF\parallel BD$ 时，能使 $EM=HM$．理由如下：

连接 DH，如图，



∵$AH=\frac{1}{3}HB$，$AB=4$，

∴．$AH=1$，

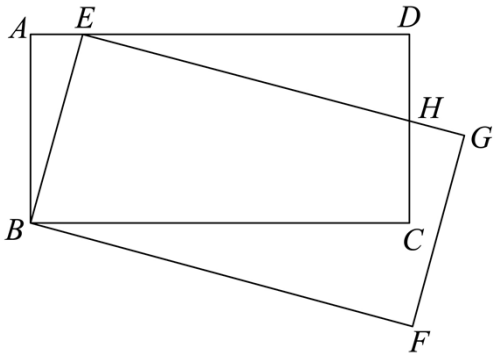
由（2）得：此时 $AH\perp AB$，

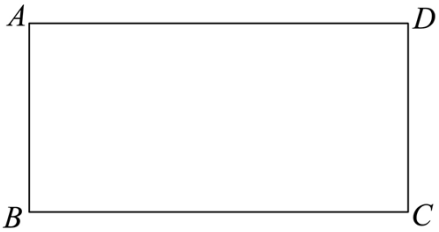
∵M 是 DF 的中点，∴$HM=DM=MF$，

∵$EF\parallel BD$，$BD\perp AD$，

∴$EF\perp AD$，∴$EM=DM=FM$，∴$EM=HM$．

2．（2022·四川成都·统考中考真题）如图，在矩形 $ABCD$ 中，$AD=nAB\left(n>1\right)$，点 E 是 AD 边上一动点（点 E 不与 A，D 重合），连接 BE，以 BE 为边在直线 BE 的右侧作矩形 $EBFG$，使得矩形 $EBFG\backsim$ 矩形 $ABCD$，EG 交直线 CD 于点 H．





备用图

(1)【尝试初探】在点 E 的运动过程中，$\triangle ABE$ 与 $\triangle DEH$ 始终保持相似关系，请说明理由．

(2)【深入探究】若 $n=2$，随着 E 点位置的变化，H 点的位置随之发生变化，当 H 是线段 CD 中点时，求 $\tan\angle ABE$ 的值．

(3)【拓展延伸】连接 BH，FH，当 $\triangle BFH$ 是以 FH 为腰的等腰三角形时，求 $\tan\angle ABE$ 的值（用含 n 的代数式表示）．

【答案】(1)见解析

(2)$\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}$ 或 $\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}$

(3)$\dfrac{n}{2}$ 或 $\sqrt{n^2-1}$

【详解】（1）解：根据题意得：$\angle A=\angle D=\angle BEG=90°$，

$\therefore\angle AEB+\angle DEH=90°$，$\angle AEB+\angle ABE=90°$，

$\therefore\angle DEH=\angle ABE$，

$\therefore\triangle ABE\backsim\triangle DEH$；

（2）解：根据题意得：$AB=2DH$，$AD=2AB$，

$\therefore AD=4DH$，

设 $DH=x$，$AE=a$，则 $AB=2x$，$AD=4x$，

$\therefore DE=4x-a$，

$\because\triangle ABE\backsim\triangle DEH$，

$\therefore\dfrac{AB}{DE}=\dfrac{AE}{DH}$，

$\therefore\dfrac{2x}{4x-a}=\dfrac{a}{x}$，解得：$x=\dfrac{\left(2+\sqrt{2}\right)a}{2}$ 或 $\dfrac{\left(2-\sqrt{2}\right)a}{2}$，

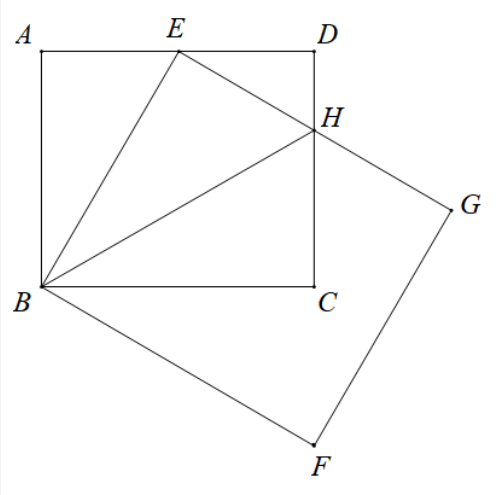
$\therefore AB=\left(2+\sqrt{2}\right)a$ 或 $\left(2-\sqrt{2}\right)a$，

$\therefore \tan\angle ABE=\dfrac{AE}{AB}=\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}$ 或 $\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}$；

