

徐州市重点中学 2024 年数学高三第一学期期末联考模拟试题

注意事项:

1. 答题前, 考生先将自己的姓名、准考证号填写清楚, 将条形码准确粘贴在考生信息条形码粘贴区。
2. 选择题必须使用 2B 铅笔填涂; 非选择题必须使用 0.5 毫米黑色字迹的签字笔书写, 字体工整、笔迹清楚。
3. 请按照题号顺序在各题目的答题区域内作答, 超出答题区域书写的答案无效; 在草稿纸、试题卷上答题无效。
4. 保持卡面清洁, 不要折叠, 不要弄破、弄皱, 不准使用涂改液、修正带、刮纸刀。

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

1. 已知函数 $f(x) = \log_2 \left(\frac{1}{|x|} + 1 \right) + \sqrt{\frac{1}{x^2} + 3}$, 则不等式 $f(\lg x) > 3$ 的解集为 ()

- A. $\left(\frac{1}{10}, 10 \right)$ B. $\left(-\infty, \frac{1}{10} \right) \cup (10, +\infty)$ C. $(1, 10)$ D. $\left(\frac{1}{10}, 1 \right) \cup (1, 10)$

2. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 13 项和为 52, 则 $(-2)^{a_6 + a_8} =$ ()

- A. 256 B. -256 C. 32 D. -32

3. 已知函数 $f(x) = ax + 1 + |2x^2 + ax - 1|$ ($a \in R$) 的最小值为 0, 则 $a =$ ()

- A. $\frac{1}{2}$ B. -1 C. ± 1 D. $\pm \frac{1}{2}$

4. 复数 z 满足 $z - 1 = (z + 1)i$ (i 为虚数单位), 则 z 的值是 ()

- A. $1 + i$ B. $1 - i$ C. i D. $-i$

5. 已知 $A = \{x \mid |x| < 1\}$, $B = \{x \mid 2^x < 1\}$, 则 $A \cup B =$ ()

- A. $(-1, 0)$ B. $(0, 1)$ C. $(-1, +\infty)$ D. $(-\infty, 1)$

6. 设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 若 $S_2 = 3$, $S_4 = 10$, 则 $S_6 =$ ()

- A. 21 B. 22 C. 11 D. 12

7. 已知三棱锥 $P-ABC$ 的四个顶点都在球 O 的球面上, $PA \perp$ 平面 ABC , $\triangle ABC$ 是边长为 $2\sqrt{3}$ 的等边三角形, 若球 O 的表面积为 20π , 则直线 PC 与平面 PAB 所成角的正切值为 ()

- A. $\frac{3}{4}$ B. $\frac{\sqrt{7}}{3}$ C. $\frac{3}{7}\sqrt{7}$ D. $\frac{\sqrt{7}}{4}$

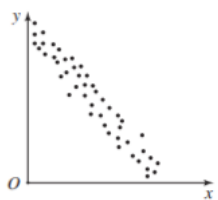
8. 已知复数 z 满足 $(1+i)z = 2i$, 则 $|z| =$ ()

- A. $\sqrt{2}$ B. 1 C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ D. $\frac{1}{2}$

9. 若直线 $2x + 4y + m = 0$ 经过抛物线 $y = 2x^2$ 的焦点, 则 $m =$ ()

- A. $\frac{1}{2}$ B. $-\frac{1}{2}$ C. 2 D. -2

10. 为研究某咖啡店每日的热咖啡销售量 y 和气温 x 之间是否具有线性相关关系，统计该店 2017 年每周六的销售量及当天气温得到如图所示的散点图（ x 轴表示气温， y 轴表示销售量），由散点图可知 y 与 x 的相关关系为（ ）



- A. 正相关，相关系数 r 的值为 0.85
 B. 负相关，相关系数 r 的值为 0.85
 C. 负相关，相关系数 r 的值为 -0.85
 D. 正相关，相关系数 r 的值为 -0.85

