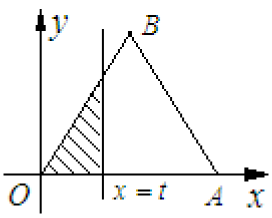
第 8 题　　函数的解析式

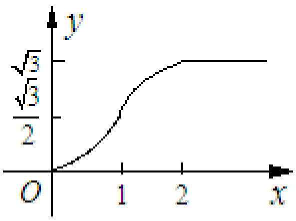
I. 题源探究·黄金母题

【例 1】如图，ΔOAB是边长为 2 的正三角形，记ΔOAB位于直线$x=t(t>0)$左侧的图形的面积为$f(x)$，试求$f(x)$的解析式,并画出函数$y=f(t)$的图象.

【解析】当$0<t\le 1$时，$f(t)=\frac{1}{2}t g\tan 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}t^2$；当$1<t\le 2$时，$f(t)=\frac{1}{2}\times 2\times\sqrt{3}-\frac{1}{2}(2-t)(2-t)\tan 60^\circ$＝$-\frac{\sqrt{3}}{2}(t-2)^2+\sqrt{3}$；当$t>2$时，$f(t)=\frac{1}{2}\times 2\times\sqrt{3}$＝$\sqrt{3}$．综上知，

$$f(t)=\begin{cases}\frac{\sqrt{3}}{2}t^2, & 0<t\le 1\\ -\frac{\sqrt{3}}{2}(t-2)^2+\sqrt{3}, & 1<t\le 2\\ \sqrt{3}, & t>2\end{cases}$$





精彩解读

【试题来源】**人教版 A 版必修一第 13 页复习参考题 B 组第 2 题**

【母题评析】**本题以平面几何图形为载体，考查函数解析式的求法，以及根据函数解析画函数的图象．本类考查方式是近几年高考试题常常采用的命题形式，达到对学生能力的考查.**

【思路方法】**此类试题是平面几何图中由于动点的运动引起了某些几何量的变化，由此也与函数有了紧密联系,也就产生了此类试题．解答此类试题通常要利用分类讨论的思想，同时要注意结合平面几何及三角知识进行求解.**

II. 考场精彩·真题回放

【例 2】【2017 高考新课标 II】已知函数 $f(x)=ax^2-ax-x\ln x$，且 $f(x)\geq 0$．

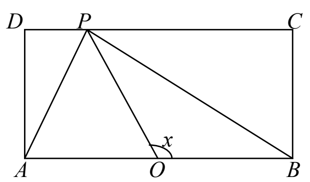
求 a（节选）.

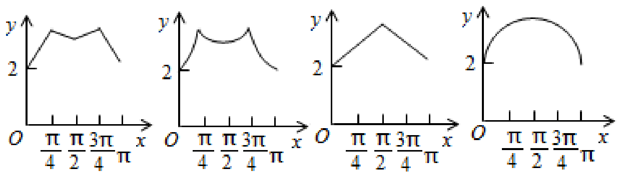
【解析】$f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$． 设 $g(x)=ax-a-\ln x$，则 $f(x)=xg(x)$，$f(x)\geq 0$ 等价于 $g(x)\geq 0$， Q $g(1)=0$，$g(x)\geq 0$， 故 $g'(1)=0$， 而 $g'(x)=a-\frac{1}{x}$，$g'(1)=a-1$， 得 $a=1$．

若 $a=1$，则 $g'(x)=1-\frac{1}{x}$． 当 $0<x<1$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 单调递减；当 $x>1$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增．所以 $x=1$ 是 $g(x)$ 的极小值点，故 $g(x)\geq g(1)=0$

综上，$a=1$．

【例 3】【2015 高考新课标Ⅱ】如图，长方形 $ABCD$ 的边 $AB=2$， $BC=1$，O 是 AB 的中点，点 P 沿着边 BC， CD 与 DA 运动，记 $\angle BOP=x$． 将动 P 到 A,B 两点距离之和表示为 x 的函数 $f(x)$， 则 $y=f(x)$ 的图象大致为（　　）





A.　　B.　　C.　　D.

【命题意图】**本类题通常主要考查函数解析式的求法与图象识别..**

【考试方向】**这类试题在考查题型上，通常基本以选择题的形式出现，中等偏上难度，往往与平面几何知识、三角函数等知识有联系**

【难点中心】**此类试题的解答通常结合图形的具体特点，首先明确哪个是自变量 x？哪个是因变量 y， 它们对应于几何图形中哪些线段或角，然后结合分类讨论的思想进行求解.**

