

忻州市重点中学 2023-2024 学年高三 3 月线上考试数学试题

考生须知：

1. 全卷分选择题和非选择题两部分，全部在答题纸上作答。选择题必须用 2B 铅笔填涂；非选择题的答案必须用黑色字迹的钢笔或答字笔写在“答题纸”相应位置上。
2. 请用黑色字迹的钢笔或答字笔在“答题纸”上先填写姓名和准考证号。
3. 保持卡面清洁，不要折叠，不要弄破、弄皱，在草稿纸、试题卷上答题无效。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 给出下列四个命题：①若“ p 且 q ”为假命题，则 p 、 q 均为假命题；②三角形的内角是第一象限角或第二象限角；③若命题 $p: \exists x_0 \in R, x_0^2 \geq 0$ ，则命题 $\neg p: \forall x \in R, x^2 < 0$ ；④设集合 $A = \{x | x > 1\}$ ， $B = \{x | x > 2\}$ ，则“ $x \in A$ ”是“ $x \in B$ ”的必要条件；其中正确命题的个数是（ ）

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

2. 已知直线 $2mx + ny = 2$ ($m > 0, n > 0$) 过圆 $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 5$ 的圆心，则 $\frac{1}{m} + \frac{1}{n}$ 的最小值为（ ）

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

3. 已知 $\triangle ABC$ 的内角 A 、 B 、 C 的对边分别为 a 、 b 、 c ，且 $A = 60^\circ$ ， $b = 3$ ， AD 为 BC 边上的中线，若 $AD = \frac{7}{2}$ ，则 $\triangle ABC$ 的面积为（ ）

A. $\frac{25\sqrt{3}}{4}$ B. $\frac{15\sqrt{3}}{4}$ C. $\frac{15}{4}$ D. $\frac{35\sqrt{3}}{4}$

4. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的左、右顶点分别为 A_1, A_2 ，虚轴的两个端点分别为 B_1, B_2 ，若四边形 $A_1B_1A_2B_2$ 的内切圆面积为 18π ，则双曲线焦距的最小值为（ ）

A. 8 B. 16 C. $6\sqrt{2}$ D. $12\sqrt{2}$

5. 正四棱锥 $P-ABCD$ 的五个顶点在同一个球面上，它的底面边长为 $\sqrt{6}$ ，侧棱长为 $2\sqrt{3}$ ，则它的外接球的表面积为（ ）

A. 4π B. 8π C. 16π D. 20π

6. 已知 i 为虚数单位，若复数 $z_1 = 2 + i$ ， $z \cdot z_1 = 5$ ，则 $|z| =$

A. 1 B. $\sqrt{5}$
C. 5 D. $5\sqrt{5}$

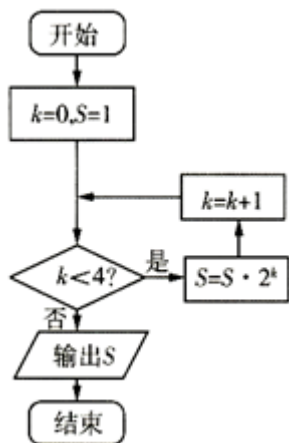
7. 已知 $a = (\frac{1}{2})^{0.2}$ ， $b = \log_{\frac{1}{2}} 0.2$ ， $c = a^b$ ，则 a, b, c 的大小关系是（ ）

- A. $a < b < c$ B. $c < a < b$ C. $a < c < b$ D. $b < c < a$

8. 数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_3 = \frac{1}{5}, a_n - a_{n+1} = 2a_n a_{n+1}$, 则数列 $\{a_n a_{n+1}\}$ 前10项的和为

- A. $\frac{10}{21}$ B. $\frac{20}{21}$ C. $\frac{9}{19}$ D. $\frac{18}{19}$

9. 执行如图所示的程序框图, 则输出的 S 的值是 ()



- A. 8 B. 32 C. 64 D. 128

10. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 过 F_2 作一条直线与双曲线右支交于 A, B 两点, 坐标原点为 O , 若 $|OA|^2 = a^2 + b^2, |BF_1| = 5a$, 则该双曲线的离心率为 ()

- A. $\frac{\sqrt{15}}{2}$ B. $\frac{\sqrt{10}}{2}$ C. $\frac{\sqrt{15}}{3}$ D. $\frac{\sqrt{10}}{3}$

11. 已知 i 是虚数单位, 若 $\frac{z}{1-i} = 2i+1$, 则 $|z| =$ ()