11. 在直角坐标系中，已知 $A(1, 0)$ ， $B(4, 0)$ ，若直线 $x + my - 1 = 0$ 上存在点 P ，使得 $|PA| = 2|PB|$ ，则正实数 m 的最小值是（ ）

- A. $\frac{1}{3}$ B. 3 C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ D. $\sqrt{3}$

12. P 是正四面体 $ABCD$ 的面 ABC 内一动点， E 为棱 AD 中点，记 DP 与平面 BCE 成角为定值 θ ，若点 P 的轨迹为一段抛物线，则 $\tan \theta =$ （ ）

- A. $\sqrt{2}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C. $\frac{\sqrt{2}}{4}$ D. $2\sqrt{2}$

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 已知正数 a, b 满足 $a+b=1$ ，则 $\frac{b}{a} + \frac{1}{b}$ 的最小值等于_____，此时 $a=_____$ 。

14. 现有一块边长为 a 的正方形铁片，铁片的四角截去四个边长均为 x 的小正方形，然后做成一个无盖方盒，该方盒容积的最大值是_____。

15. 能说明“在数列 $\{a_n\}$ 中，若对于任意的 $m, n \in \mathbb{N}^+$ ， $a_{m+n} > a_m + a_n$ ，则 $\{a_n\}$ 为递增数列”为假命题的一个等差数列是_____。（写出数列的通项公式）

16. 函数 $f(x) = \sqrt{x} + \log_2(1-x)$ 的定义域为_____。

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12 分) 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的右焦点为 F_1 ，过点 F_1 且与 x 轴垂直的直线被椭圆截得的线段长为

$\sqrt{2}$ ，且 F_1 与短轴两端点的连线相互垂直.

(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) 若圆 $O: x^2 + y^2 = a^2$ 上存在两点 M, N ，椭圆 C 上存在两个点 P, Q 满足: M, N, F_1 三点共线, P, Q, F_1 三点共线, 且 $\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{MN} = 0$, 求四边形 $PMQN$ 面积的取值范围.

18. (12 分) 随着电子阅读的普及, 传统纸质媒体遭受到了强烈的冲击. 某杂志社近 9 年来的纸质广告收入如下表所示:

年份	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018
时间代号 t	1	2	3	4	5	6	7	8	9
广告收入 y (千万元)	2	2.2	2.5	2.8	3	2.5	2.3	2	1.8

根据这 9 年的数据, 对 t 和 y 作线性相关性检验, 求得样本相关系数的绝对值为 0.243;

根据后 5 年的数据, 对 t 和 y 作线性相关性检验, 求得样本相关系数的绝对值为 0.984.

(1) 如果要用线性回归方程预测该杂志社 2019 年的纸质广告收入, 现在有两个方案,

方案一: 选取这 9 年数据进行预测, 方案二: 选取后 5 年数据进行预测.

从实际生活背景以及线性相关性检验的角度分析, 你觉得哪个方案更合适?

附: 相关性检验的临界值表:

$n-2$	小概率	
	0.05	0.01
3	0.878	0.959
7	0.666	0.798

(2) 某购物网站同时销售某本畅销书籍的纸质版本和电子书, 据统计, 在该网站购买该书籍的大量读者中, 只购买电子书的读者比例为 50%, 纸质版本和电子书同时购买的读者比例为 10%, 现用此统计结果作为概率, 若从上述读者中随机调查了 3 位, 求购买电子书人数多于只购买纸质版本人数的概率.

19. (12 分) 已知在平面直角坐标系 xOy 中, 椭圆 C 的焦点为 $F_1(-\sqrt{3}, 0), F_2(\sqrt{3}, 0)$, M 为椭圆 C 上任意一点, 且 $|MF_1| + |MF_2| = 4$.

(1) 求椭圆 C 的标准方程;

(2) 若直线 $l: y = kx + m (k > 0, m > 0)$ 交椭圆 C 于 P, Q 两点, 且满足 $k_{PQ}^2 = k_{OP} \cdot k_{OQ}$ (k_{PQ}, k_{OP}, k_{OQ} 分别为直线 PQ, OP, OQ 的斜率), 求 $\triangle OPQ$ 的面积为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 时直线 PQ 的方程.

