江苏省无锡市澄宜六校2024-2025学年高三上学期12月阶段性联合测试数学试题

学校:_____姓名：_____班级：_____考号：_____

一、单选题

1．已知集合$A=\left\{x\middle|-8<x^3<8\right\}$，$B=\{-3,-1,0,2,3\}$，则$A\cap B=$（　）

A．$\{-1,0,2\}$　　B．$\{2,3\}$　　C．$\{-3,-1,0\}$　　D．$\{-1,0\}$

2．已知i为虚数单位，复数z满足$(z-1)(\bar{z}+1)=3+4\mathrm{i}$，则$|z-1|=$（　）

A．5　　B．$\sqrt{5}$　　C．2　　D．$\sqrt{2}$

3．“直线$ax+by-1=0$与圆$x^2+y^2=1$相交”是“$a^2+b^2\geq 1$”的（　）

A．充分不必要条件　　B．必要不充分条件

C．充要条件　　D．既不充分也不必要条件

4．已知数列$\{a_n\}$的通项公式是$a_n=\begin{cases}(3-a)n-3, n\leq 7\\ a^{n-6}, n>7\end{cases}$（$n\in \mathrm{N}^*$），若数列$\{a_n\}$是递增数列，则实数$a$的取值范围是（　）

A．$\left(\frac{9}{4},3\right)$　　B．$\left[\frac{9}{4},3\right)$

C．$(2,3)$　　D．$[2,3)$

5．已知 $m>0$ ，$n>0$，直线 $y=\frac{2}{\mathrm{e}}x+m$ 与曲线 $y=2\ln x-n+4$ 相切，则 $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}$ 的最小值是（　）

A．4　　B．3　　C．2　　D．1

6．已知椭圆C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左、右焦点分别为$F_1$，$F_2$，若$C$上存在一点$P$，使得$|PF_1|=\frac{3}{2}|PF_2|$，则椭圆$C$的离心率的取值范围是（　）

A．$\left(0,\frac{1}{5}\right]$　　B．$\left(0,\frac{1}{2}\right]$　　C．$\left[\frac{1}{2},1\right)$　　D．$\left[\frac{1}{5},1\right)$

7．在等比数列$\{a_n\}$中，$0<a_1<a_4=1$，则能使不等式$\left(a_1-\frac{1}{a_1}\right)+\left(a_2-\frac{1}{a_2}\right)+\cdots+\left(a_n-\frac{1}{a_n}\right)\leq 0$成立的最大正整数$n$是（　）

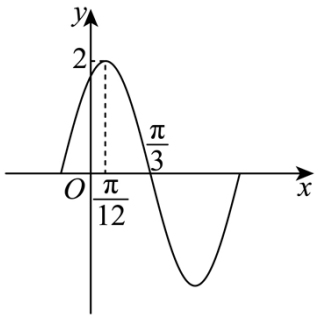
A．5　　B．6　　C．7　　D．8

8．在$\triangle ABC$中，内角A，B，C所对的边分别为a，b，c，若$\frac{a}{\cos A}$，$\frac{b}{\cos B}$，$\frac{c}{\cos C}$成等差数列，则$\frac{\sin A}{\cos B\cos C}$的最小值为（　）

A．2　　B．3　　C．$2\sqrt{3}$　　D．4

二、多选题

9．已知$f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)$（$A>0$，$\omega>0$，$0<\varphi<\frac{\pi}{2}$）的部分图象如图所示，则（　）



A．$A=2$

B．$f(x)$的最小正周期为π

C．$f(x)$在$\left(-\frac{5\pi}{12},\pi\right)$内有3个极值点

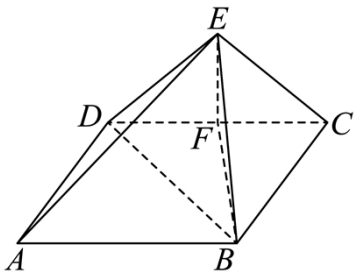
D．当$\left(-\frac{5\pi}{12},\pi\right)$时，$f(x)$与$y=\cos x$的图象有3个交点

10．已知函数$f(x)$及其导函数$f'(x)$的定义域均为R，记$g(x)=f'(x)$.若$f(2x+1)$，$g(x+2)$均为奇函数，且$f(2)=4$，则（　）

