

# 山东省 A7 联盟 2024-2025 学年高三上学期开学考试数学试题

学校:\_\_\_\_\_姓名:\_\_\_\_\_班级:\_\_\_\_\_考号:\_\_\_\_\_

## 一、单选题

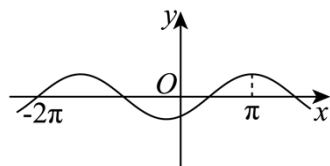
- 集合  $A = \{x \in \mathbb{N} | -1 < x < 4\}$  的子集个数为 ( )  
A. 2                      B. 4                      C. 8                      D. 16
- 若复数  $z$  满足  $z + 2\bar{z} = 3 + i$  ( $i$  为虚数单位), 则  $z$  在复平面内对应的点位于 ( )  
A. 第一象限              B. 第二象限              C. 第三象限              D. 第四象限
- 从  $-2, -1, 1, 3$  这 4 个数中随机取出 2 个不同的数, 则这 2 个数的乘积不超过 1 的概率为 ( )  
A.  $\frac{3}{4}$                       B.  $\frac{2}{3}$                       C.  $\frac{1}{2}$                       D.  $\frac{1}{3}$
- 已知正三棱柱  $ABC - A_1B_1C_1$  与以  $\triangle ABC$  的外接圆为底面的圆柱的体积相等, 则正三棱柱与圆柱的高的比值为 ( )  
A.  $\frac{\pi}{3}$                       B.  $\frac{3}{\pi}$                       C.  $\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}$                       D.  $\frac{4\sqrt{3}\pi}{9}$
- 有四个幂函数:  $y = x^{-1}$ ;  $y = x^{\frac{1}{3}}$ ;  $y = x^3$ ;  $y = x^{-2}$ . 某同学研究了其中的一个函数, 他给出这个函数的三个性质: ①它是偶函数; ②它的值域是  $\{y | y \in \mathbb{R} \text{ 且 } y \neq 0\}$ ; ③它在  $(-\infty, 0)$  上单调递增. 若他给出的三个性质中有两个正确、一个错误, 则他研究的函数是 ( )  
A.  $y = x^{-1}$               B.  $y = x^{\frac{1}{3}}$               C.  $y = x^3$                       D.  $y = x^{-2}$
- 对于平面上的动点  $P$ , 且满足对于  $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ ;  $PA, PB$  长度之比为  $t$  ( $t$  不为 0), 则我们称  $P$  点运动所得的轨迹为“完美曲线”. 若  $A(-2, 0), B(4, 0), t = 2$ . 则下列和“完美曲线”有交点的有几个? (1)  $y = 3 \ln 3$  (2)  $y^2 = 3x$  (3)  $8y - x + 6 = 0$  (4)  $(x-2)^2 + (y-\sqrt{3})^2 = 2$   
A. 2                      B. 3                      C. 4                      D. 1
- 若曲线  $y = \ln(x + 2a)$  的一条切线为  $y = ex - 2b$  ( $e$  为自然对数的底数), 其中  $a, b$  为正实数, 则  $\frac{1}{ea} + \frac{1}{b}$  的取值范围是 ( )  
A.  $[2, e)$                       B.  $(e, 4]$                       C.  $[4, +\infty)$                       D.  $[e, +\infty)$

8. 正项数列  $\{a_n\}$  中,  $a_{n+1} = ka_n$  ( $k$  为实数), 若  $a_{2022} + a_{2023} + a_{2024} = 3$ , 则  $a_{2022}^2 + a_{2023}^2 + a_{2024}^2$  的取值范围是 ( )

- A.  $[3, 9)$       B.  $[3, 9]$       C.  $[3, 15)$       D.  $[3, 15]$

## 二、多选题

9. 已知函数  $f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$  ( $\omega > 0, -\pi < \varphi < 0$ ) 的部分图象如图所示, 则 ( )



- A.  $\omega = \frac{6}{5}$       B.  $\varphi = -\frac{\pi}{3}$       C.  $\omega = \frac{5}{6}$       D.  $f(2\pi) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

10. 已知不等式  $(ax+3)(x^2-b) \leq 0$  对任意  $x \in (0, +\infty)$  恒成立, 其中  $a, b$  是整数, 则  $a+b$  的取值可以为 ( )