（3）解：∵矩形 $EBFG\backsim$ 矩形 $ABCD$，$AD=nAB\left(n>1\right)$，

∴$EG=nBE$，

如图，当 $FH=BH$ 时，



∵$\angle BEH=\angle FGH=90°$，$BE=FG$，

∴$Rt\triangle BEH\cong Rt\triangle FGH$，

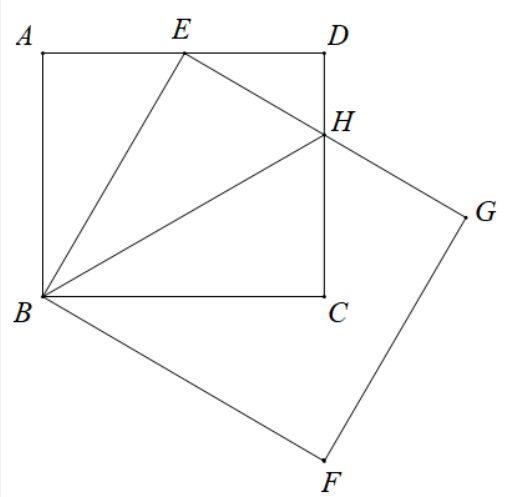
∴$EH=GH=\dfrac{1}{2}EG$，

$\therefore EH=\dfrac{n}{2}BE$，

∵$\triangle ABE\backsim\triangle DEH$，

$\therefore \dfrac{DE}{AB}=\dfrac{EH}{BE}=\dfrac{n}{2}$，即 $DE=\dfrac{n}{2}AB$，$\therefore AE=AD-DE=\dfrac{n}{2}AB$，$\therefore \tan\angle ABE=\dfrac{AE}{AB}=\dfrac{n}{2}$；

如图，当 $FH=BF=nBE$ 时，



$HG=\sqrt{FH^2-FG^2}=\sqrt{n^2-1}FG=\sqrt{n^2-1}BE$，

$\therefore EH = EG - HG = \left(n - \sqrt{n^2-1}\right)BE$，

$\because \triangle ABE \backsim \triangle DEH$，

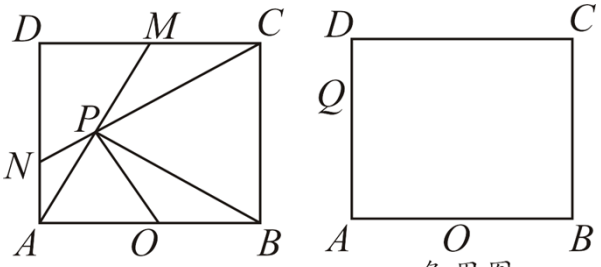
$\therefore \dfrac{DE}{AB} = \dfrac{EH}{BE} = n - \sqrt{n^2-1}$，即 $DE = \left(n - \sqrt{n^2-1}\right)AB$，

$\therefore AE = AD - DE = \sqrt{n^2-1}AB$，

$\therefore \tan\angle ABE = \dfrac{AE}{AB} = \sqrt{n^2-1}$；

综上所述，$\tan\angle ABE$ 的值为 $\dfrac{n}{2}$ 或 $\sqrt{n^2-1}$.

3．（2022·四川南充·中考真题）如图，在矩形 $ABCD$ 中，点 O 是 AB 的中点，点 M 是射线 DC 上动点，点 P 在线段 AM 上（不与点 A 重合），$OP = \dfrac{1}{2}AB$.



备用图

(1)判断 $\triangle ABP$ 的形状，并说明理由.

(2)当点 M 为边 DC 中点时，连接 CP 并延长交 AD 于点 N．求证：$PN = AN$.

(3)点 Q 在边 AD 上，$AB = 5, AD = 4, DQ = \dfrac{8}{5}$，当 $\angle CPQ = 90°$ 时，求 DM 的长.

【答案】(1) $\triangle ABP$ 为直角三角形，理由见解析

(2)见解析

(3) $\dfrac{4}{3}$ 或 12

【详解】（1）解：$\triangle ABP$ 为直角三角形，理由如下：

$\because$ 点 O 是 AB 的中点，$OP = \dfrac{1}{2}AB$，

$\therefore OP = OA = OB$，

$\therefore \angle APO = \angle PAO$，$\angle BPO = \angle PBO$，

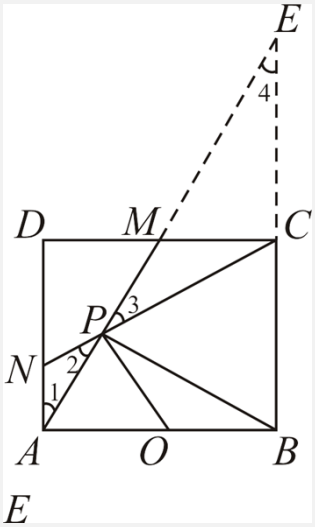
$\because \angle APO + \angle PAO + \angle BPO + \angle PBO = 180°$，