A．$f(x)$关于直线$x=1$对称　　B．$g(x)$关于点$(2,0)$对称

C．$f(x)$的周期为4　　D．$\sum_{k=0}^{2025}f(k)=-4$

11．如图，在平行四边形$ABCD$中，$AD=BD=2$，且$AD\perp BD$，BF为$\triangle BCD$的中线，将$\triangle BCF$沿BF折起，使点C到点E的位置，连接AE、DE、CE，且$CE=2$，则（　）



A．$EF\perp$平面$ABCD$

B．BC与DE所成的角为$30°$

C．AE与平面BEF所成角的正切值是$\sqrt{2}$

D．点C到平面BDE的距离为$\frac{2\sqrt{6}}{3}$

三、填空题

12．已知等比数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，若$\frac{S_{2n}}{S_n}=2^n+1$，则$\frac{S_6}{S_4-S_2}=$_____.

13．已知函数$f(x)=x^3-3x^2+ax-1$的两个极值点为x_1、x_2，且$f(x_1)+f(x_2)\geqslant -2$，则实数$a$的最小值是____.

14．已知向量$\vec{m}=(1,\sqrt{3})$，$\vec{n}=(a,b)$，$a>0$，$b>0$，则$\frac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{|\vec{n}|}$的取值范围是_____.

四、解答题

15．已知数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，且满足$S_n=2(a_n-1)$，$n\in\mathbf{N}^*$.

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式；

(2)设$b_n=\frac{a_n}{S_nS_{n+1}}$，设数列$\{b_n\}$的前$n$项和$T_n$，求证：$T_n<\frac{1}{4}$.

16．在锐角$\triangle ABC$中，内角A、B、C所对的边分别为a、b、c，且满足

$(\sin A-\sin C)\cdot(\sin A+\sin C)=\sin B(\sin A-\sin B)$.

(1)求角C；

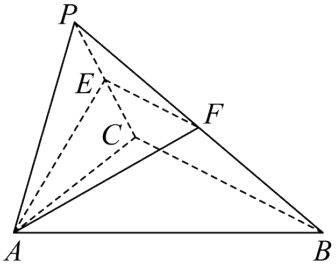
(2)求$\frac{a^2+b^2}{c^2}$的取值范围.

17．已知O为坐标原点，$F(1,0)$是椭圆C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的右焦点，点$M$是椭圆$C$的上顶点，以点$M$为圆心且过$F$的圆恰好与直线$x=-\sqrt{2}$相切.

(1)求椭圆 C 的标准方程；

(2)过点 $N\left(-\sqrt{2},1\right)$ 的直线 l 与椭圆 C 交于 A,B 两点，直线 MA,MB 与 x 轴的交点分别是 P,Q，求证：线段 PQ 中点的横坐标为定值.

18．如图，在三棱锥 $P-ABC$ 中，侧面 PAC 是边长为 2 的正三角形，$BC=4$，$AB=2\sqrt{5}$，E，F 分别为 PC，PB 的中点，平面 AEF 与底面 ABC 的交线为 l.



(1)证明：l∥平面 PBC.

(2)已知平面 $PAC\perp$ 平面 ABC，若在直线 l 上存在点 Q，使得直线 PQ 与平面 AEF 所成角为 α，异面直线 PQ，EF 所成角为 β，且满足 $\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{2}$，求 $\left|AQ\right|$.

19．定义运算：$\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}=ad-bc$，已知函数 $f(x)=\begin{vmatrix}\ln x & x-1\\ 1 & a\end{vmatrix}$，$g(x)=\dfrac{1-x}{x}$.

(1)若函数 $f\left(x\right)$ 的最大值为 0，求实数 a 的值；

(2)证明：$\left(1+\dfrac{1}{2^2}\right)\left(1+\dfrac{1}{3^2}\right)\left(1+\dfrac{1}{4^2}\right)\mathrm{L}\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)<\mathrm{e}$；

(3)若函数 $h\left(x\right)=f\left(x\right)+g\left(x\right)$ 存在两个极值点 x_1，x_2，证明：$\dfrac{h\left(x_1\right)+2x_1-h\left(x_2\right)-2x_2}{x_1-x_2}<a$.

