

江苏省连云港市灌南县第二中学 2023-2024 学年高考临考冲刺数学试卷

注意事项：

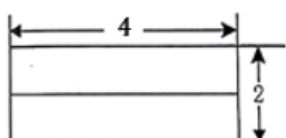
1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号、考场号和座位号填写在试题卷和答题卡上。用 2B 铅笔将试卷类型 (B) 填涂在答题卡相应位置上。将条形码粘贴在答题卡右上角“条形码粘贴处”。
2. 作答选择题时，选出每小题答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目选项的答案信息点涂黑；如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案。答案不能答在试题卷上。
3. 非选择题必须用黑色字迹的钢笔或签字笔作答，答案必须写在答题卡各题目指定区域内相应位置上；如需改动，先划掉原来的答案，然后再写上新答案；不准使用铅笔和涂改液。不按以上要求作答无效。
4. 考生必须保证答题卡的整洁。考试结束后，请将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 若 $a \in R$ ，则“ $a = 3$ ”是“ $x(1+ax)^5$ 的展开式中 x^3 项的系数为 90”的 ()

- A. 必要不充分条件 B. 充分不必要条件 C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

2. 一个空间几何体的正视图是长为 4，宽为 $\sqrt{3}$ 的长方形，侧视图是边长为 2 的等边三角形，俯视图如图所示，则该几何体的体积为 ()



俯视图

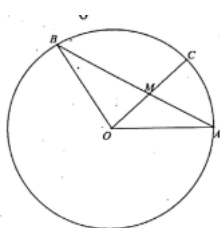
- A. $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ B. $4\sqrt{3}$ C. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ D. $2\sqrt{3}$

3. 设 m, n 是两条不同的直线， α, β 是两个不同的平面，给出下列四个命题 ①若 $m \parallel n, m \perp \beta$ ，则 $n \perp \beta$ ；②若 $m \parallel \alpha, m \parallel \beta$ ，则 $\alpha \parallel \beta$ ；③若 $m \perp \alpha, n \parallel \alpha$ ，则 $m \perp n$ ；④若 $m \parallel \alpha, m \perp \beta$ ，则 $\alpha \perp \beta$ ；其中真命题的个数为 ()

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

4. 点 A, B, C 是单位圆 O 上不同的三点，线段 OC 与线段 AB 交于圆内一点 M ，若

$\vec{OC} = m\vec{OA} + n\vec{OB}, (m > 0, n > 0), m + n = 2$ ，则 $\angle AOB$ 的最小值为 ()



- A. $\frac{\pi}{6}$ B. $\frac{\pi}{3}$ C. $\frac{\pi}{2}$ D. $\frac{2\pi}{3}$

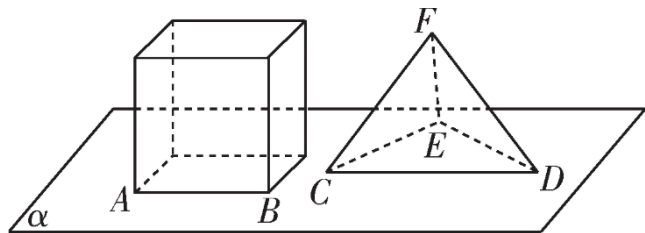
5. 已知函数 $f(x) = \sin^2 \frac{\pi}{4}x - \sqrt{3} \sin \frac{\pi}{4}x \cos \frac{\pi}{4}x$, 则 $f(1) + f(2) + \dots + f(2020)$ 的值等于 ()

- A. 2018 B. 1009 C. 1010 D. 2020

6. 已知向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 满足 $|\vec{a}|=1$, $|\vec{b}|=2$, 且 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为 120° , 则 $|\vec{a}-3\vec{b}| = ()$

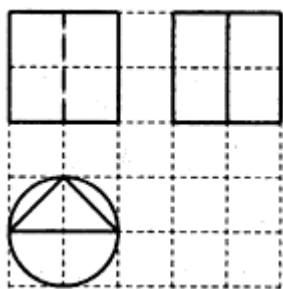
- A. $\sqrt{11}$ B. $\sqrt{37}$ C. $2\sqrt{10}$ D. $\sqrt{43}$

7. 如图, 正方体的底面与正四面体的底面在同一平面 α 上, 且 $AB \parallel CD$, 若正方体的六个面所在的平面与直线 CE , EF 相交的平面个数分别记为 m , n , 则下列结论正确的是 ()



