高等数学

无穷级数

我们研究世界万物都是从感性到理性、从有限到无限、从规则到不规则，然后再彼此间建立千丝万缕的联系。

数与函数的研究，也是如此。无穷级数是数与函数的另一种重要表达形式，也是数学理论研究与实际应用中极其有力的工具。无穷级数在表达函数、研究函数的性质、计算函数值以及求解微分方程等方面都有着重要的应用。研究级数及其和，可以说是研究数列及其极限的另一种形式。

本章先讨论数项级数及其基本性质，然后讨论函数项级数，并进一步讨论如何将函数展开成幂级数与三角级数的问题。

第一节 常数项级数的概念和性质

一、常数项级数的概念

有了中学数学和极限的理论，我们将讨论无穷个实数 $u_1, u_2, \cdots, u_n, \cdots$ 相加的情况

例如, 战国时代哲学家庄周所著的《庄子•天下篇》中提到“一尺之棰, 日取其半, 万世不竭”, 也就是说一根长为一尺的木棒, 每天截去一半, 这样的过程可以无穷次的进行下去。 若把每天截下那一部分的长度“加”起来:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots$$

这就是一个“无限个数相加”的例子. 可见开始的一尺之棰的长度1就是它的和.

再如下面的无穷和的表达式:

$$-1-1-1-1-1-\cdots$$

其结果是负无穷大.

由此产生了问题: “无限个数相加”是否存在“和”; 如果存在, “和”等于什么？如何求出此和？为此我们给出下面的讨论.

定义 1　设无穷数列 $u_1,u_2,\cdots,u_n,\cdots$ ，则称

$$u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots \qquad (1)$$

为常数项级数或无穷级数（也常简称级数）, 其中 u_n 称为常数项级数(1)的通项. 常数项级数(1)也常简记 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 或 $\sum u_n$.

我们把常数项级(1)的前 n 项之和记作

$$S_n=u_1+u_2+\cdots+u_n=\sum_{k=1}^{n}u_k$$

称 S_n 为级数(1)的前 n 项部分和. 当 n 依次取 1、2、3、$\cdots$ 时，由部分和构成一个新数列:

$$S_1=u_1,S_2=u_1+u_2,S_3=u_1+u_2+u_3,\cdots,S_n=u_1+u_2+\cdots+u_n,\cdots$$

定义2　若常数项级数(1)的部分和数列 $\{S_n\}$ 收敛于 S（即 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$）, 则称常数项级数(1)收敛, 称 S 为常数项级数(1)的和, 即 $S = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$ 或 $S = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$; 反之, 则称常数项级数(1)是发散的.

例1、 判断下列常数项级数是否收敛, 若收敛求出其和.

(1) $\sum\limits_{i=1}^{\infty} 1$　　(2) $\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} + \cdots$

解　(1) $\sum\limits_{i=1}^{\infty} 1 = 1+1+1+\cdots+1+1+\cdots$

此级数的部分和为 $S_n = 1+1+1+\cdots+1 = n$, 显然有 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = +\infty$,

因此所给级数是发散的.

(2) 我们先对级数的通项进行拆分，可得级数的部分和为

$$S_n=\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)$$

进而得 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\dfrac{1}{2}$.此级数收敛到 $\dfrac{1}{2}$.

结论：几何级数（也称为等比级数）的敛散性:

$$\sum_{n=0}^{\infty}aq^n=a+aq+aq^2+\cdots+aq^n+\cdots=\begin{cases}\dfrac{a}{1-q}, & |q|<1\\ \text{不存在}, & |q|\ge 1\end{cases},(a\neq 0)$$

此结论的证明留给大家.

注意：当级数收敛时, 其部分和是级数的和的近似值, 它们之间的误差为:

$$r_n=S-S_n=u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots$$

叫做级数(1)的余项.

二、数项级数的性质

利用级数与数列极限的联系, 我们不难根据数列极限的性质推出下面有关级数的一些性质.

性质1 若级数 $\sum u_n$ 与 $\sum v_n$ 分别收敛于 A 和 B , c、d 为常数, 则由它们通项的线性组合构成的新级数 $\sum(cu_n \pm dv_n)$ 也收敛, 且

$$\sum(cu_n \pm dv_n)=c\sum u_n \pm d\sum v_n = cA \pm dB$$

, 即其和为 $cA \pm dB$

性质2 去掉、增加或改变级数的有限项并不改变级数的敛散性；但若是收敛级数时，可能改变其收敛值.

性质3 在收敛级数的项中任意加括号, 既不改变级数的收敛性, 也不改变它的和. 反之不对.

注意： **从级数加括号后的收敛性**, 不能推断它在未加括号前也收敛. 例如,

$$(1-1)+(1-1)+\cdots+(1-1)+\cdots = 0+0+\cdots+0+\cdots = 0$$ 收敛,

但级数 $1-1+1-1+\cdots$ 却是发散的.

性质4 （收敛级数的必要条件）: 若级数 $\sum u_n$ 收敛, 则有 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.反之不对.
反例如下：

例2、调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ ，虽然通项趋于0，但此级数是发散的.

（提示：可用反证法证明其发散.）

性质4 （性质4的逆否命题） 如果 $\lim_{n\to\infty}u_n \neq 0$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 必定发散.

例3、 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}$ ，它的通项 $\frac{n}{n+1}\to 1\neq 0 \quad (n\to\infty)$, 因此该级数发散.