参考答案：

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	D	B	A	C	D	D	C	B	ABD	BCD
题号	11									
答案	ACD									

1．D

【分析】求出集合A，利用交集的定义可得出集合$A\cap B$.

【详解】因为$A=\left\{x\middle|-8<x^3<8\right\}=\left\{x\middle|-2<x<2\right\}$，$B=\{-3,-1,0,2,3\}$，

则$A\cap B=\{-1,0\}$.

故选：D.

2．B

【分析】设$z=a+b\mathrm{i}\left(a,b\in\mathbf{R}\right)$，则$\overline{z}=a-b\mathrm{i}$，利用复数的乘法和复数相等可求得$a$、$b$的值，然后利用复数的减法和复数的模长公式可求得结果.

【详解】设$z=a+b\mathrm{i}\left(a,b\in\mathbf{R}\right)$，则$\overline{z}=a-b\mathrm{i}$，

所以$\left(z-1\right)\left(\overline{z}+1\right)=\left(a-1+b\mathrm{i}\right)\left(a+1-b\mathrm{i}\right)=a^2+b^2-1+2b\mathrm{i}=3+4\mathrm{i}$，

所以$\begin{cases}a^2+b^2-1=3\\2b=4\end{cases}$，可得$\begin{cases}a=0\\b=2\end{cases}$，所以$z=2\mathrm{i}$，则$z-1=-1+2\mathrm{i}$，

因此$\left|z-1\right|=\sqrt{\left(-1\right)^2+2^2}=\sqrt{5}$，

故选：B.

3．A

【分析】根据点到直线的距离公式,结合充分不必要条件的定义即可求解.

【详解】若直线$ax+by-1=0$与圆$x^2+y^2=1$相交,则圆心$\left(0,0\right)$到直线的距离满足$\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}<1$，

故$a^2+b^2>1$，

由于$a^2+b^2>1$能推出$a^2+b^2\geq1$，

当$a^2+b^2\geq1$不能得到$a^2+b^2>1$，

故“直线$ax+by-1=0$与圆$x^2+y^2=1$相交”是“$a^2+b^2\geq1$”的充分不必要条件，

故选：A

4．C

【分析】根据单调性的定义即可列不等式求解.

【详解】$a_n=\begin{cases}(3-a)n-3, n\le 7\\ a^{n-6}, n>7\end{cases}$ 为单调递增的数列，故 $\begin{cases}3-a>0\\ a>1\\ 7(3-a)-3<a^{8-6}\end{cases}$，

解得 $2<a<3$，

故选：C

5．D

【分析】利用已知条件求出切点的横坐标，从而得到 $m+n=4$，利用基本不等式即可求解.

【详解】由于直线 $y=\frac{2}{\mathrm{e}}x+m$ 与曲线 $y=2\ln x-n+4$ 相切，

设切点为 (x_0,y_0)，且 $y'=\frac{2}{x}$，所以 $\frac{2}{\mathrm{e}}=\frac{2}{x_0}$，

则切点的横坐标 $x_0=\mathrm{e}$ ，则 $2+m=2-n+4$，即 $m+n=4$.

又 $m>0,n>0$，所以 $(m+n)\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right)=2+\frac{n}{m}+\frac{m}{n}\ge 2+2\sqrt{\frac{n}{m}\times\frac{m}{n}}=4$，即 $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\ge 1$，

当且仅当 $m=n=2$ 时取等号，所以 $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}$ 的最小值为 1.

故选：D

6．D

【分析】根据椭圆定义，结合椭圆的性质即可求解.

【详解】根据椭圆定义可得 $|PF_1|+|PF_2|=2a$，又 $|PF_1|=\frac{3}{2}|PF_2|$，故 $|PF_2|=\frac{4a}{5}$，

因此 $|PF_2|=\frac{4a}{5}\in[a-c,a+c]$，故 $a-c\le\frac{4a}{5}\le a+c\Rightarrow\frac{1}{5}\le\frac{c}{a}=e$，故 $\frac{1}{5}\le e<1$，

故选：D

7．C

【分析】在等比数列 $\{a_n\}$ 中， 根据 $0<a_1<a_4=1$， $n>4$ 时， $a_n-\frac{1}{a_n}>0$； $n<4$ 时，

$a_n-\frac{1}{a_n}<0$，再结合 $a_4^2=a_1a_7=a_2a_6=a_3a_5=1$ 求解.