- A. $m=n$ B. $m=n+2$ C. $m < n$ D. $m+n < 8$

8. 一个组合体的三视图如图所示 (图中网格小正方形的边长为 1), 则该几何体的体积是 ()



- A. $2\pi - \frac{1}{2}$ B. $2\pi - 1$ C. $2\pi - 2$ D. $2\pi - 4$

9. 已知集合 $A = \left\{ x \in \mathbb{Z} \mid \frac{x}{x+3} \leq 0 \right\}$, 则集合 A 真子集的个数为 ()

- A. 3 B. 4 C. 7 D. 8

10. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 2^{x+1} + 2, & x \leq 0, \\ |\log_2 x|, & x > 0, \end{cases}$ 若关于 x 的方程 $[f(x)]^2 - 2af(x) + 3a = 0$ 有六个不相等的实数根, 则实数 a 的取值范围为 ()

- A. $\left(3, \frac{16}{5} \right)$ B. $\left[3, \frac{16}{5} \right]$ C. $(3, 4)$ D. $(3, 4]$

11. 若 $(1+ax)(1+x)^5$ 的展开式中 x^2, x^3 的系数之和为 -10 , 则实数 a 的值为 ()

- A. -3 B. -2 C. -1 D. 1

12. 设集合 A , B 是全集 U 的两个子集, 则“ $A \subseteq B$ ”是“ $A \cap B = \emptyset$ ”的 ()

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 已知向量 $\vec{a} = (2, -6)$, $\vec{b} = (3, m)$, 若 $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$, 则 $m = \underline{\hspace{2cm}}$.

14. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - y^2 = 1 (a > 0)$ 的一条渐近线方程为 $x + y = 0$, 则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$.

15. 在三棱锥 $A-BCD$ 中, 已知 $BC=CD=BD=\sqrt{2}AB=\sqrt{2}AD=6$, 且平面 $ABD \perp$ 平面 BCD , 则三棱锥 $A-BCD$ 外接球的表面积为 _____.

16. 从集合 $\{1, 2, 3\}$ 中随机取一个元素, 记为 a , 从集合 $\{2, 3, 4\}$ 中随机取一个元素, 记为 b , 则 $a \leq b$ 的概率为 _____.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12 分) 设 a 为实数, 已知函数 $f(x) = axe^x$, $g(x) = x + \ln x$.

(1) 当 $a < 0$ 时, 求函数 $f(x)$ 的单调区间:

(2) 设 b 为实数, 若不等式 $f(x) \geq 2x^2 + bx$ 对任意的 $a \geq 1$ 及任意的 $x > 0$ 恒成立, 求 b 的取值范围;

(3) 若函数 $h(x) = f(x) + g(x)$ ($x > 0, x \in \mathbf{R}$) 有两个相异的零点, 求 a 的取值范围.

18. (12 分) 在直角坐标系中, 圆 C 的参数方程为: $\begin{cases} x = 1 + 2 \cos \alpha \\ y = \sqrt{3} + 2 \sin \alpha \end{cases}$ (α 为参数), 以坐标原点为极点, 以 x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系, 且长度单位相同.

(1) 求圆 C 的极坐标方程:

(2) 若直线 $l: \begin{cases} x = t \cos \varphi \\ y = t \sin \varphi \end{cases}$ (t 为参数) 被圆 C 截得的弦长为 $2\sqrt{3}$, 求直线 l 的倾斜角.

19. (12 分) 已知函数 $f(x) = |x+2| + |x-4|$.

(1)求不等式 $f(x) \leq 3x$ 的解集;

(2)若 $f(x) \geq k|x-1|$ 对任意 $x \in \mathbf{R}$ 恒成立, 求 k 的取值范围.

20. (12 分) 在直角坐标系 xOy 中, 曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases} x = -1 + 2\cos\varphi \\ y = 2\sin\varphi \end{cases}$ (φ 为参数). 以坐标原点为极点, x 轴正

半轴为极轴，建立极坐标系. 已知点 P 的直角坐标为 $(-2, 0)$ ，过 P 的直线 l 与曲线 C 相交于 M, N 两点.

(1) 若 l 的斜率为 2, 求 l 的极坐标方程和曲线 C 的普通方程;

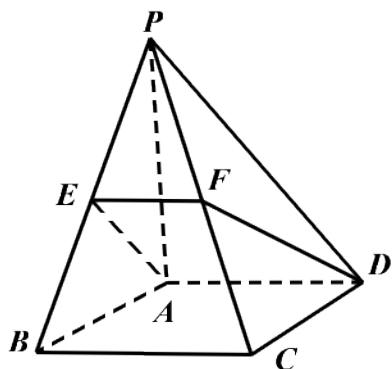
(2) 求 $\overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{PN}$ 的值.