第二节　常数项级数的审敛法

数项级数是否收敛，我们已经学习了定义法以及部分和数列的极限的求法，但是对于稍微复杂点的数项级数是否收敛，用前两个方法去判别难度较大。本节我们介绍特殊数项级数的判别方法.

一般的常数项级数, 它的各项可以是正数、负数或者零. 现在我们先讨论各项都是正数或零的级数, 这种级数称为正项级数.

一、正项级数收敛性判别法

设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$, 其中 $u_n \geq 0$　　（1）

设其部分和为 S_n , 显然部分和数列 $\{S_n\}$ 是单调增加的, 即:

$$S_1 \leq S_2 \leq \cdots \leq S_n \leq \cdots \ (n = 1, 2, \cdots)$$

结合数列极限存在的单调有界原理可得，若存在一个正数 M, 使得$|S_n| < M$，

则存在 $\lim_{n\to\infty} S_n$ ，即此正项级数收敛.

下面我们再介绍几种正项级数收敛性的判别法.

定理1 比较判别法

设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 是两个正项级数, 如果存在某自然数 N , 对一切 $n > N$, 都有 $u_n \le v_n$, 那么:

(1) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛;

(2) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 也发散.

注意： 比较判别法的特点就是要借助于另一个“大”的级数收敛来判别原级数收敛或者借助于另一个“小”的级数发散来判别原级数发散.

例1 判断下列正项级数的敛散性.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n+2}$ (2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$

解 (1) 由于 $\frac{1}{3^n+2}<\frac{1}{3^n}$ ，而几何级数 $\sum\frac{1}{3^n}$ 是收敛的, 根据比较判别法得 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n+2}$ 收敛.

(2) 由于 $\frac{1}{\sqrt{n}}>\frac{1}{n}$, 而调和级数 $\sum\frac{1}{n}$ 是发散的, 则根据比较判别法得 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ 也发散.

定理1 比较判别法的极限形式

设 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 是两个正项级数, 当 $\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=\rho$ ，

(1) 若 $0<\rho<+\infty$，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 与级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 敛散性相同;

(2) 若 $\rho=0$，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛;

(3)若 $\rho=+\infty$, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 发散，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散.

例2 判断下列级数的敛散性.

(1) $\sum \frac{1}{2^n + n}$ (2) $\sum \sin \frac{1}{n^2}$

解 (1) 由于 $\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{2^n+n}}{\frac{1}{2^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{2^n+n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\frac{n}{2^n}} = 1$ ，而 $\sum \frac{1}{2^n}$ 是收敛的, 故 $\sum \frac{1}{2^n+n}$ 也收敛.

(2) 由于 $\lim_{n\to\infty} \frac{\sin \frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}} = 1$. 而 $\sum \frac{1}{n^2}$ 收敛, 故 $\sum \sin \frac{1}{n^2}$ 也收敛.

结论： p -级数：$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{n^p} + \cdots$ ，

当 $p \le 1$ 时, p-级数发散; 当 $p > 1$ 时, p-级数收敛.

上面 p-级数的敛散性的结论要记牢，其证明留给读者去思考.

定理2　比值判别法

若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$为正项级数, 且 $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=q$， 则:

(1) 当 $0\le q<1$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛;

(2) 当 $q>1$或$q=+\infty$时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散;

(3) 当 $q=1$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 可能收敛也可能发散.

例3 判断下列级数的敛散性.

(1) $\sum\frac{n}{3^{n-1}}$　　(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n n!}{n^n}$

解 (1) 由于 $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)3^{n-1}}{n3^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{3n}=\frac{1}{3}<1$，

故由比值判别法知此级数收敛.

(2) 由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{5^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\dfrac{5^n\cdot n!}{n^n}}=\lim_{n\to\infty}5\cdot\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=\lim_{n\to\infty}5\cdot\left[\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}\right]=\frac{5}{e}>1$$

由比值审敛法知原级数发散.

定理3 根式判别法

设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 为正项级数, 如果 $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = q$, 则有

(1) 当 $0 \le q < 1$ 时, 级数收敛;

(2) 当 $q > 1$ 时, 级数发散;

(3) 当 $q = 1$ 时, 级数可能收敛也可能发散.

例4　讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3+(-1)^n}{2^n}$ **的敛散性.**

解　由于 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{3+(-1)^n}{2^n}}=\frac{1}{2}$ <1，所以原级数是收敛的.

注意：（1）一般地, 当 u_n 为乘积式时多用比值判别法, 当 u_n 为乘方形式时多用根式判别法.（2）比较判别法则需找一个已知收敛或发散的级数作参照.(3) 比值判别法与根式判别法不需要其它参照级数, 就其级数本身的特点进行判定, 这是它的优点；缺点是当极限 $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=1$（或 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=1$）时,比值与根式判别法失效, 需用其它判别法判别.

总之, 在具体使用这三个判别法时, 可根据所给级数的特征而灵活选择判别法进行判定.

二、 任意项级数、绝对收敛和条件收敛

1、 交错级数及其敛散性

定义1 若级数的各项符号正负相间, 即

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \cdots + (-1)^{n-1}u_n + \cdots \ (u_n > 0, n = 1, 2, \cdots) \qquad (2)$$

则称此级数为交错级数.

例如：$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}+\cdots$ 是交错级数.

交错级数的收敛性判别有以下方法.