$\therefore \angle APO + \angle BPO = \dfrac{1}{2} \times 180° = 90°$，

$\therefore \angle APB = 90°$，

$\therefore \triangle ABP$ 为直角三角形；

（2）证明：如图，延长 AM，BC 交于点 E，



由矩形的性质知：$AD//BE$，$\angle ADM=\angle ECM=90°$，

$\therefore \angle 1=\angle 4$，

$\because$ 点 M 为边 DC 中点，

$\therefore DM=CM$，

在 $\triangle ADM$ 和 $\triangle ECM$ 中，

$$\begin{cases}\angle 1=\angle 4\\ \angle ADM=\angle ECM\\ DM=CM\end{cases}$$

$\therefore \triangle ADM\cong\triangle ECM(\text{AAS})$，

$\therefore EC=AD$，

$\because BC=AD$，

$\therefore EC=BC$，即 C 点为 BE 的中点，

由（1）知 $\angle APB=90°$，

$\therefore \angle BPE=90°$，即 $\triangle BPE$ 为直角三角形，

$\therefore PC=\frac{1}{2}BE=CE$，

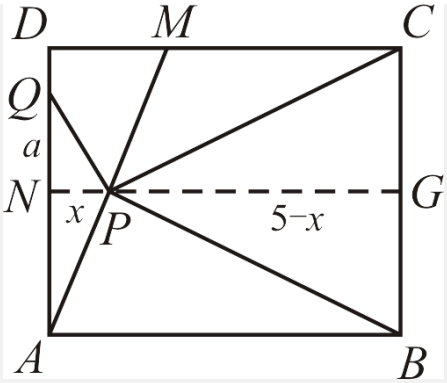
$\therefore \angle 3=\angle 4$，

又$\because \angle 2=\angle 3$，$\angle 1=\angle 4$，

$\therefore \angle 2=\angle 1$，

$\therefore PN=AN$；

（3）解：如图，过点 P 作 AB 的平行线，交 AD 于点 F，交 BC 于点 G，



由已知条件 $AB=5, AD=4, DQ=\frac{8}{5}$，设 $QF=a$，$FP=x$，

则 $GB=AF=4-DQ-QF=4-\frac{8}{5}-a=\frac{12}{5}-a$，$PG=5-x$，$CG=\frac{8}{5}+a$.

$\because AB\perp AD$，$AB\perp BC$，$FG//AB$，

$\therefore FG\perp AD$，$FG\perp BC$，

$\therefore \angle AFP=\angle PGB=90°$，

$\therefore \angle FAP+\angle FPA=90°$，

$\because \angle APB=90°$，

$\therefore \angle BPG+\angle FPA=90°$，

$\therefore \angle BPG=\angle FAP$，

$\therefore \Delta BPG\sim\Delta FAP$，

$\therefore \frac{GB}{FP}=\frac{PG}{AF}$，即 $\frac{\frac{12}{5}-a}{x}=\frac{5-x}{\frac{12}{5}-a}$，

$\therefore x(5-x)=(\frac{12}{5}-a)^2$.

同理，$\because \angle QFP=90°$，

$\therefore \angle FQP+\angle FPQ=90°$，

$\because \angle CPQ=90°$，

$\therefore \angle CPG+\angle FPQ=90°$，

$\therefore \angle CPG=\angle FQP$，

$\therefore \Delta CPG\sim\Delta PQF$，

$\therefore \frac{CG}{FP}=\frac{PG}{QF}$，即 $\frac{\frac{8}{5}+a}{x}=\frac{5-x}{a}$，

$\therefore x(5-x)=a(\frac{8}{5}+a)$.

$\therefore (\frac{12}{5}-a)^2=a(\frac{8}{5}+a)$，

解得 $a=\frac{9}{10}$，

$\therefore AF=\frac{12}{5}-a=\frac{3}{2}$，

将 $a=\frac{9}{10}$ 代入 $x(5-x)=a(\frac{8}{5}+a)$ 得 $x(5-x)=\frac{9}{10}\times(\frac{8}{5}+\frac{9}{10})$，

整理得 $4x^2-20x+9=0$，

解得 $x=\frac{1}{2}$ 或 $x=\frac{9}{2}$.

$\because \angle FAP=\angle DAM$，$\angle AFP=\angle ADM$，

$\therefore \Delta AFP\sim\Delta ADM$，

$\therefore \frac{FP}{DM}=\frac{AF}{AD}$，即 $\frac{x}{DM}=\frac{\frac{3}{2}}{4}$，

$\therefore DM=\frac{8}{3}x$，

$\therefore$当 $x=\frac{1}{2}$ 时，$DM=\frac{8}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{4}{3}$，

当 $x=\frac{9}{2}$ 时，$DM=\frac{8}{3}\times\frac{9}{2}=12$，此时点 M 在 DC 的延长线上，

综上，DM 的长为 $\frac{4}{3}$ 或 12.

4.（2021·四川广元·统考中考真题）如图 1，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90°$，$AC=BC$，点 D 是 AB 边上一点（含端点 A、B），过点 B 作 BE 垂直于射线 CD，垂足为 E，点 F 在射线 CD 上，且 $EF=BE$，连接 AF、BF.