【答案】B

【解析】由已知得，当点P在BC边上运动时，即$0\le x\le\frac{\pi}{4}$时，$PA+PB=\sqrt{\tan^2x+4}+\tan x$；当点$P$在$CD$边上运动时,即$\frac{\pi}{4}\le x\le\frac{3\pi}{4},x\ne\frac{\pi}{2}$时，$PA+PB=\sqrt{(\frac{1}{\tan x}-1)^2+1}+\sqrt{(\frac{1}{\tan x}+1)^2+1}$，当$x=\frac{\pi}{2}$时，$PA+PB=2\sqrt{2}$；当点$P$在$AD$边上运动时，即$\frac{3\pi}{4}\le x\le\pi$时，$PA+PB=\sqrt{\tan^2x+4}-\tan x$，综上可知$f(x)=\begin{cases}\sqrt{\tan^2x+4}+\tan x,0\le x\le\frac{\pi}{4}\\ \sqrt{(\frac{1}{\tan x}-1)^2+1}+\sqrt{(\frac{1}{\tan x}+1)^2+1},\frac{\pi}{4}\le x<\frac{\pi}{2}\\ 2\sqrt{2},x=\frac{\pi}{2}\\ \sqrt{(\frac{1}{\tan x}-1)^2+1}+\sqrt{(\frac{1}{\tan x}+1)^2+1},\frac{\pi}{2}<x\le\frac{3\pi}{2}\\ \sqrt{\tan^2x+4}-\tan x,\frac{3\pi}{4}<x\le\pi\end{cases}$由此可知函数$f(x)$的图象是非直线型的，排除A，C．又$f(\frac{\pi}{4})>f(\frac{\pi}{2})$，排除D，故选B.

III．理论基础·解题原理

考点一　函数解析式概念

（1)函数解析式定义:就是把两个变量的函数关系，用一个等式表示，这个等式叫做函数的解析表达式，简称解析式.

(2)解析式优点：一是简明、全面地概括了变量间的关系；二是可以通过解析式求出任意一个自变量的值所对应的函数值.

考点二　基本初等函数的解析式

(1)一次函数：$y=kx+b,(k\ne0)$；

（2）反比例函数：$y=\frac{k}{x},(k\ne0)$；

(3) 二次函数：$y=ax^2+bx+c,(a\neq 0)$；

（4）指数函数：$y=a^x,(a>0,且a\neq 1)$；

（5）对数函数：$y=\log_a x,(a>0,且a\neq 1)$；

（7)幂函数：$y=x^\alpha,(\alpha\in\mathbf{R})$；

（8）三角函数:$y=\sin x,y=\cos x,y=\tan x,(x\neq k\pi+\frac{\pi}{2})$.

Ⅳ．题型攻略·深度挖掘

【考试方向】

这类试题在考查题型上，通常在选择题、填空题中均可能出现考查，在解答题常常伴随函数在实际问题的应用、涉及函数的导数问题应用.

【技能方法】

求函数解析式常用方法有：待定系数法、换元法（或凑配法)、消元法（方程法)、图象法、性质法等，这些方程的选择都要根据所给有关函数的具体信息进行分析，如已知函数模型时，常用待定系数法.

【易错指导】

（1)因为解析具有定义域、对应法则、值域，而定义域是函数的灵魂，因此一定要注意在求得解析后要注意函数的定义域；

（2）利用换元法（或凑配法)求函数解析式时，确定函数的定义域是一个难点，同时也是一个易错点,因为这类题主要涉及到复合函数问题；

（3）利用性质法求函数解析式时，常常在自变量的转换上或函数名称变换上犯糊涂,因为这类题实质上是涉及到分段函数问题.

（4）求实际应用问题的函数模型问题，确定函数定义域时,除函数解析式本身要求有意义外，自变量的取值还必须符合实际意义.

V．举一反三·触类旁通

考向 1　利用待定系数法求解析式

【例 1】已知二次函数$f(x)$满足条件$f(0)=1$,及$f(x+1)-f(x)=2x$，则求$f(x)=$________________.

【解析】设$f(x)=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$，则由题$c=1$．又$f\left(x+1\right)-f\left(x\right)=a\left(x+1\right)^2+b\left(x+1\right)$＋$c-\left(ax^2+bx+c\right)=2ax+a+b$，于是由已知条件,得$\begin{cases}2a=2\\a+b=0\end{cases}$，解得$\begin{cases}a=1\\b=-1\end{cases}$，∴$f\left(x\right)=x^2-x+1$.