21. (12 分) 已知函数 $f(x) = xe^x$, $g(x) = \frac{\ln x}{x}$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的极值;

(2) 当 $x > 0$ 时, 求证: $f(x) > g(x)$.

22. (10 分) 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, $PA \perp$ 平面 $ABCD$, 四边形 $ABCD$ 为正方形, 点 F 为线段 PC 上的点, 过 A, D, F 三点的平面与 PB 交于点 E . 将① $AB = AP$, ② $BE = PE$, ③ $PB \perp FD$ 中的两个补充到已知条件中, 解答下列问题:



(1) 求平面 $ADFE$ 将四棱锥分成两部分的体积比;

(2) 求直线 PC 与平面 $ADFE$ 所成角的正弦值.

参考答案

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

1、B

【解析】

求得 $x(1+ax)^5$ 的二项展开式的通项为 $C_5^k \times a^k \cdot x^{k+1}$, 令 $k=2$ 时, 可得 x^3 项的系数为 90, 即 $C_5^2 \times a^2 = 90$, 求得 a , 即可得出结果.

【详解】

若 $a=3$ 则 $x(1+ax)^5 = x(1+3x)^5$ 二项展开式的通项为 $C_5^k \times 3^k \cdot x^{k+1}$, 令 $k+1=3$, 即 $k=2$, 则 x^3 项的系数为

$C_5^2 \times 3^2 = 90$, 充分性成立; 当 $x(1+ax)^5$ 的展开式中 x^3 项的系数为 90, 则有 $C_5^2 \times a^2 = 90$, 从而 $a = \pm 3$, 必要性不成立.

故选:B.

【点睛】

本题考查二项式定理、充分条件、必要条件及充要条件的判断知识,考查考生的分析问题的能力和计算能力,难度较易.

2、B

【解析】

由三视图确定原几何体是正三棱柱,由此可求得体积.

【详解】

由题意原几何体是正三棱柱, $V = \frac{1}{2} \times 2 \times \sqrt{3} \times 4 = 4\sqrt{3}$.

故选: B.

【点睛】

本题考查三视图,考查棱柱的体积. 解题关键是由三视图还原出原几何体.

3、C

【解析】

利用线线、线面、面面相应的判定与性质来解决.

【详解】

如果两条平行线中一条垂直于这个平面,那么另一条也垂直于这个平面知①正确;当直线 m 平行于平面 α 与平面 β 的交线时也有 $m//\alpha$, $m//\beta$,故②错误;若 $m \perp \alpha$,则 m 垂直平面 α 内以及与平面 α 平行的所有直线,故③正确;若 $m//\alpha$,则存在直线 $l \subset \alpha$ 且 $m//l$,因为 $m \perp \beta$,所以 $l \perp \beta$,从而 $\alpha \perp \beta$,故④正确.

故选: C.

【点睛】

本题考查空间中线线、线面、面面的位置关系,里面涉及到了相应的判定定理以及性质定理,是一道基础题.

4、D

【解析】

由题意得 $1 = m^2 + n^2 + 2mn \cos \angle AOB$,再利用基本不等式即可求解.

【详解】

将 $\overrightarrow{OC} = m\overrightarrow{OA} + n\overrightarrow{OB}$ 平方得 $1 = m^2 + n^2 + 2mn \cos \angle AOB$,

$$\cos \angle AOB = \frac{1 - m^2 - n^2}{2mn} = \frac{1 - (m+n)^2 + 2mn}{2mn} = -\frac{3}{2mn} + 1 \leq -\frac{3}{2 \times (\frac{m+n}{2})^2} + 1 = -\frac{1}{2}$$

(当且仅当 $m = n = 1$ 时等号成立),

Q $0 < \angle AOB < \pi$,

$\therefore \angle AOB$ 的最小值为 $\frac{2\pi}{3}$,

故选: D.

【点睛】

本题主要考查平面向量数量积的应用, 考查基本不等式的应用, 属于中档题.

5、C

【解析】

首先, 根据二倍角公式和辅助角公式化简函数解析式, 根据所求函数的周期性, 得到其周期为 4, 然后借助于三角函数的周期性确定其值即可.