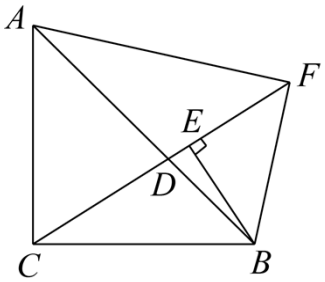


图 1

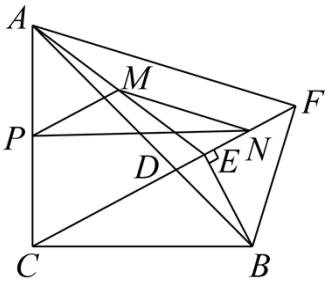


图 2

（1）求证：$\triangle ABF\backsim\triangle CBE$；

（2）如图 2，连接 AE，点 P、M、N 分别为线段 AC、AE、EF 的中点，连接 PM、MN、PN. 求 $\angle PMN$ 的度数及 $\frac{MN}{PM}$ 的值；

（3）在（2）的条件下，若 $BC=\sqrt{2}$，直接写出 $\triangle PMN$ 面积的最大值．

【答案】（1）证明见解析；（2）$\angle PMN=135^{\circ}$；$\frac{MN}{PM}=\sqrt{2}$；（3）$\frac{1}{4}$

【详解】（1）证明：$\because \angle ACB=90^{\circ}$，$AC=BC$

$\therefore AB=\sqrt{2}BC,\angle ABC=\angle BAC=45^{\circ}$

$\because BE$ 垂直于射线 CD，

$\therefore \angle BEF=90^{\circ}$，

又 $\because EF=BE$

$\therefore FB=\sqrt{2}EB,\angle FBE=\angle EFB=45^{\circ}$

$\because \angle ABC+\angle ABE=\angle ABE+\angle FBE$

即：$\angle ABF=\angle CBE$

又 $\because \frac{AB}{CB}=\frac{BF}{BE}=\sqrt{2}$

$\therefore \triangle ABF\backsim\triangle CBE$

（2）解：$\because$ 点 P、M、N 分别为线段 AC、AE、EF 的中点

$\therefore PM//CN$，$MN//AF$，$PM=\frac{1}{2}CE,MN=\frac{1}{2}AF$

$\therefore \angle MPN=\angle CNP,\angle CNM=\angle EFA$

$\therefore \angle MPN+\angle MNP=\angle CNP+\angle MNP=\angle CNM=\angle EFA$

又 $\because \triangle ABF\backsim\triangle CBE$

$\therefore \angle AFB=\angle CEB=90^{\circ}$

又 $\because \angle EFB=45^{\circ}$

$\therefore \angle EFA=\angle AFB-\angle BFE=90^{\circ}-45^{\circ}=45^{\circ}$

$\therefore \angle MPN+\angle MNP=45^{\circ}$

又 $\because \angle MPN+\angle MNP+\angle PMN=180^{\circ}$

$\therefore \angle PMN=180^{\circ}-45^{\circ}=135^{\circ}$

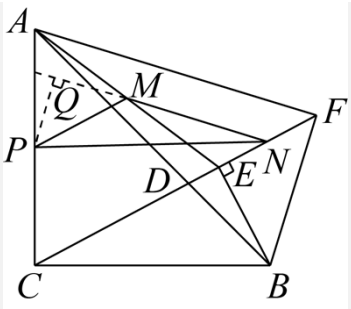
又 $\because \frac{MN}{PM}=\frac{\frac{1}{2}AF}{\frac{1}{2}CE}=\frac{AF}{CE}$

又 $\because \triangle ABF\backsim\triangle CBE$

$\therefore \frac{AF}{CE}=\frac{AB}{CB}=\sqrt{2}$

$\therefore \frac{MN}{PM}=\sqrt{2}$

（3）如下图：



过点 P 作 PQ 垂直于 NM 的延长线于点 Q，

$\because \angle PMN=135°,$

$\therefore \angle PMQ=45°=\angle MPQ,$

$\therefore PQ=\dfrac{\sqrt{2}}{2}PM,$

$S_{\triangle PMN}=\dfrac{1}{2}MN\cdot PQ=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}AF\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}PM=\dfrac{\sqrt{2}}{8}AF\cdot\dfrac{1}{2}CE=\dfrac{\sqrt{2}}{16}AF\cdot CE$

又$\because BC=\sqrt{2}$

$\therefore AF=\sqrt{2}CE$

$\therefore S_{\triangle PMN}=\dfrac{\sqrt{2}}{16}\times\sqrt{2}CE^2=\dfrac{1}{8}CE^2$

$\therefore$当 CE 取得最大值时，$\triangle PMN$ 取得最大值，

$\because BE\perp CE,$

$\therefore E$ 在以 BC 的中点为圆心，BC 为直径的圆上运动，

$\therefore$ 当 $CE=CB=\sqrt{2}$ 时，CE 最大，

$\therefore S=\dfrac{1}{8}\times 2=\dfrac{1}{4}$，

5．（2021·四川成都·统考中考真题）在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90°, AB=5, BC=3$，将 $\triangle ABC$ 绕点 B 顺时针旋转得到 $\triangle A'BC'$，其中点 A，C 的对应点分别为点 A'，C'．