- A. $\sqrt{2}$ B. 2 C. $\sqrt{10}$ D. 10

12. 已知定点 A, B 都在平面 α 内, 定点 $P \notin \alpha, PB \perp \alpha, C$ 是 α 内异于 A, B 的动点, 且 $PC \perp AC$, 那么动点 C 在平面 α 内的轨迹是 ()

- A. 圆, 但要去掉两个点 B. 椭圆, 但要去掉两个点
C. 双曲线, 但要去掉两个点 D. 抛物线, 但要去掉两个点

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 甲, 乙两队参加关于“一带一路”知识竞赛, 甲队有编号为 1, 2, 3 的三名运动员, 乙队有编号为 1, 2, 3, 4 的四名运动员, 若两队各出一名队员进行比赛, 则出场的两名运动员编号相同的概率为_____.

14. 定义在 R 上的奇函数 $f(x)$ 满足 $f(1+x) = f(1-x)$, 并且当 $0 \leq x \leq 1$ 时 $f(x) = 2^x - 1$, 则 $f(123) =$ _____

15. 已知函数 $f(x) = -x^3 + \sin x$, 若 $f(a) = M$, 则 $f(-a) =$ _____.

16. 点 P 在双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的右支上, 其左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 直线 PF_1 与以坐标原点 O 为圆心、 a 为半径的圆相切于点 A , 线段 PF_1 的垂直平分线恰好过点 F_2 , 则该双曲线的渐近线的斜率为_____.

三、解答题: 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (12 分) 已知 F_1, F_2 分别是椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点, 直线 $y = \frac{2b}{3}$ 与 C 交于 A, B 两点,

$$\angle AF_2B = 90^\circ, \text{ 且 } S_{\triangle F_2AB} = \frac{20}{9}.$$

(1) 求 C 的方程;

(2) 已知点 P 是 C 上的任意一点, 不经过原点 O 的直线 l 与 C 交于 M, N 两点, 直线 PM, PN, MN, OP 的斜率都存在, 且 $k_{MN} + k_{OP} = 0$, 求 $k_{PM} \cdot k_{PN}$ 的值.

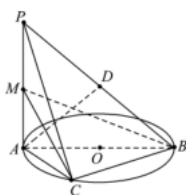
18. (12 分) 在平面直角坐标系 xOy 中, 直线 l 的参数方程为
$$\begin{cases} x = 2 + \frac{\sqrt{2}}{2}t \\ y = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}t \end{cases} \quad (t \text{ 为参数}),$$
 以坐标原点 O 为极点, x 轴

的正半轴为极轴建立极坐标系, 圆 C 的极坐标方程为 $\rho^2 - 4\rho \cos \theta = 3$.

(1) 求直线 l 的普通方程和圆 C 的直角坐标方程;

(2) 直线 l 与圆 C 交于 A, B 两点, 点 $P(2, 1)$, 求 $|PA| \cdot |PB|$ 的值.

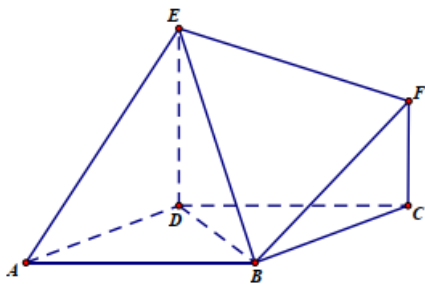
19. (12 分) 如图 AB 是圆 O 的直径, PA 垂直于圆 O 所在的平面, C 为圆周上不同于 A, B 的任意一点



(1) 求证: 平面 $PAC \perp$ 平面 PBC ;

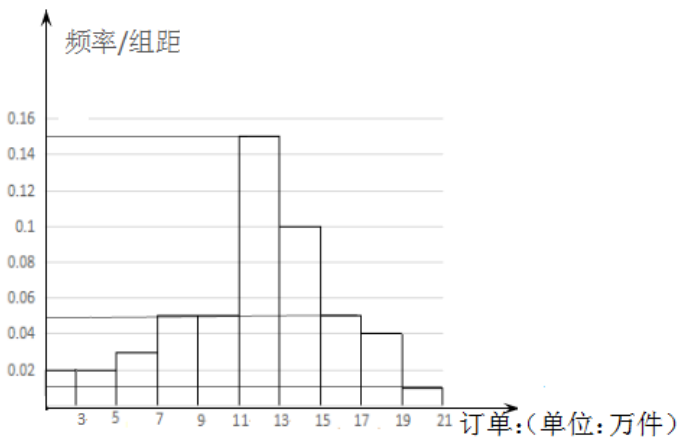
(2) 设 $PA = AB = 2AC = 4$, D 为 PB 的中点, M 为 AP 上的动点 (不与 A 重合) 求二面角 $A-BM-C$ 的正切值的最小值