【详解】

解: $f(x) = \sin^2 \frac{\pi}{4} x - \sqrt{3} \sin \frac{\pi}{4} x \cos \frac{\pi}{4} x$.

$$= \frac{1}{2} (1 - \cos \frac{\pi}{2} x) - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \frac{\pi}{2} x$$

$$= -\sin(\frac{\pi}{2} x + \frac{\pi}{6}) + \frac{1}{2},$$

$$\therefore f(x) = -\sin(\frac{\pi}{2} x + \frac{\pi}{6}) + \frac{1}{2},$$

$$\therefore f(x) \text{ 的周期为 } T = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}} = 4,$$

$$f(1) = \frac{1-\sqrt{3}}{2}, \quad f(2) = 1, \quad f(3) = \frac{1+\sqrt{3}}{2}, \quad f(4) = 0,$$

$$f(1) + f(2) + f(3) + f(4) = 2.$$

$$\therefore f(1) + f(2) + \dots + f(2020)$$

$$= 505 \times [f(1) + f(2) + f(3) + f(4)]$$

$$= 505 \times 2$$

$$= 1010.$$

故选: C

【点睛】

本题重点考查了三角函数的图象与性质、三角恒等变换等知识, 掌握辅助角公式化简函数解析式是解题的关键, 属于中档题.

6、D

【解析】

先计算 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ ，然后将 $|\vec{a} - 3\vec{b}|$ 进行平方，，可得结果.

【详解】

由题意可得：

$$\vec{r}_a \cdot \vec{r}_b = |\vec{r}_a| |\vec{r}_b| \cos 120^\circ = 1 \times 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -1$$

$$\therefore (\vec{r}_a - 3\vec{r}_b)^2 = \vec{r}_a^2 - 6\vec{r}_a \cdot \vec{r}_b + 9\vec{r}_b^2 = 1 + 6 + 36 = 43$$

$$\therefore \text{则 } |\vec{a} - 3\vec{b}| = \sqrt{43}.$$

故选：D.

【点睛】

本题考查的是向量的数量积的运算和模的计算，属基础题。

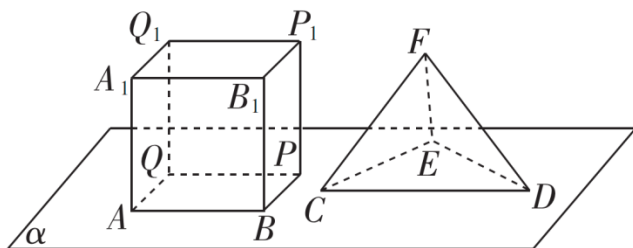
7、A

【解析】

根据题意，画出几何位置图形，由图形的位置关系分别求得 m, n 的值，即可比较各选项.

【详解】

如下图所示， $CE \subset \text{平面 } ABPQ$ ，从而 $CE \parallel \text{平面 } A_1B_1P_1Q_1$ ，



易知 CE 与正方体的其余四个面所在平面均相交，

$$\therefore m = 4,$$

$\because EF \parallel \text{平面 } BPP_1B_1$ ， $EF \parallel \text{平面 } AQQ_1A_1$ ，且 EF 与正方体的其余四个面所在平面均相交，

$$\therefore n = 4,$$

$\therefore$ 结合四个选项可知，只有 $m = n$ 正确.

故选：A.

【点睛】

本题考查了空间几何体中直线与平面位置关系的判断与综合应用，对空间想象能力要求较高，属于中档题.

8、C

【解析】

根据组合几何体的三视图还原出几何体，几何体是圆柱中挖去一个三棱柱，从而解得几何体的体积.

【详解】

由几何体的三视图可得，

几何体的结构是在一个底面半径为 1 的圆、高为 2 的圆柱中挖去一个底面腰长为 $\sqrt{2}$ 的等腰直角三角形、高为 2 的棱柱，

故此几何体的体积为圆柱的体积减去三棱柱的体积，

$$\text{即 } V = \pi \cdot 1^2 \cdot 2 - \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot 2 = 2\pi - 2,$$

故选 C.

【点睛】

本题考查了几何体的三视图问题、组合几何体的体积问题，解题的关键是要能由三视图还原出组合几何体，然后根据几何体的结构求出其体积.

9、C

【解析】

解出集合 A ，再由含有 n 个元素的集合，其真子集的个数为 $2^n - 1$ 个可得答案.

【详解】

$$\text{解：由 } A = \left\{ x \in \mathbb{Z} \mid \frac{x}{x+3} \leq 0 \right\}, \text{ 得 } A = \{ x \in \mathbb{Z} \mid -3 < x \leq 0 \} = \{-2, -1, 0\}$$

所以集合 A 的真子集个数为 $2^3 - 1 = 7$ 个.

