

## · 课件编辑说明 ·

### 版本要求

本课件需用office2010及以上版本打开，如果您的电脑是office2007及以下版本或者WPS软件，可能会出现不可编辑的文档。

### 乱码问题

如您在使用过程中遇到公式不显示或者乱码的情况，可能是因为您的电脑缺少字体，请登录网站[www.canpointgz.cn/faq](http://www.canpointgz.cn/faq) 下载。

### 联系我们

如您还有其他方面的问题，请登录网站[www.canpointgz.cn/faq](http://www.canpointgz.cn/faq) ，点击“常见问题” ，或致电010-58818058。



# 全品 学乐考

高中数学

选择性必修第二册 RJA



# 第四章数列

与子

CONTENTS

## 4. 4\*数学归纳法

---

课前预习 课中探究 备课素材

探究点一数学归纳法的原理

探究点二数学归纳法的应用

## 【学习目标】

1. 了解数学归纳法的原理.
2. 能用数学归纳法证明与正整数 $n$ 有关的一些简单命题.

## 课前预习

### 知识点数学归纳法

一般地，证明一个与 正整数 $n$  有关的命题，可按下列步骤进行：

(1) (归纳奠基) 证明当 $n = \underline{(n_0 \in \mathbb{N})}$  时命题成立；

(2) (归纳递推) 以“当 $n = k (k \in \mathbb{N}^*, k \geq n_0)$ 时命题成立”为条件，推出“当 $n = \underline{k+1}$ 时命题也成立”。

只要完成这两个步骤，就可以断定命题对从 $n_0$ 开始的所有正整数 $n$ 都成立，这种证明方法称为数学归纳法

## 课前预习

**【诊断分析】**判断正误. (请在括号中打“√”或“×”)

(1) 与正整数 $n$ 有关的数学命题只能用数学归纳法证明. (×)

**【解析】**与正整数 $n$ 有关的数学命题也可以用其他方法证明.

(2) 数学归纳法证明的第一步中 $n$ 的初始值 $n_0$ 只能是1. (×)

**【解析】**数学归纳法证明的第一步中 $n$ 的初始值 $n_0$ 应根据命题的具体情况来确定, 不一定是1. 如用数学归纳法证明凸 $n$ 边形的内角和为 $(n-2) \cdot 180^\circ$ 时, 应取其初始值 $n_0=3$ .

(3) 数学归纳法的两个步骤缺一不可. (√)

**【解析】**第一步是基础, 第二步利用假设进行推理是关键, 两个步骤缺一不可.

## 课中探究

### 探究点一 数学归纳法的原理

例1 (1) 用数学归纳法证明  $1+a+a^2+\cdots+a^n=\frac{1-a^{n+1}}{1-a}$  ( $a \neq 1, n \in \mathbb{N}$ ), 要验证当  $n=1$  时等式成立, 其左边的式子应是 ( **B** )

A.1

B.1+a

C.1+a+a<sup>2</sup>

D.1+a+a<sup>2</sup>+a+

**[解析]** 当  $n=1$  时, 左边的式子应是  $1+a$ .



## 课中探究

(2) [2023·浙江嘉兴一中高二期中]用数学归纳法证明“ $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{3n+1} > 1 (n \in \mathbb{N})$ ”时,假设当 $n=k (k \in \mathbb{N})$ 时命题成立,则当 $n=k+1$ 时,不等式的左边应在 $n=k$ 的基础上加上 (D)

A.  $\frac{1}{3k+1}$

B.  $\frac{1}{3k+1} - \frac{1}{k+1}$

C.  $\frac{1}{3k+2} + \frac{1}{3k+3} + \frac{1}{3k+4}$

D.  $\frac{1}{3k+2} + \frac{1}{3k+4} - \frac{2}{3(k+1)}$

**[解析]**当 $n=k (k \in \mathbb{N}^*)$ 时,不等式的左边:为 $\frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3} + \dots + \frac{1}{3k+1}$ ,当 $n=k+1$ 时,不等式

的左边为 $\frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3} + \frac{1}{k+4} + \dots + \frac{1}{3k+3} + \frac{1}{3k+4}$ ,则当 $n=k+1$ 时,不等式的左边应在 $n=k$ 的基

础上加上 $\frac{1}{3k+2} + \frac{1}{3k+3} + \frac{1}{3k+4} - \frac{1}{k+1} = \frac{1}{3k+2} + \frac{1}{3k+4} - \frac{2}{3(k+1)}$ ,故选D.