- A.  $-4$       B.  $-2$       C.  $0$       D.  $8$

11. 由倍角公式  $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$  可知,  $\cos 2x$  可以表示为  $\cos x$  的二次多项式. 一般地, 存在一个  $n$  ( $n \in \mathbf{N}^*$ ) 次多项式  $P_n(t) = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \dots + a_0$  ( $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbf{R}$ ), 使得  $\cos nx = P_n(\cos x)$ , 这些多项式  $P_n(t)$  称为切比雪夫 (P.L.Tschebyscheff) 多项式. 运用探究切比雪夫多项式的方法可得 ( )

- A.  $P_3(t) = 4t^3 - 3t$       B.  $P_4(t) = 8t^4 - 8t^2 + 1$   
C.  $\cos 54^\circ = \frac{\sqrt{5}+1}{6}$       D.  $\sin 54^\circ = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$

## 三、填空题

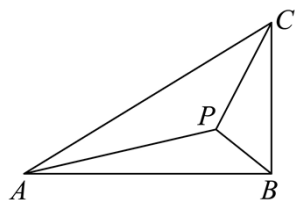
12. 若  $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{vmatrix} = 2$ ,  $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a+b & 2\sqrt{3} \end{vmatrix} = 2\sqrt{3}$ , 则  $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a-b & \end{vmatrix} =$  \_\_\_\_\_.

13. 已知某射击运动员在 10 次射击中, 命中环数的平均数为 7, 方差为 4, 现增加两次射击, 命中环数分别是 6 和 8, 则该射击运动员的这 12 次射击的命中环数的方差为\_\_\_\_\_.

14. 设集合  $A = \{r_1, r_2, \dots, r_n\} \subseteq \{2, 3, \dots, 37\}$ , ( $n \geq 2, n \in \mathbf{N}$ ) 且  $A$  中任意两数之和不能被 5 整除, 则  $n$  的最大值为\_\_\_\_\_.

#### 四、解答题

15. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中,  $\angle ABC = 90^\circ$ ,  $AB = \sqrt{3}$ ,  $BC = 1$ ,  $P$ 为 $\triangle ABC$ 内一点,  $\angle BPC = 90^\circ$ .



(1) 若  $PB = \frac{1}{2}$ , 求  $PA$ ;

(2) (i) 若  $\angle APB = 150^\circ$ , 求  $\tan \angle PBA$ .

(ii) 求  $PC + PB$  的取值范围.

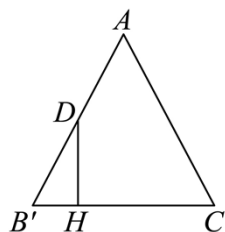
16. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前  $n$  项和为  $S_n$  ( $n$  为正整数), 若  $S_1 = 2$ ,  $3S_n = (n+2)a_n$ .

(1) 求  $a_{2025}$ ;

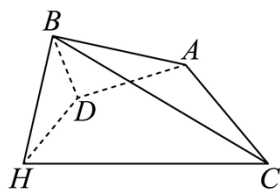
(2) (i) 证明:  $\frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2} + \cdots + \frac{1}{S_n} < \frac{3}{2}$ ;

(ii) 解不等式:  $S_n < 2025$ .

17. 如图①, 已知三角形  $AB'C$  是边长为 2 的等边三角形,  $D$  是  $AB'$  的中点,  $DH \perp B'C$ , 如图②, 将  $\triangle B'DH$  沿边  $DH$  翻折至  $\triangle BDH$ .



图①



图②

(1) 在线段  $BC$  上是否存在点  $F$ , 使得  $AF \parallel$  平面  $BDH$ ? 若存在, 求  $\frac{BF}{FC}$  的值; 若不存在, 请说明理由;

(2) (i) 若平面  $BHC$  与平面  $BDA$  所成的二面角的正切值为  $2\sqrt{2}$ , 求点  $B$  到直线  $CH$  的距离.

(ii) 若点  $B$  在平面  $ADHC$  上的投影在  $DH$  上, 求平面  $ABC$  与直线  $AH$  所成角的正弦值.

18. 已知抛物线  $C: y^2 = 2px$  ( $p > 0$ ). 过抛物线焦点  $F$  作直线  $l$  分别在第一、四象限交  $C$  于

$K$ 、 $P$  两点，过原点  $O$  作直线  $l_2$  与抛物线的准线交于  $E$  点，设两直线交点为  $S$ . 若当点  $P$  的纵坐标为  $-2$  时， $|OP| = \sqrt{5}$ .

(1) 求抛物线的方程.

(2) 若  $EP$  平行于  $x$  轴，证明： $S$  在抛物线  $C$  上.