20. (12 分) 如图, 底面 $ABCD$ 是边长为 2 的菱形, $\angle BAD = 60^\circ$, $DE \perp$ 平面 $ABCD$, $CF \parallel DE$, $DE = 2CF$, BE 与平面 $ABCD$ 所成的角为 45° .



- (1) 求证：平面 $BEF \perp$ 平面 BDE ；
- (2) 求二面角 $B-EF-D$ 的余弦值.

21. (12 分) 为了解网络外卖的发展情况，某调查机构从全国各城市中抽取了 100 个相同等级地城市，分别调查了甲乙两家网络外卖平台（以下简称外卖甲、外卖乙）在今年 3 月的订单情况，得到外卖甲该月订单的频率分布直方图，外卖乙该月订单的频数分布表，如下图表所示.



订单：（单位：万件）	[3,5)		[5,7)		[7,9)		[9,11)	
频数	1		2		2		3	
订单：（单位：万件）	[11,13)		[13,15)		[15,17)		[17,19)	
频数	40		20		20		10	
							2	

- (1) 现规定，月订单不低于 13 万件的城市为“业绩突出城市”，填写下面的列联表，并根据列联表判断是否有 90%的把握认为“是否为业绩突出城市”与“选择网络外卖平台”有关.

	业绩突出城市	业绩不突出城市	总计
外卖甲			
外卖乙			
总计			

(2) 由频率分布直方图可以认为，外卖甲今年 3 月在全国各城市的订单数 Z （单位：万件）近似地服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$ ，其中 μ 近似为样本平均数 $\bar{x}$ （同一组数据用该区间的中点值作代表）， σ 的值已求出，约为 3.64，现把频率视为概率，解决下列问题：

- ①从全国各城市中随机抽取 6 个城市，记 X 为外卖甲在今年 3 月订单数位于区间 (4.88, 15.8) 的城市个数，求 X 的数学期望；
- ②外卖甲决定在今年 3 月订单数低于 7 万件的城市开展“订外卖，抢红包”的营销活动来提升业绩，据统计，开展此活动后城市每月外卖订单数将提高到平均每月 9 万件的水平，现从全国各月订单数不超过 7 万件的城市中采用分层抽样的方法选出 100 个城市不开展营销活动，若每按一件外卖订单平均可获纯利润 5 元，但每件外卖平均需送出红包 2 元，则外卖甲在这 100 个城市中开展营销活动将比不开展营销活动每月多盈利多少万元？

附：①参考公式： $K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$ ，其中 $n = a + b + c + d$ 。

参考数据：

$P(K^2 \geq k_0)$	0.15	0.10	0.05	0.025	0.010	0.001
k_0	2.702	2.706	3.841	5.024	6.635	10.828

②若 $Z \sim N(\mu, \sigma^2)$ ，则 $P(\mu - \sigma < Z \leq \mu + \sigma) = 0.6826$ ， $P(\mu - 2\sigma < Z \leq \mu + 2\sigma) = 0.9544$ 。

22. (10 分) 等比数列 $\{a_n\}$ 中， $a_1 = 2, a_7 = 4a_5$ 。

(I) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(II) 记 S_n 为 $\{a_n\}$ 的前 n 项和。若 $S_m = 126$ ，求 m 。

参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1、B

【解析】

①利用 $p \wedge q$ 真假表来判断，②考虑内角为 90° ，③利用特称命题的否定是全称命题判断，

④利用集合间的包含关系判断.

【详解】

若“ p 且 q ”为假命题, 则 p 、 q 中至少有一个是假命题, 故①错误; 当内角为 90° 时, 不是象限角, 故②错误;

由特称命题的否定是全称命题知③正确; 因为 $B \subseteq A$, 所以 $x \in B \Rightarrow x \in A$, 所以“ $x \in A$ ”是“ $x \in B$ ”的必要条件, 故④正确.

故选: B.

【点睛】

本题考查命题真假的问题, 涉及到“且”命题、特称命题的否定、象限角、必要条件等知识, 是一道基础题.