## 课中探究

### 探究点二 数学归纳法的应用

#### 角度一 证明和n有关的等式

**例2** [2022·广西河池高二期中]用数学归纳法证明： $(1^2+1)+(2^2+2)+\dots+(n^2+n)=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$ ( $n$ 为正整数).

**证明：**（1）当 $n=1$ 时，左边=2，右边= $\frac{1}{3}\times 1\times 2\times 3=2$ ，等式成立.

（2）假设当 $n=k$  ( $k\in\mathbb{N}^*$ )时，等式成立，

即 $(1^2+1)+(2^2+2)+\dots+(k^2+k)=\frac{1}{3}k(k+1)(k+2)$ ,

## 课中探究

那么当 $n=k+1$ 时,

$$(1^2+1)+(2^2+2)+\cdots+(k^2+k)+[(k+1)^2+(k+1)]=\frac{1}{3}k(k+1)(k+2)+(k+1)^2+(k+1)=$$
$$\frac{1}{3}k(k+1)(k+2)+(k+1)(1+k+1)=\frac{1}{3}(k+1)(k+2)(k+3)=\frac{1}{3}(k+1)[(k+1)+1][(k+1)+2].$$

即当 $n=k+1$ 时, 等式也成立.

综上所述, 等式对任意正整数 $n$ 都成立.

## 课中探究

**变式** 设关于正整数 $n$ 的函数 $f(n)=1\times 2^2+2\times 3^2+\dots+n(n+1)$ ?

(1) 求 $f(1)$ ,  $f(2)$ ,  $f(3)$ .

**解:**  $f(1)=4$ ,  $f(2)=22$ ,  $f(3)=70$ .

(2) 是否存在常数 $a$ ,  $b$ ,  $c$ , 使得 $f(n)=\frac{n(n+1)}{12}\cdot(an^2+bn+c)$ 对任意 $n\in\mathbb{N}^*$  恒成立? 若存在, 用数学归纳法证明你的结论; 若不存在, 请说明理由.

**解:** 假设存在 $a$ ,  $b$ ,  $c$ 满足题意, 则由题意可得
$$\begin{cases} a + b + c = 24, \\ 4a + 2b + c = 44, \\ 9a + 3b + c = 70 \end{cases} \text{解得} \begin{cases} a = 3, \\ b = 11, \\ c = 10. \end{cases}$$

## 课中探究

下面用数学归纳法证明  $f(n) = \frac{n(n+1)}{12}(3n^2+11n+10)$  对任意  $n \in \mathbb{N}^*$  恒成立.

① 当  $n=1$  时,  $f(1) = \frac{1 \times 2}{12} \times (3+11+10) = 4$ , 等式成立.

② 假设当  $n=k$  ( $k \in \mathbb{N}$ ) 时, 等式成立, 即  $f(k) = \frac{k(k+1)}{12}(3k^2+11k+10)$ , 则当  $n=k+1$  时,

$$f(k+1) = f(k) + (k+1)(k+2)^2 = \frac{k(k+1)}{12}(3k^2+11k+10) + (k+1)(k+2)^2 = \frac{k(k+1)}{12}(k+2)(3k+5) +$$

$$(k+1)(k+2)^2 = \frac{(k+1)(k+2)}{12}(3k^2+5k+12k+24) = \frac{(k+1)(k+2)}{12}[3(k+1)^2+11(k+1)+10],$$
 即当

$n=k+1$  时, 等式也成立. 综上所述, 当  $a=3, b=11, c=10$  时, 题设中的等式对任意  $n \in \mathbb{N}$  恒成立.