【详解】∵在等比数列 $\{a_n\}$ 中， $0<a_1<a_4=1$，

∴公比 $q>1$，

∴ $n>4$ 时， $a_n-\frac{1}{a_n}>0$； $n<4$ 时， $a_n-\frac{1}{a_n}<0$.

$\because a_4^2=a_1a_7=a_2a_6=a_3a_5=1$，

$\therefore a_7=\dfrac{1}{a_1}$，$a_6=\dfrac{1}{a_2}$，$a_5=\dfrac{1}{a_3}$，

$\therefore\left(a_1-\dfrac{1}{a_1}\right)+\left(a_2-\dfrac{1}{a_2}\right)+\left(a_3-\dfrac{1}{a_3}\right)+\left(a_4-\dfrac{1}{a_4}\right)+\left(a_5-\dfrac{1}{a_5}\right)+\left(a_6-\dfrac{1}{a_6}\right)+\left(a_7-\dfrac{1}{a_7}\right)=0$，

又当$n>4$时，$a_n-\dfrac{1}{a_n}>0$，

$\therefore$使不等式$\left(a_1-\dfrac{1}{a_1}\right)+\left(a_2-\dfrac{1}{a_2}\right)+\cdots+\left(a_n-\dfrac{1}{a_n}\right)\le 0$成立的$n$的最大值为7.

故选：C

【点睛】本题主要考查等比数列的性质以及数列与不等式，还考查了转化求解问题的能力，属于中档题.

8．B

【分析】根据等差中项，结合边角互化可得$\tan A\tan C=3>0$，进而根据和差角公式可得$\dfrac{\sin A}{\cos B\cos C}=\dfrac{\tan A+3\tan C}{2}$，由基本不等式即可求解.

【详解】由于$\dfrac{a}{\cos A}$，$\dfrac{b}{\cos B}$，$\dfrac{c}{\cos C}$成等差数列，则$\dfrac{2b}{\cos B}=\dfrac{a}{\cos A}+\dfrac{c}{\cos C}$，

由正弦定理可得$\dfrac{2\sin B}{\cos B}=\dfrac{\sin A}{\cos A}+\dfrac{\sin C}{\cos C}\Rightarrow 2\tan B=\tan A+\tan C=\tan\left(A+C\right)\left(1-\tan A\tan C\right)$,

故$2\tan B=-\tan B\left(1-\tan A\tan C\right)\Rightarrow\tan A\tan C=3$,

$\dfrac{\sin A}{\cos B\cos C}=\dfrac{\sin\left(B+C\right)}{\cos B\cos C}=\dfrac{\sin B\cos C+\cos B\sin C}{\cos B\cos C}=\tan B+\tan C$，

由于$\tan A\tan C=3>0$，因此$\tan A>0,\tan C>0$，故

$\dfrac{\sin A}{\cos B\cos C}=-\tan\left(A+C\right)+\tan C=-\dfrac{\tan A+\tan C}{1-\tan A\cdot\tan C}+\tan C=\dfrac{\tan A+3\tan C}{2}\ge\dfrac{2\sqrt{\tan A\cdot 3\tan C}}{2}=3$

，当且仅当$\tan A=3\tan C=3$，取等号，

故选：B

【点睛】关键点点睛：根据等比中项以及正弦定理可得$2\tan B=\tan A+\tan C$，进而利用正切和正弦的和差角公式得$\tan A\tan C=3>0$，$\dfrac{\sin A}{\cos B\cos C}=\tan B+\tan C$，即可结合基本不等式求解.

9．ABD

【分析】根据图象上的特殊点和对称轴可求函数的解析式，进而判断 AB；利用正弦函数的图象与性质判断 C；画出函数 $f\left(x\right)$ 与 $y=\cos x$ 的图象，结合图象判断 D.