(3) 在 (2) 的条件下，记  $\triangle SEP$  的重心为  $R$ ，延长  $ER$  交  $SP$  于  $Q$ ，直线  $EQ$  交抛物线于  $N$ 、 $T$  ( $T$  在右侧)，设  $NT$  中点为  $G$ ，求  $\triangle PEG$  与  $\triangle ESQ$  面积之比  $n$  的取值范围.

19. 已知集合  $M_n = \{x \in \mathbb{N}^* \mid x \leq 2n\}$  ( $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 4$ ), 若存在数阵  $T = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{bmatrix}$  满足

$$\textcircled{1} \{a_1, a_2, \cdots, a_n\} \cup \{b_1, b_2, \cdots, b_n\} = M_n;$$

$$\textcircled{2} a_k - b_k = k \quad (k = 1, 2, \cdots, n).$$

则称集合  $M_n$  为“好集合”，并称数阵  $T$  为  $M_n$  的一个“好数阵”.

(1) 已知数阵  $T = \begin{bmatrix} x & y & z & 6 \\ 7 & w & 1 & 2 \end{bmatrix}$  是  $M_4$  的一个“好数阵”，试写出  $x$ ,  $y$ ,  $z$ ,  $w$  的值;

(2) 若集合  $M_n$  为“好集合”，证明：集合  $M_n$  的“好数阵”必有偶数个;

(3) 判断  $M_n$  ( $n = 5, 6$ ) 是否为“好集合”. 若是，求出满足条件  $n \in \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$  的所有“好数阵”; 若不是，说明理由.

参考答案:

1. D

【分析】先求出集合，再求出子集个数即可.

【详解】由题意，得  $A = \{0, 1, 2, 3\}$ , 故集合  $A$  子集个数为  $2^4 = 16$  个.

故选: D.

2. D

【分析】利用复数的运算法则求出  $z$ ，再根据复数的代数表示及其几何意义得出  $z$  对应的点，进而求解.

【详解】设  $z = a + bi, (a, b \in \mathbb{R})$ ，则  $\bar{z} = a - bi$ ，

则  $a + bi + 2(a - bi) = 3 + i$ ，即  $3a - bi = 3 + i$ ，所以  $3a = 3$ ， $-b = -1$ ，

解得  $a = 1$ ， $b = -1$ ，故  $z = 1 - i$ ，对应的点  $(1, -1)$  在第四象限.

故选: D.

3. B

【分析】先利用列举法得到基本事件数和符合条件的事件数，再利用古典概型概率公式求解即可.

【详解】从  $-2, -1, 1, 3$  这 4 个数中随机取出 2 个不同的数，共有 6 种不同的情况，

分别为  $(-2, 1)$ ， $(-2, 3)$ ， $(-1, 1)$ ， $(-1, 3)$ ， $(-2, -1)$ ， $(1, 3)$ ，

满足乘积不超过 1 的为  $(-2, 1)$ ， $(-2, 3)$ ， $(-1, 1)$ ， $(-1, 3)$ ，共有 4 种不同的情况，

设概率为  $P$ ，故所求的概率为  $P = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ ，故 B 正确.

故选: B

4. D

【分析】设正三棱柱  $ABC - A_1B_1C_1$  的底面边长为  $a$ ，高为  $h$ ，设圆柱的高为  $m$ ，表示出棱柱和圆柱的体积，由两体积相等化简可求出棱柱与圆柱的高的比值

【详解】设正三棱柱  $ABC - A_1B_1C_1$  的底面边长为  $a$ ，高为  $h$ ，

等边  $\triangle ABC$  的面积为  $\frac{1}{2}a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ ，

则正三棱柱  $ABC - A_1B_1C_1$  的体积为  $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2h$ ，

设 $\triangle ABC$ 的外接圆半径为 $R$ ，则 $R = \frac{\sqrt{3}}{2}a \cdot \frac{2}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}a$ ，故 $R = \frac{\sqrt{3}}{3}a$ ，

设圆柱的高为 $m$ ，则圆柱的体积 $\pi R^2 m = \frac{\pi}{3}a^2 m$ ，

由题意得 $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2 h = \frac{\pi}{3}a^2 m$ ，解得 $\frac{h}{m} = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}\pi}{9}$ 。

故选：D。

5. D

【分析】结合给定条件利用幂函数性质判断即可。

【详解】对于 $y = x^{-1}$ ，它是定义在 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ 上的奇函数，