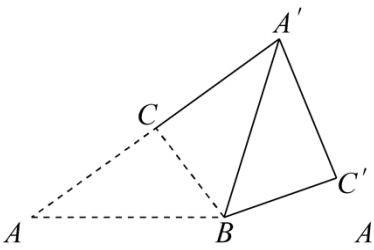


图 1

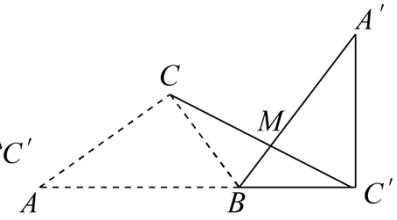


图 2

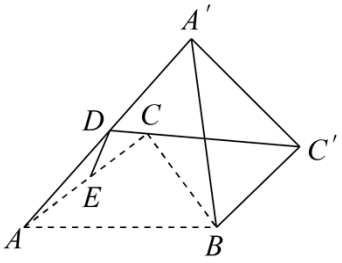


图 3

（1）如图 1，当点 A' 落在 AC 的延长线上时，求 AA' 的长；

（2）如图 2，当点 C' 落在 AB 的延长线上时，连接 CC'，交 $A'B$ 于点 M，求 BM 的长；

（3）如图 3，连接 AA', CC'，直线 CC' 交 AA' 于点 D，点 E 为 AC 的中点，连接 DE．在旋转过程中，DE 是否存在最小值？若存在，求出 DE 的最小值；若不存在，请说明理由．

【答案】（1）$AA'=8$；（2）$BM=\dfrac{15}{11}$；（3）存在，最小值为 1

【详解】（1）在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，$AC=\sqrt{AB^2-BC^2}=\sqrt{5^2-3^2}=4$.

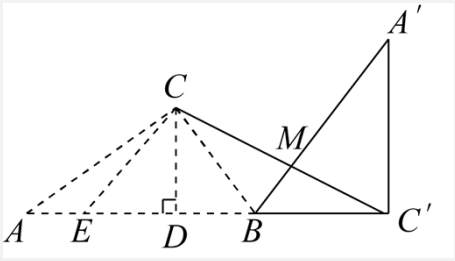
根据旋转性质可知 $AB=A'B$，即 $\triangle ABA'$ 为等腰三角形.

$\because\angle ACB=90°$，即 $BC\perp AA'$，

$\therefore A'C=AC=4$，

$\therefore AA'=8$.

（2）如图，作 $CD\perp AC'$ 交 AC' 于点 D，作 $CE//A'B$ 交 AC' 于点 E.



由旋转可得 $\angle A'BC'=\angle ABC$，$BC=BC'=3$.

$\because CE//A'B$，

$\therefore\angle CEB=\angle A'BC'$，

$\therefore\angle CEB=\angle ABC$，

$\therefore CE=BC=BC'=3$，$DE=DB$.

$\because S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}AB\cdot CD=\dfrac{1}{2}AC\cdot BC$，即 $5\times CD=4\times 3$，

$\therefore CD=\dfrac{12}{5}$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle BCD$ 中，$DB=\sqrt{BC^2-CD^2}=\dfrac{9}{5}$，

$\therefore BE=\dfrac{18}{5}$.

$\therefore C'E=BE+BC'=\dfrac{33}{5}$.

$\because CE//A'B$，

$\therefore\dfrac{BM}{CE}=\dfrac{BC'}{C'E}$，即 $\dfrac{BM}{3}=\dfrac{3}{\frac{33}{5}}$，

$\therefore BM=\dfrac{15}{11}$.

（3）如图，作 $AP//A'C'$ 且交 $C'D$ 延长线于点 P，连接 $A'C$.

$\because BC=BC'$，

$\therefore\angle BCC'=\angle BC'C$，

$\because \angle ACP=180°-\angle ACB-\angle BCC'$，即 $\angle ACP=90°-\angle BCC'$，

又$\because \angle A'C'D=90°-\angle BC'C$，

$\therefore \angle ACP=\angle A'C'D$.

$\because AP//A'C'$，

$\therefore \angle APC=\angle A'C'D$，

$\therefore \angle ACP=\angle APC$，

$\therefore AP=AC$，$\therefore AP=A'C'$.

$\therefore$在$\triangle APD$和$\triangle A'C'D$中$\begin{cases}\angle ADP=\angle A'DC' \\ \angle APD=\angle A'C'D \\ AP=A'C'\end{cases}$，

$\therefore \triangle APD\cong\triangle A'C'D(AAS)$，

$\therefore AD=A'D$，即点 D 为 AA' 中点.

$\because$点 E 为 AC 中点，

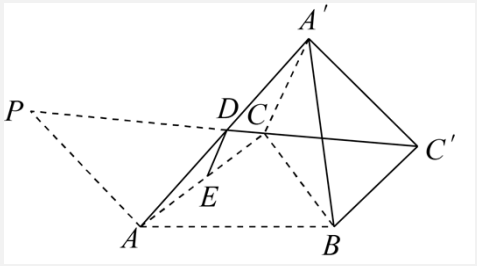
$\therefore DE$ 为$\triangle ACA'$的中位线，

$\therefore DE=\frac{1}{2}A'C$，

即要使 DE 最小，$A'C$ 最小即可.