【详解】由图可知，$A=2$，周期 $T=\left(\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\pi}{12}\right)\times 4=\pi$，则 $\omega=\dfrac{2\pi}{T}=2$，故 AB 正确；

由 $f\left(\dfrac{\pi}{12}\right)=2$，得 $2\sin\left(2\times\dfrac{\pi}{12}+\varphi\right)=2$，即 $\sin\left(\varphi+\dfrac{\pi}{6}\right)=1$，

得 $\varphi+\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$，$k\in\mathrm{Z}$，即 $\varphi=\dfrac{\pi}{3}+2k\pi$，$k\in\mathrm{Z}$，

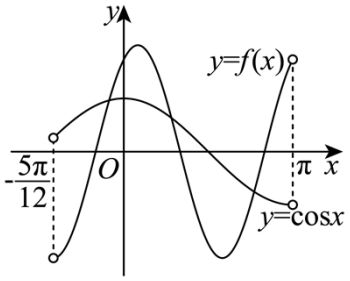
因为 $0<\varphi<\dfrac{\pi}{2}$，所以 $\varphi=\dfrac{\pi}{3}$，则 $f\left(x\right)=2\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)$；

对于 C，由 $-\dfrac{5\pi}{12}<x<\pi$，得 $-\dfrac{\pi}{2}<2x+\dfrac{\pi}{3}<\dfrac{7\pi}{3}$，

因为函数 $y=\sin x$ 在 $\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{7\pi}{3}\right)$ 上有 2 个极值点，

则 $f\left(x\right)$ 在 $\left(-\dfrac{5\pi}{12},\pi\right)$ 内有 2 个极值点，故 C 错误；

对于 D，利用五点作图法画出函数 $y=f(x)$ 与 $y=\cos x$ 的图象，



由图可知，当 $\left(-\dfrac{5\pi}{12},\pi\right)$ 时，$f\left(x\right)$ 与 $y=\cos x$ 的图象有 3 个交点，故 D 正确.

故选：ABD.

10．BCD

【分析】根据 $f(2x+1)$ 为奇函数可得 $f\left(x\right)$ 关于 $(1,0)$ 对称，即可判断 A,根据 $g(x+2)$ 为奇函数，可得 $g\left(x\right)$ 关于点 $(2,0)$ 判断 B，根据求导，结合对称性可的周期性，即可判断 CD.

【详解】对于 A，由 $f(2x+1)$ 为奇函数可得

$f\left(2x+1\right)+f\left(-2x+1\right)=0\Rightarrow f\left(x+1\right)+f\left(-x+1\right)=0$，

故 $f\left(x\right)$ 关于 $(1,0)$ 对称，故 A 错误，

对于 B，由于 $g(x+2)$ 为奇函数，故 $g\left(x+2\right)+g\left(-x+2\right)=0$，故 $g\left(x\right)$ 关于点 $(2,0)$ 对称，B 正确，

对于 C，由 $g(x+2)+g(-x+2)=0$ 和 $g(x)=f'(x)$ 可得 $f(x+2)-f(-x+2)+c=0$，

令$x=0$，故$f(2)-f(2)+c=0$，故$c=0$，因此$f(x+2)=f(-x+2)$，

结合$f(x)$关于(1,0)对称可得

$f(x+2)=f(-x+2)=-f(x)\Rightarrow f(x)=-f(x+2)=-(-f(x+4))=f(x+4)$，

故$f(x)$的周期为4，C正确，

对于D，由于$f(x)=-f(x+2)$，故$f(1)+f(3)=0, f(2)+f(4)=0$，

且$f(0)=-f(2)=-4$，由于$f(x+1)+f(-x+1)=0$，令$x=0$，则$f(1)=0$，

$\sum_{k=0}^{2025}f(k)=f(0)+506[f(1)+f(2)+f(3)+f(4)]+f(2025)$

$=f(0)+f(1)+506[f(1)+f(2)+f(3)+f(4)]$

$=f(0)+f(1)=f(0)=-4$，故D正确，

故选：BCD

【点睛】关键点点睛：根据$g(x+2)+g(-x+2)=0$以及求导法则可得

$f(x+2)-f(-x+2)+c=0$，结合$x=0$得$c=0$，即可得$f(x)=-f(x+2)$，进而结合函数的对称性可得周期.

11．ACD

【分析】推导出$EF\perp CF$，$EF\perp BF$，结合线面垂直的判定定理可判断A选项；以点F为坐标原点，FB、FC、FE所在直线分别为x、y、z轴建立空间直角坐标系，利用空间向量法可判断BCD选项.