2、D

【解析】

圆心坐标为 $(1, 2)$, 代入直线方程, 再由乘 1 法和基本不等式, 展开计算即可得到所求最小值.

【详解】

圆 $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 5$ 的圆心为 $(1, 2)$,

由题意可得 $2m + 2n = 2$, 即 $m + n = 1$, $m, n > 0$,

则 $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = (\frac{1}{m} + \frac{1}{n})(m+n) = 2 + \frac{n}{m} + \frac{m}{n} \geq 4$, 当且仅当 $\frac{n}{m} = \frac{m}{n}$ 且 $m+n=1$ 即 $m=n=\frac{1}{2}$ 时取等号,

故选: D.

【点睛】

本题考查最值的求法, 注意运用乘 1 法和基本不等式, 注意满足的条件: 一正二定三等, 同时考查直线与圆的关系, 考查运算能力, 属于基础题.

3、B

【解析】

延长 AD 到 E , 使 $AD = DE$, 连接 BE, CE , 则四边形 $ABEC$ 为平行四边形, 根据余弦定理可求出 $AB = 5$, 进而可得 $\triangle ABC$ 的面积.

【详解】

解: 延长 AD 到 E , 使 $AD = DE$, 连接 BE, CE , 则四边形 $ABEC$ 为平行四边形,

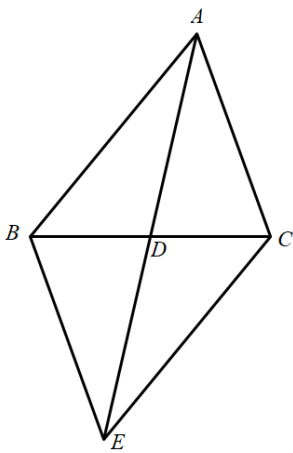
则 $BE = AC = 3$, $\angle ABE = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$, $AE = 2AD = 7$,

在 $\triangle ABE$ 中, $AE^2 = AB^2 + BE^2 - 2AB \cdot BE \cos \angle ABE$

则 $7^2 = AB^2 + 3^2 - 2 \times AB \times 3 \times \cos 120^\circ$, 得 $AB = 5$,

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin 60^\circ = \frac{1}{2} \times 5 \times 3 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{15\sqrt{3}}{4}.$$

故选：B.



【点睛】

本题考查余弦定理的应用，考查三角形面积公式的应用，其中根据中线作出平行四边形是关键，是中档题.

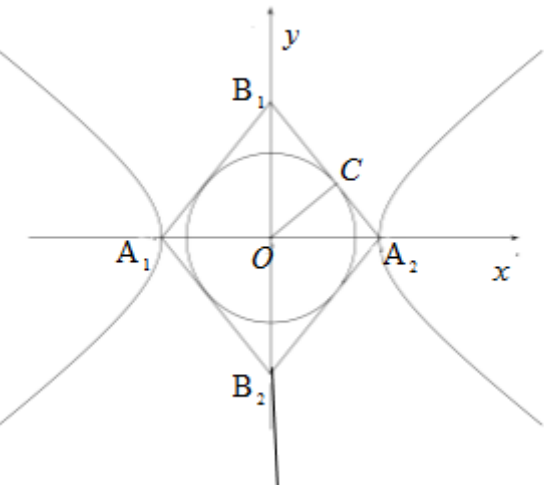
4、D

【解析】

根据题意画出几何关系，由四边形 $A_1B_1A_2B_2$ 的内切圆面积求得半径，结合四边形 $A_1B_1A_2B_2$ 面积关系求得 c 与 ab 等量关系，再根据基本不等式求得 c 的取值范围，即可确定双曲线焦距的最小值.

【详解】

根据题意，画出几何关系如下图所示：



设四边形 $A_1B_1A_2B_2$ 的内切圆半径为 r ，双曲线半焦距为 c ，

$$\text{则} |OA_2| = a, |OB_1| = b,$$

所以 $|A_2B_1| = \sqrt{a^2 + b^2} = c$,

四边形 $A_1B_1A_2B_2$ 的内切圆面积为 18π ,

则 $18\pi = \pi r^2$, 解得 $|OC| = r = 3\sqrt{2}$,

则 $S_{\text{四边形}A_1B_1A_2B_2} = \frac{1}{2} \cdot |A_1A_2| \cdot |B_1B_2| = 4 \times \frac{1}{2} \cdot |A_2B_1| \cdot |OC|$,

即 $\frac{1}{2} \cdot 2a \cdot 2b = 4 \times \frac{1}{2} \cdot c \cdot 3\sqrt{2}$

故由基本不等式可得 $c = \frac{ab}{3\sqrt{2}} \leq \frac{\frac{a^2 + b^2}{2}}{3\sqrt{2}} = \frac{c^2}{6\sqrt{2}}$, 即 $c \geq 6\sqrt{2}$,

当且仅当 $a = b$ 时等号成立.