根据图可知 $A'C\geq A'B-BC$，即当点 A'、C、B 三点共线时 $A'C$ 最小，且最小值为 $A'C=A'B-BC=5-3=2$.

$\therefore$此时 $DE=\frac{1}{2}A'C=1$，即 DE 最小值为 1.



6.（2020·四川成都·统考中考真题）在矩形 $ABCD$ 的 CD 边上取一点 E，将 ΔBCE 沿 BE 翻折，使点 C 恰好落在 AD 边上点 F 处.

（1）如图 1，若 $BC=2BA$，求 $\angle CBE$ 的度数；

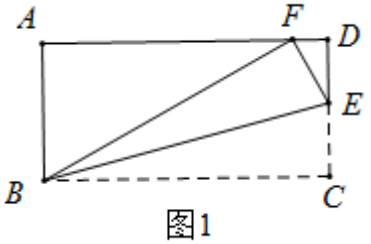


图1

（2）如图 2，当 $AB=5$，且 $AF\cdot FD=10$ 时，求 BC 的长；

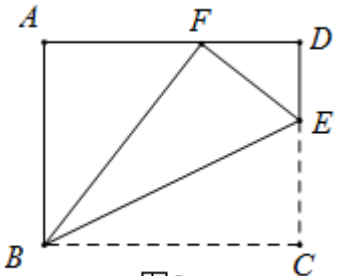


图2

（3）如图 3，延长 EF，与 $\angle ABF$ 的角平分线交于点 M，BM 交 AD 于点 N，当 $NF=AN+FD$ 时，求 $\dfrac{AB}{BC}$ 出的值.

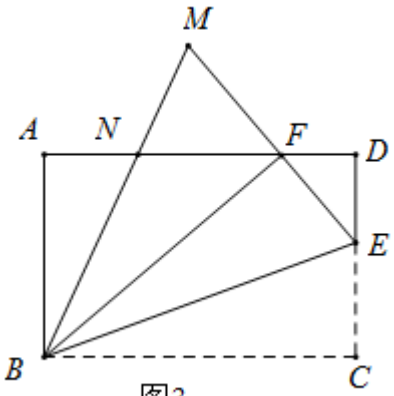


图3

【答案】（1）15°；（2）$3\sqrt{5}$；（3）$\dfrac{3}{5}$

【详解】（1）∵矩形 $ABCD$，

$\therefore \angle A=90°$，$AD//BC$

由折叠的性质可知 BF=BC=2AB，$\angle CBE=\dfrac{1}{2}\angle CBF$，

$\therefore \angle AFB=30°$，

$\therefore \angle FBC=\angle AFB=30°$，

$\therefore \angle CBE=15°$

（2）由题意可得 $\angle A=\angle D=90°$，

$\angle AFB+\angle DFE=90°$，

$\angle FED+\angle DFE=90°$

$\therefore \angle AFB=\angle DEF$

$\therefore \Delta FAB\backsim\Delta EDF$

$\therefore \dfrac{AF}{DE}=\dfrac{AB}{DF}$，

$\therefore DE=\dfrac{AF\bullet DF}{AB}=\dfrac{10}{5}=2$

$\therefore EF=CE=3$，

由勾股定理得 $DF=\sqrt{3^2-2^2}=\sqrt{5}$，

$\therefore AF=\dfrac{10}{\sqrt{5}}=2\sqrt{5}$，

$\therefore BC=AD=AF+FD=3\sqrt{5}$；

（3）过点 N 作 $NG\perp BF$ 于点 G．

$\therefore \angle NGF=\angle A=90°$

又∵$\angle BFA=\angle NFG$

$\therefore \Delta NFG\backsim\Delta BFA$．

$\therefore \dfrac{NG}{AB}=\dfrac{FG}{FA}=\dfrac{NF}{BF}$．

∵$NF=AN+FD$，即 $NF=\dfrac{1}{2}AD=\dfrac{1}{2}BC=\dfrac{1}{2}BF$

$\therefore \dfrac{NG}{AB}=\dfrac{FG}{FA}=\dfrac{NF}{BF}=\dfrac{1}{2}$，

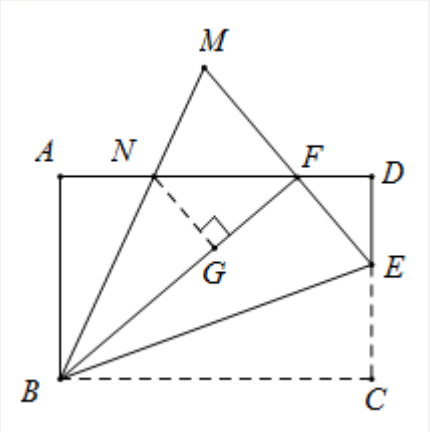
又∵BM 平分 $\angle ABF$，$NG\perp BF$，$\angle A=90°$，

∴NG=AN，

$\therefore NG=AN=\dfrac{1}{2}AB$，

$\therefore \dfrac{FG}{FA}=\dfrac{BF-BG}{AN+NF}=\dfrac{BC-AB}{\frac{1}{2}AB+\frac{1}{2}BC}=\dfrac{1}{2}$

整理得：$\dfrac{AB}{BC}=\dfrac{3}{5}$．



【模拟题】

1.（2022·四川德阳·模拟预测）已知：四边形 $ABCD$ 是正方形，点 E 在 CD 边上，点 F 在 AD 边上，且 $AF=DE$.