20. (12分) 设函数 $f(x) = x - \frac{1}{x}$, $g(x) = t \ln x$, 其中 $x \in (0, 1)$, t 为正实数.

(1) 若 $f(x)$ 的图象总在函数 $g(x)$ 的图象的下方, 求实数 t 的取值范围;

(2) 设 $H(x) = (\ln x - x^2 + 1)e^x + (x^2 - 1)\left(1 - \frac{1}{x}\right)$, 证明: 对任意 $x \in (0, 1)$, 都有 $H(x) > 0$.

21. (12分) 在平面直角坐标系 xOy 中, 直线 l 的参数方程为 $\begin{cases} x = \sqrt{3} + t \\ y = -\sqrt{3}t \end{cases}$ (t 为参数), 以坐标原点为极点, x 轴正半

轴为极轴, 建立极坐标系, 已知曲线 C 的极坐标方程为 $\rho = 4 \cos \theta$.

(1) 求直线 l 的普通方程与曲线 C 的直角坐标方程;

(2) 设点 $M(0, 3)$, 直线 l 与曲线 C 交于不同的两点 A, B , 求 $\frac{1}{|MA|} + \frac{1}{|MB|}$ 的值.

22. (10分) 设 $k \in \mathbf{R}$, 函数 $g(x) = k(x - e)$, 其中 e 为自然对数的底数.

(1) 设函数 $f(x) = \frac{x}{1 - \ln x}$.

①若 $k = -1$, 试判断函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的图像在区间 $(1, \sqrt{e})$ 上是否有交点;

②求证: 对任意的 $k \in \mathbf{R}$, 直线 $y = g(x)$ 都不是 $y = f(x)$ 的切线;

(2) 设函数 $h(x) = 2x - x \ln x + xg(x) - ekx$, 试判断函数 $h(x)$ 是否存在极小值, 若存在, 求出 k 的取值范围; 若不存在, 请说明理由.

参考答案

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

1、D

【解析】

先判断函数的奇偶性和单调性, 得到 $-1 < \lg x < 1$, 且 $\lg x \neq 0$, 解不等式得解.

【详解】

由题得函数的定义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

因为 $f(-x) = f(x)$,

所以 $f(x)$ 为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ 上的偶函数,

因为函数 $y = \frac{1}{|x|} + 1$, $y = \sqrt{\frac{1}{x^2}} + 3$ 都是在 $(0, +\infty)$ 上单调递减.

所以函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减.

因为 $f(1) = 3, f(\lg x) > 3 = f(1)$,

所以 $-1 < \lg x < 1$, 且 $\lg x \neq 0$,

解得 $x \in \left(\frac{1}{10}, 1\right) \cup (1, 10)$.

故选: D

【点睛】

本题主要考查函数的奇偶性和单调性的判断, 考查函数的奇偶性和单调性的应用, 意在考查学生对这些知识的理解掌握水平.

2、A

【解析】

利用等差数列的求和公式及等差数列的性质可以求得结果.

【详解】

由 $S_{13} = 13a_7 = 52$, $a_7 = 4$, 得 $(-2)^{a_6+a_8} = (-2)^8 = 256$. 选 A.

【点睛】

本题主要考查等差数列的求和公式及等差数列的性质, 等差数列的等和性应用能快速求得结果.