故焦距的最小值为 $12\sqrt{2}$.

故选: D

【点睛】

本题考查了双曲线的定义及其性质的简单应用, 圆锥曲线与基本不等式综合应用, 属于中档题.

5、C

【解析】

如图所示, 在平面 $ABCD$ 的投影为正方形的中心 E , 故球心 O 在 PE 上, 计算长度, 设球半径为 R , 则

$(PE - R)^2 + BE^2 = R^2$, 解得 $R = 2$, 得到答案.

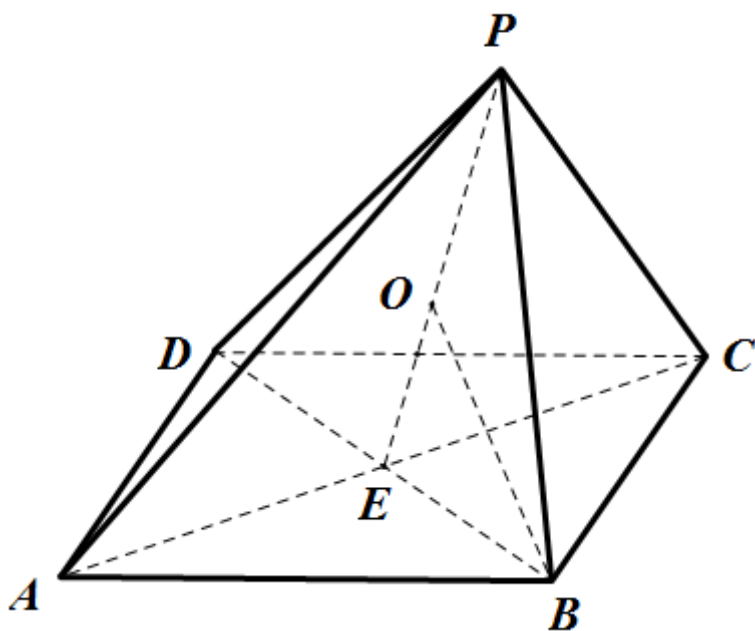
【详解】

如图所示: P 在平面 $ABCD$ 的投影为正方形的中心 E , 故球心 O 在 PE 上,

$BD = \sqrt{2}AB = 2\sqrt{3}$, 故 $BE = \frac{1}{2}BD = \sqrt{3}$, $PE = \sqrt{PB^2 - BE^2} = 3$,

设球半径为 R , 则 $(PE - R)^2 + BE^2 = R^2$, 解得 $R = 2$, 故 $S = 4\pi R^2 = 16\pi$.

故选: C.



【点睛】

本题考查了四棱锥的外接球问题，意在考查学生的空间想象能力和计算能力.

6、B

【解析】

由 $z \cdot z_1 = 5$ 可得 $z = \frac{5}{z_1}$ ，所以 $|z| = \frac{5}{|z_1|} = \frac{5}{|2+i|} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$ ，故选 B.

7、B

【解析】

利用函数 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ 与函数 $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ 互为反函数，可得 $0 < a < b < 1$ ，再利用对数运算性质比较 a, c 进而可得结论.

【详解】

依题意，函数 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ 与函数 $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ 关于直线 $y = x$ 对称，则 $0 < \left(\frac{1}{2}\right)^{0.2} < \log_{\frac{1}{2}} 0.2$ ，

即 $0 < a < b < 1$ ，又 $c = a^b = \left(\frac{1}{2}\right)^{0.2 \times \log_{\frac{1}{2}} 0.2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\log_{\frac{1}{2}} 0.2^{0.2}} = 0.2^{0.2} = \left(\frac{1}{5}\right)^{0.2} < \left(\frac{1}{2}\right)^{0.2} = a$ ，

所以， $c < a < b$.

故选：B.

【点睛】

本题主要考查对数、指数的大小比较，属于基础题.

8、A

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/435010141332012003>