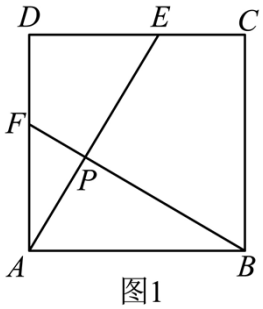


图1

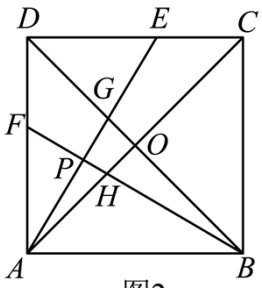


图2

(1)如图1，AE 与 BF 有怎样的关系．写出你的结果，并加以证明；

(2)如图2，对角线 AC 与 BD 交于点 O ．BD，AC 分别与 AE，BF 交于点 G，点 H .

①求证：$OG=OH$ ；

②连接 OP，若 $AP=4$，$OP=\sqrt{2}$，求 AB 的长．

【答案】(1) $AE\perp BF$；$AE=BF$ ．证明见解析

(2)①见解析；② $AB=2\sqrt{13}$

【详解】（1）解：$AE\perp BF$；$AE=BF$.

证明：∵四边形 $ABCD$ 是正方形，

$\therefore AB=AD$，$\angle BAD=\angle D=90^\circ$，

在 $\triangle ABF$ 和 $\triangle DAE$ 中，

$$\begin{cases} AB=AD \\ \angle BAD=\angle D=90^\circ \\ AF=DE \end{cases},$$

$\therefore \triangle ABF\cong\triangle DAE(\mathrm{SAS})$，

$\therefore AE=BF$，$\angle DAE=\angle ABF$，

$\because \angle DAE+\angle PAB=\angle BAD=90^\circ$，

$\therefore \angle PAB+\angle ABF=90^\circ$，

$\therefore \angle APB=180^\circ-90^\circ=90^\circ$，

$\therefore AE\perp BF$；

（2）①证明：∵四边形 $ABCD$ 是正方形，

$\therefore \angle AOB=\angle AOG=90^\circ$，$OA=OB$，$\angle ABO=\angle DAO=45^\circ$，

$\because \angle DAE=\angle ABF$，

$\therefore \angle ABO-\angle ABF=\angle DAO-\angle DAE$，

即 $\angle OAG=\angle OBH$，

在 $\triangle OAG$ 和 $\triangle OBH$ 中，

$$\begin{cases}\angle OAG=\angle OBH\\ OA=OB\\ \angle AOB=\angle AOG=90^\circ\end{cases},$$

$\therefore \triangle OAG\cong\triangle OBH(\mathrm{ASA})$，

$\therefore OG=OH$；

②解：如图2，过点O作$OM\perp AE$于M，作$ON\perp BF$于N，

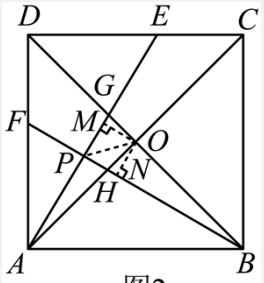


图2

$\because \triangle OAG\cong\triangle OBH$，

$\therefore \angle OGA=\angle OHB$，

在$\triangle OGM$和$\triangle OHN$中，

$$\begin{cases}\angle OMG=\angle ONH=90^\circ\\ \angle OGA=\angle OHB\\ OG=OH\end{cases},$$

$\therefore \triangle OGM\cong\triangle OHN(\mathrm{AAS})$，

$\therefore OM=ON$，

$\therefore$四边形$OMPN$是正方形，

$\because OP=\sqrt{2}$，

$\therefore PM=OM=\sqrt{2}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=1$，

$\because AP=4$，

$\therefore AM=AP+PM=4+1=5$，

在$Rt\triangle AOM$中，$OA=\sqrt{AM^2+OM^2}=\sqrt{5^2+1^2}=\sqrt{26}$，

$\therefore$正方形$ABCD$的边长$AB=\sqrt{2}=\sqrt{2}\times\sqrt{26}=2\sqrt{13}$.

2.（2022·四川成都·校考三模）在矩形$ABCD$中，点E为射线BC上一动点，连接AE.