【详解】对于A选项，在平行四边形$ABCD$中，$AD=BD=2$，且$AD\perp BD$，

因为$BC//AD$，则$BC\perp BD$，且$BC=AD=2$，则$CD=\sqrt{BC^2+BD^2}=2\sqrt{2}$，

因为F为CD的中点，则$BF=CF=\frac{1}{2}CD=\sqrt{2}$，且$BF\perp CD$，

将$\triangle BCF$沿BF折起，使点C到点E的位置，使得$CE=2$，

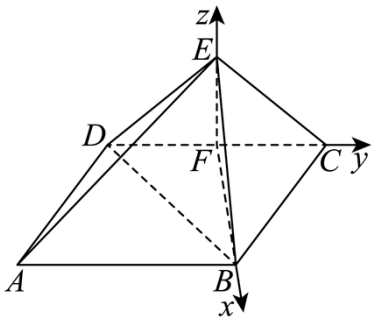
翻折后，$EF=CE=\sqrt{2}$，所以，$CF^2+EF^2=CE^2$，

所以，$EF\perp CF$，且有$EF\perp BF$，

因此，$BF\cap CF=F$，BF、$CF\subset$平面$ABCD$，所以，$EF\perp$平面$ABCD$，A对；

对于BCD选项，因为$EF\perp$平面$ABCD$，$BF\perp CD$，

以点 F 为坐标原点，FB、FC、FE 所在直线分别为 x、y、z 轴建立如下图所示的空间直角坐标系，



则 $A\left(\sqrt{2},-2\sqrt{2},0\right)$、$B\left(\sqrt{2},0,0\right)$、$C\left(0,\sqrt{2},0\right)$、$D\left(0,-\sqrt{2},0\right)$、$E\left(0,0,\sqrt{2}\right)$、$F\left(0,0,0\right)$，

$\overrightarrow{CB}=\left(\sqrt{2},-\sqrt{2},0\right)$，$\overrightarrow{DE}=\left(0,\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$，

则 $\cos\overrightarrow{CB},\overrightarrow{DE}=\dfrac{\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{DE}}{\left|\overrightarrow{CB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{DE}\right|}=-\dfrac{2}{2\times2}=-\dfrac{1}{2}$，

所以，BC 与 DE 所成的角为 $60°$，B 错，

$\overrightarrow{AE}=\left(-\sqrt{2},2\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$，易知平面 BEF 的一个法向量为 $\vec{m}=\left(0,1,0\right)$，

所以，$\cos\overrightarrow{AE},\vec{m}=\dfrac{\overrightarrow{AE}\cdot\vec{m}}{\left|\overrightarrow{AE}\right|\cdot\left|\vec{m}\right|}=\dfrac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，

设直线 AE 与平面 BEF 所成的角为 θ，则 $\sin\theta=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，

所以，$\cos\theta=\sqrt{1-\sin^2\theta}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，则 $\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=\sqrt{2}$，

故直线 AE 与平面 BEF 所成的角的正切值为 $\sqrt{2}$，C 对；

设平面 BDE 的法向量为 $\vec{n}=\left(x,y,z\right)$，$\overrightarrow{DE}=\left(0,\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$，$\overrightarrow{DB}=\left(\sqrt{2},\sqrt{2},0\right)$，

则 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{DB}=\sqrt{2}x+\sqrt{2}y=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{DE}=\sqrt{2}y+\sqrt{2}z=0\end{cases}$，取 $x=1$，可得 $\vec{n}=\left(1,-1,1\right)$，

$\overrightarrow{DC}=\left(0,2\sqrt{2},0\right)$，则点 C 到平面 BDE 的距离为 $d=\dfrac{\left|\overrightarrow{DC}\cdot\vec{n}\right|}{\left|\vec{n}\right|}=\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$，D 对.

故选：ACD.

【点睛】方法点睛：求点 A 到平面 BCD 的距离，方法如下：

（1）等体积法：先计算出四面体 $ABCD$ 的体积，然后计算出 $\triangle BCD$

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。

如要下载或阅读全文，请访问：

https://d.book118.com/435141031213012013