3、C

【解析】

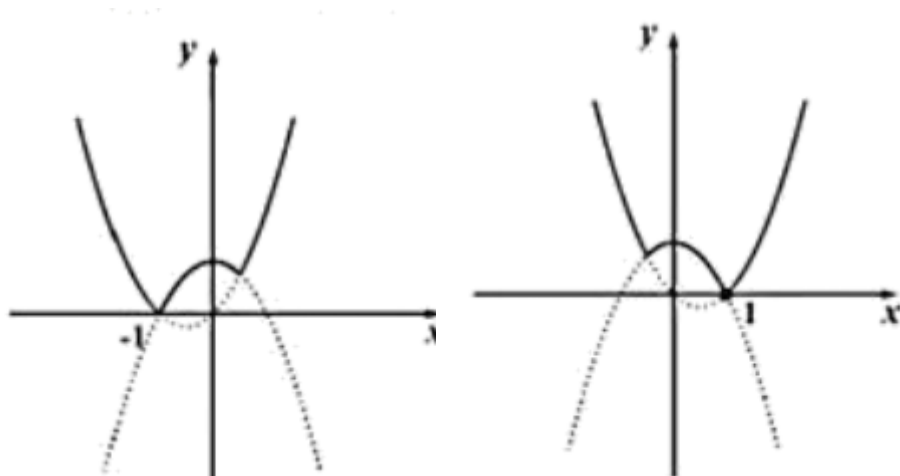
设 $\begin{cases} g(x) + h(x) = ax + 1 \\ g(x) - h(x) = 2x^2 + ax - 1 \end{cases}$, 计算可得 $f(x) = \begin{cases} 2g(x), g(x) \geq h(x) \\ 2h(x), g(x) < h(x) \end{cases}$, 再结合图像即可求出答案.

【详解】

设 $\begin{cases} g(x) + h(x) = ax + 1 \\ g(x) - h(x) = 2x^2 + ax - 1 \end{cases}$, 则 $\begin{cases} g(x) = x^2 + ax \\ h(x) = 1 - x^2 \end{cases}$,

$$\text{则 } f(x) = g(x) + h(x) + |g(x) - h(x)| = \begin{cases} 2g(x), & g(x) \geq h(x) \\ 2h(x), & g(x) < h(x) \end{cases},$$

由于函数 $f(x)$ 的最小值为 0，作出函数 $g(x), h(x)$ 的大致图像，



结合图像， $1 - x^2 = 0$ ，得 $x = \pm 1$ ，

所以 $a = \pm 1$ 。

故选：C

【点睛】

本题主要考查了分段函数的图像与性质，考查转化思想，考查数形结合思想，属于中档题。

4、C

【解析】

直接利用复数的除法的运算法则化简求解即可。

【详解】

$$\text{由 } z-1=(z+1)i \text{ 得: } z = \frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)^2}{(1+i)(1-i)} = i$$

本题正确选项：C

【点睛】

本题考查复数的除法的运算法则的应用，考查计算能力。

5、D

【解析】

分别解出集合 A 、 B ，然后求并集。

【详解】

$$\text{解: } A = \{x \mid |x| < 1\} = \{x \mid -1 < x < 1\}, \quad B = \{x \mid 2^x < 1\} = \{x \mid x < 0\}$$

$$A \cup B = (-\infty, 1)$$

故选：D

【点睛】

考查集合的并集运算，基础题.

6、A

【解析】

由题意知 $S_2, S_4 - S_2, S_6 - S_4$ 成等差数列，结合等差中项，列出方程，即可求出 S_6 的值.

【详解】

解：由 $\{a_n\}$ 为等差数列，可知 $S_2, S_4 - S_2, S_6 - S_4$ 也成等差数列，

所以 $2(S_4 - S_2) = S_2 + S_6 - S_4$ ，即 $2 \times (10 - 3) = 3 + S_6 - 10$ ，解得 $S_6 = 21$.

故选：A.

【点睛】

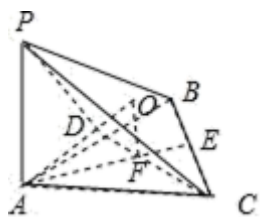
本题考查了等差数列的性质，考查了等差中项.对于等差数列，一般用首项和公差将已知量表示出来，继而求出首项和公差.但是这种基本量法计算量相对比较大，如果能结合等差数列性质，可使得计算量大大减少.

7、C

【解析】

设 D 为 AB 中点,先证明 $CD \perp$ 平面 PAB ，得出 $\angle CPD$ 为所求角,利用勾股定理计算 PA, PD, CD ，得出结论.