【例 2】【改编题】已知函数$f(x)=a\ln x+x^2+bx+1$在点$(1,f(1))$处的切线方程为$4x-y-12=0$，则函数$f(x)=$________________.

【解析】因为$f'(x)=\dfrac{a}{x}+2x+b$,则由题意$f'(1)=4,f(1)=-8$,则$\begin{cases}f(1)=b+2=-8\\f'(1)=a+b+2=4\end{cases}$,解得$\begin{cases}a=12\\b=-10\end{cases}$,

所以$f(x)=12\ln x+x^2-10x+1$.

【点评】待定系数法是求函数解析式常用的方法之一,适用于已知或能确定函数的解析式的构成形式(如一次函数、二次函数、反比例函数、函数图象等)，求函数解析式．其解法是根据条件写出它的一般表达式,然后由已知条件，主要通过系数的比较，列出等式，确定待定系数.

【跟踪练习】

1．【2017河南安阳一模】已知$f'(x)$是定义在$(0,+\infty)$上的函数$f(x)$的导函数,若方程$f'(x)=0$无解，且$\forall x\in(0,+\infty)$，$f\left[f(x)-\log_{2016}x\right]=2017$，设$a=f\left(2^{0.5}\right)$，$b=f\left(\log_{\pi}3\right)$，$c=f\left(\log_4 3\right)$,则$a$，$b$，$c$的大小关系是（　　）

A．$b>c>a$　　B．$a>c>b$　　C．$c>b>a$　　D．$a>b>c$

【答案】D

【解析】由题意，可知$f(x)-\log_{2016}x$是定值，不妨令$t=f(x)-\log_{2016}x$，则$f(x)=\log_{2016}x+t$，又$f(t)=2017$，所以$\log_{2016}t+t=2017\Rightarrow t=2016$，即$f(x)=\log_{2016}x+2016$，则$f'(x)=\dfrac{1}{x\ln 2016}$，显然当$x\in(0,+\infty)$时，有$f'(x)>0$，即函数$f(x)$在$(0,+\infty)$上为单调递增，又$2^{0.5}>1>\log_{\pi}3>\log_4 3$，所以$f\left(2^{0.5}\right)>f\left(\log_{\pi}3\right)>f\left(\log_4 3\right)$，故选D．

点睛:此题意主要考查了函数的导数、单调性在函数值大小的比较中的应用，以及真数相同底数不同的对数值的比较等方面的知识，属于中高档题型，亦是高频考点．有三个关键点：

（1）由方程$f'(x)=0$无解，可知函数$f(x)$在$(0,+\infty)$上为单调函数；

（2）由$f\left[f(x)-\log_{2016}x\right]=2017$（常数），可知$f(x)-\log_{2016}x$是定值；

（3）对于对数函数$y=\log_a x(x>1)$，在真数相同底数不同的函数值中，当$0<a<1$时，底数a越小，函数值越大;当$a>1$时，底数a越大，函数值越小.

2．【2018山西运城康杰中学高一上学期第一次月考】已知$g(x)=-x^2-3$，$f(x)$是二次函数,且$f(x)+g(x)$为奇函数,当$x\in[-1,2]$时，$f(x)$最小值为1，求$f(x)$的解析式.

【答案】$f(x)=x^2+3x+3$或$f(x)=x^2-2\sqrt{2}x+3$

【解析】试题分析:令$f(x)=ax^2+bx+c$，而$f(x)+g(x)=(a-1)x^2+bx+c-3$为奇函数，故$a-1=0,c-3=0$，解得$a=1,b=3$，$f(x)=x^2+bx+3$．其对称轴为$x=-\dfrac{b}{2}$

，根据对称轴和区间$[-1,2)$的位置关系，分成3类讨论当x为何值时取得最小值，由此求得函数的解析式.