故选：C

【点睛】

此题考查利用集合子集个数判断集合元素个数的应用，含有 n 个元素的集合，其真子集的个数为 $2^n - 1$ 个，属于基础题.

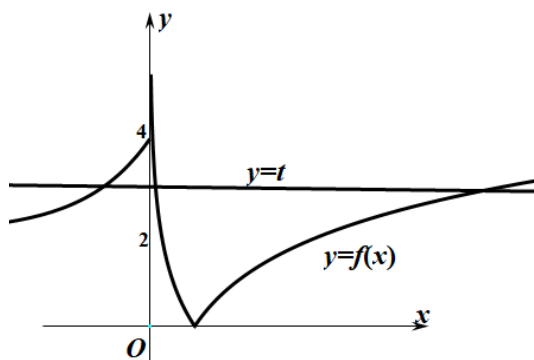
10、B

【解析】

令 $f(x) = t$ ，则 $t^2 - 2at + 3a = 0$ ，由图象分析可知 $t^2 - 2at + 3a = 0$ 在 $(2, 4]$ 上有两个不同的根，再利用一元二次方程根的分布即可解决.

【详解】

令 $f(x) = t$ ，则 $t^2 - 2at + 3a = 0$ ，如图



$y=t$ 与 $y=f(x)$ 顶多只有 3 个不同交点，要使关于 x 的方程 $[f(x)]^2 - 2af(x) + 3a = 0$ 有

六个不相等的实数根，则 $t^2 - 2at + 3a = 0$ 有两个不同的根 $t_1, t_2 \in (2, 4]$ ，

设 $g(t) = t^2 - 2at + 3a$ 由根的分布可知，

$$\begin{cases} \Delta = 4a^2 - 12a > 0 \\ a \in (2, 4) \\ g(2) > 0 \\ g(4) \geq 0 \end{cases}, \text{解得 } 3 < a \leq \frac{16}{5}.$$

故选：B.

【点睛】

本题考查复合方程根的个数问题，涉及到一元二次方程根的分布，考查学生转化与化归和数形结合的思想，是一道中档题.

11、B

【解析】

由 $(1+ax)(1+x)^5 = (1+x)^5 + ax(1+x)^5$ ，进而分别求出展开式中 x^2 的系数及展开式中 x^3 的系数，令二者之和等于 -10 ，可求出实数 a 的值.

【详解】

$$\text{由 } (1+ax)(1+x)^5 = (1+x)^5 + ax(1+x)^5,$$

则展开式中 x^2 的系数为 $C_5^2 + aC_5^1 = 10 + 5a$ ，展开式中 x^3 的系数为 $C_5^3 + aC_5^2 = 10 + 10a$ ，

二者的系数之和为 $(10 + 5a) + (10a + 10) = 15a + 20 = -10$ ，得 $a = -2$.

故选：B.

【点睛】

本题考查二项式定理的应用，考查学生的计算求解能力，属于基础题.

12、C

【解析】

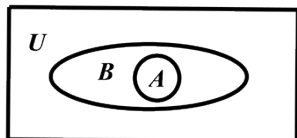
作出韦恩图，数形结合，即可得出结论.

【详解】

如图所示， $A \subseteq B \Rightarrow A \cap \complement_U B = \emptyset$ ，

同时 $A \cap \complement_U B = \emptyset \Rightarrow A \subseteq B$.

故选:C.



【点睛】

本题考查集合关系及充要条件，注意数形结合方法的应用，属于基础题.

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13、 1

【解析】

根据向量加法和减法的坐标运算,先分别求得 $\vec{a} + \vec{b}$ 与 $\vec{a} - \vec{b}$,再结合向量的模长公式即可求得 m 的值.

【详解】

向量 $\vec{a} = (2, -6), \vec{b} = (3, m)$

则 $\vec{a} + \vec{b} = (5, -6 + m), \vec{a} - \vec{b} = (-1, -6 - m)$

则 $|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{5^2 + (-6 + m)^2} = \sqrt{m^2 - 12m + 61}$

$|\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{(-1)^2 + (-6 - m)^2} = \sqrt{m^2 + 12m + 37}$

因为 $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$

即 $\sqrt{m^2 - 12m + 61} = \sqrt{m^2 + 12m + 37}$,化简可得 $-12m + 61 = 12m + 37$

解得 $m = 1$

故答案为: 1

【点睛】

本题考查了向量坐标加法和减法的运算,向量模长的求法,属于基础题.

14、 1

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/428073050076006074>