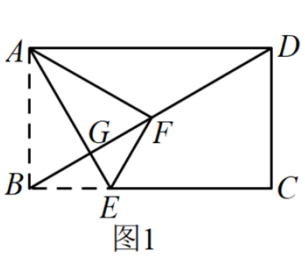


图1

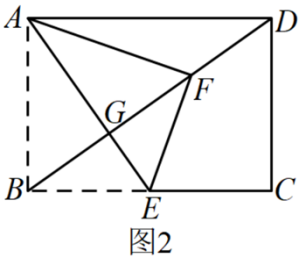
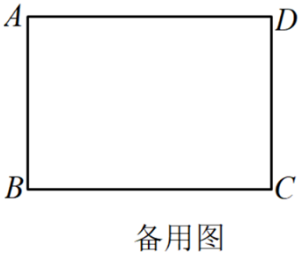


图2



备用图

(1)当点 E 在 BC 边上时，将 $\triangle ABE$ 沿 AE 翻折，使点 B 恰好落在对角线 BD 上点 F 处，AE 交 BD 于点 G.

①如图 1，若 $BC=\sqrt{3}AB$，求 $\angle AFD$ 的度数；

②如图 2，当 $AB=4$，且 $EF=EC$ 时，求 BC 的长.

(2)在②所得矩形 $ABCD$ 中，将矩形 $ABCD$ 沿 AE 进行翻折，点 C 的对应点为 C'，当点 E,C',D 三点共线时，求 BE 的长.

【答案】(1)①$120°$，②$4\sqrt{2}$

(2)$4\sqrt{2}+4$ 或 $4\sqrt{2}-4$

【详解】（1）解：①∵四边形 $ABCD$ 是矩形，

$\therefore AD=BC$，$\angle BAD=90°$，

$\because BC=\sqrt{3}AB$，

$\therefore AD=\sqrt{3}AB$，

$\therefore \tan\angle ABD=\dfrac{AD}{AB}=\sqrt{3}$，

$\therefore \angle ABD=60°$，

由折叠的性质得：$AF=AB$，

$\therefore \triangle ABF$ 是等边三角形，

$\therefore \angle AFB=60°$，

$\therefore \angle AFD=180°-\angle AFB=120°$；

②由折叠的性质得：$BF\perp AE$，$EF=EB$，

$\because EF=EC$，

$\therefore EF=EB=EC$，

$\therefore BC=2BE$，

∵四边形 $ABCD$ 是矩形，

$\therefore \angle ABC=90°$，$AD=BC=2BE$，$AD\parallel BC$，

$\therefore \triangle ADG\backsim\triangle EBG$，

$\therefore \dfrac{AG}{EG}=\dfrac{AD}{BE}=2$，

$\therefore AG=2EG$，

设 $EG=x$，则 $AG=2x$，

$\therefore AE=3x$，

在 $\triangle ABE$ 中，$BG\perp AE$，

$\therefore AB^2=AG\cdot AE$（射影定理），

即 $4^2=2x\cdot 3x$，

解得：$x=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$（负值已舍去），

$\therefore AE=3x=2\sqrt{6}$，

$\therefore BE=\sqrt{AE^2-AB^2}=\sqrt{(2\sqrt{6})^2-4^2}=2\sqrt{2}$，

$\therefore BC=2BE=4\sqrt{2}$，

即 BC 的长为 $4\sqrt{2}$；

（2）当点 E,C',D 三点共线时，分两种情况：

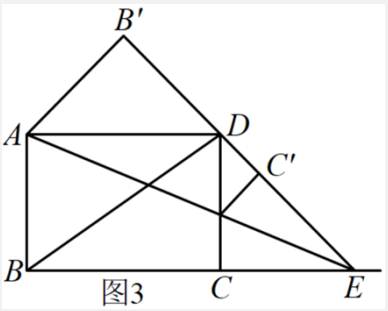


图3

a、如图 3，由②可知，$BC=4\sqrt{2}$，

∵四边形 $ABCD$ 是矩形，

$\therefore \angle ABC=\angle BCD=90°$，$AD=BC=4\sqrt{2}$，$CD=AB=4$，$AD\parallel BC$，

$\therefore \angle DCE=90°$，$\angle CED=\angle B'DA$，

由折叠的性质得：$AB'=AB=4$，$\angle B'=\angle ABC=90°$，

$\therefore \angle DCE=\angle B'$，$DC=AB'$，

$\therefore \triangle CDE\cong\triangle B'AD(AAS)$，

$\therefore DE=AD=4\sqrt{2}$，

$\therefore CE=\sqrt{DE^2-CD^2}=\sqrt{(4\sqrt{2})^2-4^2}=4$，

$\therefore BE=BC+CE=4\sqrt{2}+4$；

b、如图 4，

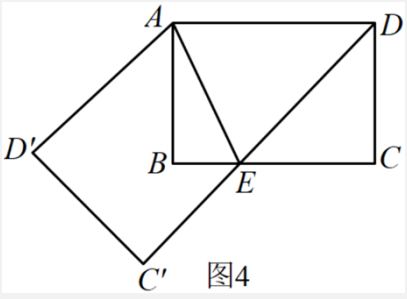


图4

由折叠的性质得：$\angle AEC'=\angle AEC$，

∵$\angle BEC'=\angle DEC$，

$\therefore \angle AEB=\angle AED$，

∵$AD\parallel BC$，

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：https://d.book118.com/428041032110006112