【详解】



设 D, E 分别是 AB, BC 的中点 $AE \cap CD = F$

Q $PA \perp$ 平面 ABC $\therefore PA \perp CD$

Q $\triangle ABC$ 是等边三角形 $\therefore CD \perp AB$

又 $PA \cap AB = A$

$\therefore CD \perp$ 平面 PAB $\therefore \angle CPD$ 为 PC 与平面 PAB 所成的角

Q $\triangle ABC$ 是边长为 $2\sqrt{3}$ 的等边三角形

$\therefore CD = AE = 3$ ， $AF = \frac{2}{3} AE = 2$ 且 F 为 $\triangle ABC$ 所在截面圆的圆心

Q 球 O 的表面积为 20π $\therefore$ 球 O 的半径 $OA = \sqrt{5}$

$$\therefore OF = \sqrt{OA^2 - AF^2} = 1$$

Q $PA \perp$ 平面 ABC $\therefore PA = 2OF = 2$

$$\therefore PD = \sqrt{PA^2 + AD^2} = \sqrt{7}$$

$$\therefore \tan \angle CPD = \frac{CD}{PD} = \frac{3}{\sqrt{7}} = \frac{3\sqrt{7}}{7}$$

本题正确选项: C

【点睛】

本题考查了棱锥与外接球的位置关系问题, 关键是能够通过垂直关系得到直线与平面所求角, 再利用球心位置来求解出线段长, 属于中档题.

8、A

【解析】

根据复数的运算法则, 可得 z , 然后利用复数模的概念, 可得结果.

【详解】

$$\text{由题可知: } z = \frac{2i}{1+i} = \frac{2i(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{2i-2i^2}{1-i^2}$$

$$\text{由 } i^2 = -1, \text{ 所以 } z = 1+i$$

$$\text{所以 } |z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

故选: A

【点睛】

本题主要考查复数的运算, 考验计算, 属基础题.

9、B

【解析】

计算抛物线的交点为 $\left(0, \frac{1}{8}\right)$, 代入计算得到答案.

【详解】

$$y = 2x^2 \text{ 可化为 } x^2 = \frac{1}{2}y, \text{ 焦点坐标为 } \left(0, \frac{1}{8}\right), \text{ 故 } m = -\frac{1}{2}.$$

故选: B.

【点睛】

本题考查了抛物线的焦点，属于简单题.

10、C

【解析】

根据正负相关的概念判断.

【详解】

由散点图知 y 随着 x 的增大而减小，因此是负相关. 相关系数为负.

故选：C.

【点睛】

本题考查变量的相关关系，考查正相关和负相关的区别. 掌握正负相关的定义是解题基础.

11、D

【解析】

设点 $P(1-my, y)$ ，由 $|PA| = 2|PB|$ ，得关于 y 的方程. 由题意，该方程有解，则 $\Delta \geq 0$ ，求出正实数 m 的取值范围，即求正实数 m 的最小值.

【详解】

由题意，设点 $P(1-my, y)$.

$$\text{Q } |PA| = 2|PB|, \therefore |PA|^2 = 4|PB|^2,$$

$$\text{即 } (1-my-1)^2 + y^2 = 4[(1-my-4)^2 + y^2],$$

$$\text{整理得 } (m^2+1)y^2 + 8my + 12 = 0,$$

$$\text{则 } \Delta = (8m)^2 - 4(m^2+1) \times 12 \geq 0, \text{ 解得 } m \geq \sqrt{3} \text{ 或 } m \leq -\sqrt{3}.$$

$$\text{Q } m > 0, \therefore m \geq \sqrt{3}, \therefore m_{\min} = \sqrt{3}.$$

故选：D.

【点睛】

本题考查直线与方程，考查平面内两点间距离公式，属于中档题.

12、B

【解析】

设正四面体的棱长为 2，建立空间直角坐标系，求出各点的坐标，求出面 BCE 的法向量，设 P 的坐标，求出向量

$\vec{DP}$ ，求出线面所成角的正弦值，再由角 θ 的范围 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ，结合 θ 为定值，得出 $\sin \theta$ 为定值，且 P

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/435214144012011131>