## 课中探究

### [素养小结]

用数学归纳法证明恒等式时，应关注以下三点：

- (1) 弄清 $n$ 取第一个值 $n_0$ 时等式两端项的情况；
- (2) 弄清从 $n=k$ 到 $n=k+1$ 时，等式两端增加了哪些项，减少了哪些项；
- (3) 证明当 $n=k+1$ 时等式也成立的过程中，要设法将待证式与归纳假设建立联系，并朝要证明的表达式变形.

## 课中探究

### 角度二证明不等式问题

例3用数学归纳法证明： $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2^n} \leq \frac{1}{2} + n (n \in \mathbf{N}^*)$

证明：(1) 当  $n=1$  时，左边 = 1 +  $\frac{1}{2}$ ，右边 =  $\frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$ ，即当  $n=1$  时，不等式成立。

(2) 假设当  $n=k (k \in \mathbf{N}^*)$  时，不等式成立，即  $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2^k} \leq \frac{1}{2} + k$ ，则当  $n=k+1$  时，

$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{k+1}} + \frac{1}{2^{k+2}} + \cdots + \frac{1}{2^{k+2^k}} < \frac{1}{2} + k + 2^k \cdot \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2} + (k+1)$ ，即当  $n=k+1$  时，不等式也成立。

由 (1) (2) 得，不等式对所有的  $n \in \mathbf{N}^*$  都成立。

## 课中探究

变式[2022. 郑州一中高二期末] 设  $f(n) = n^{n+1}$ ,  $g(n) = (n+1)^n$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ .

(1) 当  $a=1.23.4$  时试比较  $\frac{f(n)}{g(n)}$  与 1 的大小:

解:  $f(1) = 1^2 = 1, g(1) = 2^1 = 2, \therefore f(1) < g(1) < 1.$

$\therefore f(2) = 2^3 = 8, g(2) = 3^2 = 9, \therefore f(2) < g(2), \frac{f(2)}{g(2)} < 1.$

$\therefore f(3) = 3^4 = 81, g(3) = 4^3 = 64, \therefore f(3) > g(3), \frac{f(3)}{g(3)} > 1.$

$\therefore f(4) = 4^5 = 1024, g(4) = 5^4 = 625, \therefore f(4) > g(4), \frac{f(4)}{g(4)} > 1.$



## 课中探究

(2) 根据(1)的结果猜测一个一般性结论, 并加以证明.

解: 猜想: 当 $n \geq 3, n \in \mathbb{N}$ 时; 有 $\frac{f(n)}{g(n)} > 1$ .

证明: ①当 $n=3$ 时, 猜想成立.

②假设当 $n=k \geq 3, k \in \mathbb{N}$ 时猜想成立, 则 $\frac{f(k)}{g(k)} = \frac{k^{k+1}}{(k+1)^k} > 1$ .

当 $n=k+1$ 时,  $\frac{f(k+1)}{g(k+1)} = \frac{(k+1)^{k+2}}{(k+2)^{k+1}} = \frac{k^{k+1}}{(k+1)^k} \cdot \frac{(k+1)^{2k+2}}{[k(k+2)]^{k+1}} > \frac{(k+1)^{2k+2}}{[k(k+2)]^{k+1}}$ .

## 课中探究

$$\because (k+1)^2 = k^2 + 2k + 1 > k(k+2) > 0,$$

$$\therefore \frac{(k+1)^2}{k(k+2)} > 1 \text{ 则 } \left[ \frac{(k+1)^2}{k(k+2)} \right]^{k+1} > 1 \quad \square \quad \frac{(k+1)^{2k+2}}{[k(k+2)]^{k+1}} > 1.$$

$\therefore$  当  $n=k+1$  时, 猜想成立.

由①②知, 当  $n \geq 3, n \in \mathbb{N}^*$  时; 有  $\frac{f(n)}{g(n)} > 1$

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：  
<https://d.book118.com/428075102127006075>