【试题解析】

设$f(x)=ax^2+bx+c(a\neq 0)$　　$F(x)=f(x)+g(x)$

则$F(x)=ax^2+bx+c-x^2-3=(a-1)x^2+bx+c-3$为奇函数

$\therefore$ $F(-x)=-F(x)$对任意x恒成立，即

$(a-1)x^2-bx+c-3=-(a-1)x^2-bx-(c-3)$

$\therefore$ $(a-1)x^2+c-3=0$对任意x恒成立　　$\therefore a=1,c=3$　　$\therefore f(x)=x^2+bx+3$

$\therefore f(x)$的图象的对称轴为直线$x=-\frac{b}{2}$

Q 当$x\in[-1,2)$时，$f(x)$的最小值为 1

$\therefore$ $\{\begin{matrix}-\frac{b}{2}<-1\\ f(-1)=1\end{matrix}$ 或$\{\begin{matrix}-1\le -\frac{b}{2}\le 2\\ f\left(-\frac{b}{2}\right)=1\end{matrix}$ 或$\{\begin{matrix}-\frac{b}{2}>2\\ f(2)=1\end{matrix}$

或$\therefore$ $\{\begin{matrix}b>2\\ 1-b+3=1\end{matrix}$ 或$\{\begin{matrix}-4\le b\le -2\\ b=2\sqrt{2}\quad b=-2\sqrt{2}\end{matrix}$ 或$\{\begin{matrix}b<-4\\ 4+2b+3=1\end{matrix}$

即$b=3$或$b=-2\sqrt{2}$或$b=-3$ （舍）

综上可知： $f(x)=x^2+3x+3$或$f(x)=x^2-2\sqrt{2}x+3$

点睛：本题主要考查待定系数法求函数的解析式，考查了二次函数的图象与性质，考查了函数的奇偶性与单调性．由于已知函数为二次函数，故可设出二次函数的一般式，然后利用函数的奇偶性可求得a,c的值，在利用对称轴和定义域，结合最小值可求得b的值.

考向 2　利用换元法（或配凑法）求解析式

【例 3】【改编题】(1）若$f(x-\frac{1}{x})=x^2+\frac{1}{x^2}$，则$f(x)=$ （　　）

A. $f(x)=x^2+2$　　B. $f(x)=x^2-2$　　C. $f(x)=(x+1)^2$

D. $f(x)=(x-1)^2$

（2） 已知$f(\frac{2}{x}+1)=\lg x$,则$f(x)=$______________.

【解析】(1) 因为$f(x-\frac{1}{x})=x^2+\frac{1}{x^2}=(x-\frac{1}{x})^2+2$，所以$f(x)=x^2+2$，故选 A.

(2) 令$t=\frac{2}{x}+1$，则$x=\frac{2}{t-1}$，代入条件中的解析式，则$f(t)=\log_a\frac{2}{t-1}$，即$f(x)=\log_a\frac{2}{x-1}$.

【点评】已知复合函数$f[g(x)]$的表达式，要求$f(x)$的解析式时，可考虑令$g(x)=t$,反解出$x=h(t)$，将其代入$f[g(x)]$的表达式中，再用x替换t便可得到函数$f(x)$的表达式;(2)已知复合函数$f[g(x)]$的表达式，要求$f(x)$的解析式时,若$f[g(x)]$的表达式右边易配成$g(x)$的运算形式,则可用配凑法，使用配凑法时要注意定义域的变化.

【跟踪练习】

1.【四川省双流中学 2017-2018 学年高一上学期期中考试】已知$f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x+1}$,则$f(2)$的值为（　　）

A. $\frac{1}{3}$　　B. $\frac{2}{3}$　　C. 3　　D. $\frac{3}{2}$

【答案】B

【解析】令$\frac{1}{x}=2$，则$x=\frac{1}{2}$,所以$f(2)=\frac{1}{\frac{1}{2}+1}=\frac{2}{3}$,故选 B.

2.【山西省实验中学 2017—2018 学年高一上学期 10 月月考】若$f\left(\sqrt{x}+1\right)=x+1$，则$f(x)$的解析式为(　　)

A. $f(x)=x^2-2x+2,(x\ge1)$　　B. $f(x)=x^2-2x,(x\ge1)$

C. $f(x)=x^2-2x+2,(x\ge0)$　　D. $f(x)=x^2-2x,(x\ge0)$

【答案】A

【解析】令$t=\sqrt{x}+1(t\ge1)$，则$x=(t-1)^2$，据此可得：$x+1=(t-1)^2+1=x^2-2x+2$，综上可得：

$f(x)$的解析式为$f(x)=x^2-2x+2,(x\ge1)$. 故选A.

考向 3　利用函数性质求解析式

【例 4】已知 $f(x)$ 为奇函数，$g(x)$ 为偶函数，且 $f(x)+g(x)=2\log_2(1-x)$，则函数 $f(x)=$______________，$g(x)=$______________.

【解析】∵ $f(x)$ 为奇函数，$g(x)$ 为偶函数，∴ $f(-x)=-f(x),g(-x)=g(x)$．又 $f(x)+g(x)=2\log_2(1-x)$　①，故 $f(-x)+g(-x)=2\log_2(1+x)$，即 $-f(x)+g(x)=2\log_2(1+x)$ ②.

由①②得：$f(x)=\log_2(1-x)-\log_2(1+x)=\log_2\frac{1-x}{1+x},x\in(-1,1)$，$g(x)=\log_2(1+x)+\log_2(1-x)$ ＝ $\log_2=(1-x^2)$，$x\in(-1,1)$.

【例 5】　函数 $y=f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，满足 $f(3+x)=f(3-x)$，当 $x\in(0,3)$时，$f(x)=2^x$,则当 $x\in(-6,-3)$时，$f(x)=$______________.

【解析】因为 $f(3+x)=f(3-x)$,所以函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=3$ 对称，即 $f(x)=f(6-x)$成立．又 $f(x)$ 为奇函数，所以 $f(x)=-f(-x)=-f(6+x)$．设 $x\in(-6,-3)$，则 $x+6\in(0,3)$，则 $f(x+6)=2^{x+6}$，所以 $f(x)=-f(6+x)=-2^{x+6}$，即当 $x\in(-6,-3)$ 时，$f(x)=-2^{x+6}$.

【点评】已知函数的某些性质(奇偶性、周期性、对称性等)，可利用这些性质求解．常常涉及到两个转换过程：(1) 自变量的转换，即将所求解析式的定义域范围转移到已知函数的定义域内；(2)函数名称的转换，如将 $f(-x)$ 转换为 $f(x)$、$f(x+m)$（m 为常数）转化为 $f(x)$ 等.

【跟踪练习】

1.【2018 江西六校第五次联考】设函数 $f(x)$ 是定义在 R 上的奇函数，且 $f(x)=\begin{cases}log(x+1),x\geq x\\ g(x),x<0\end{cases}$，则 $g[f(-8)]=$（　　）

A. －1　　B. －2　　C. 1　　D. 2

【答案】A

【解析】∵函数 f（x）是定义在 R 上的奇函数，且 f（x）=$\begin{cases}\log_3(x+1), & x\geqslant 0\\ g(x), & x<0\end{cases}$，∴f（－8）=－f（8）=－log₃9=－2，∴g[f（－8）]=g（－2）=f（－2）=－f（2）=－log₃3=－1．故选：A．

2.【2017 河南南阳、信阳等六市第一次联考】已知$f(x)$是定义在R上的偶函数，且$f(x-\frac{3}{2})=f(x+\frac{1}{2})$恒成立，当$x\in[2,3]$时，$f(x)=x$，则当$x\in(-2,0)$时，$f(x)=$（　　）

A. $2+|x+1|$　　B. $3-|x+1|$

C. $|x-2|$　　D. $x+4$

【答案】B

【解析】试题分析：$\because \forall x\in R$，$f(x-\frac{3}{2})=f(x+\frac{1}{2})$，$\therefore f(x+1)=f(x-1), f(x+2)=f(x)$，即$f(x)$是最小正周期为$2$的函数，令$0\le x\le 1$，则$2\le x+2\le 3$，当$x\in[2,3]$时，$f(x)=x$，$\therefore f(x+2)=x+2$，$\therefore f(x)=x+2, x\in[0,1]$，$\because f(x)$是定义在$R$上的偶函数，$\therefore f(x)=-x+2, x\in[-1,0]$，令$-2\le x\le -1$，则$0\le x+2\le 1$，$\because f(x)=x+2, x\in[0,1]$，$\therefore f(x+2)=x+4$，$\therefore f(x)=x+4, x\in[-2,-1]$，当$-2<x<0$时，函数的解析式为：$f(x)=3-|x+1|$．所以 B 选项是正确的．

考点：利用函数的性质求解析式．

【思路点睛】根据$f(x-\frac{3}{2})=f(x+\frac{1}{2})$将$x$换为$x+\frac{1}{2}$，再将$x$换为$x+1$，得到函数的最小正周期为$2$，由当$x\in[2,3]$时，$f(x)=x$，求出$x\in[0,1]$的解析式，再由$f(x)$是定义在$R$上的偶函数，求出$x\in[-1,0]$的解析式，再将$y=f(x), x\in[0,1]$的图象向左平移$2$个单位即得$x\in[-2,-1]$的图象，合并并用绝对值表示$-2<x<0$的解析式．

考向 4　利用方程法（消元法）求函数解析式