值域是 $\{y | y \in \mathbb{R} \text{ 且 } y \neq 0\}$ ，且在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减，不满足题意。

对于 $y = x^{\frac{1}{3}}$ ，它是定义域为 $\mathbb{R}$ 的奇函数，值域是 $\mathbb{R}$ ，

且在 $(-\infty, 0)$ 上单调递增，不满足题意。

对于 $y = x^3$ ，它是定义域为 $\mathbb{R}$ 的奇函数，值域是 $\mathbb{R}$ ，

且在 $(-\infty, 0)$ 上单调递增，不满足题意。

对于 $y = x^{-2}$ ，它是定义在 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ 上的偶函数，

值域是 $\{y | y > 0\}$ ，且在 $(-\infty, 0)$ 上单调递增，满足题意。

故选：D。

6. C

【分析】根据 $\frac{|PA|}{|PB|} = 2$ 可得“完美曲线” $(x-6)^2 + y^2 = 16$ 表示圆心在 $(6, 0)$ ，半径 $r = 4$ 的圆，

即可根据圆的范围求解（1），联立方程可判断（2），根据点到直线的距离求解（3），根据两圆的位置关系即可求解（4）。

【详解】由题意可得 $\frac{|PA|}{|PB|} = 2$ ，即 $\frac{(x+2)^2 + y^2}{(x-4)^2 + y^2} = 4$ ，化简得 $x^2 + y^2 - 12x + 20 = 0$ ，

即 $(x-6)^2 + y^2 = 16$ ，故“完美曲线”表示圆心在 $(6, 0)$ ，半径 $r = 4$ 的圆，

对于 $y = 3\ln 3 \in [-4, 4]$ ，故 $y = 3\ln 3$ 与“完美曲线”有交点，

对于 $y^2 = 3x$ ，联立 $y^2 = 3x$ 与 $x^2 + y^2 - 12x + 20 = 0$ 可得 $x^2 - 9x + 20 = 0$ ，

解得  $x_1=4, x_2=5$ ，故有交点，

对于  $8y-x+6=0$ ，圆心  $(6,0)$  到直线  $8y-x+6=0$  的距离为  $d = \frac{0}{\sqrt{8^2+1^2}} = 0$ ，

故直线与圆相交，有交点，

对于  $(x-2)^2 + (y-\sqrt{3})^2 = 2$ ，表示圆心  $(2, \sqrt{3})$ ，半径  $R = \sqrt{2}$  的圆，

则两圆的圆心距离为  $\sqrt{4^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{19} \in [4-\sqrt{2}, 4+\sqrt{2}]$ ，故两圆相交，有交点，

故选：C

7. C

【分析】利用导数的几何意义计算可得  $ae+b=1$ ，结合基本不等式中“1”的活用计算即可得.

【详解】 $y' = \frac{1}{x+2a}$ ，令  $\frac{1}{x+2a} = e$ ，则  $x = \frac{1}{e} - 2a$ ，有  $y = \ln\left(\frac{1}{e} - 2a + 2a\right) = -1$ ，

即  $e\left(\frac{1}{e} - 2a\right) - 2b = -1$ ，即  $ae+b=1$ ，

又  $a, b$  为正实数，则  $\frac{1}{ea} + \frac{1}{b} = \left(\frac{1}{ea} + \frac{1}{b}\right)(ae+b) = 1+1 + \frac{b}{ea} + \frac{ea}{b} \geq 2 + 2\sqrt{\frac{b}{ea} \cdot \frac{ea}{b}} = 4$ ，

当且仅当  $\frac{b}{ea} = \frac{ea}{b}$ ，即  $b=ea=\frac{1}{2}$  时，等号成立.

故  $\frac{1}{ea} + \frac{1}{b}$  的取值范围是  $[4, +\infty)$ .

故选：C.

8. A

【分析】根据递推公式，求出  $a_{2023} = \frac{3}{\frac{1}{k} + 1 + k}$ ，然后化简  $a_{2022}^2 + a_{2023}^2 + a_{2024}^2$ ，令

$t = \frac{1}{k} + k (t \geq 2)$ ，得到关于  $t$  的一个函数，根据函数的性质求其取值即可求解.

【详解】因为  $a_n > 0$ ，且  $a_{n+1} = ka_n$ ，所以  $k > 0$  且  $\{a_n\}$  为等比数列，公比为  $k$ ，

因为  $a_{2022} + a_{2023} + a_{2024} = 3$ ，所以  $\frac{a_{2023}}{k} + a_{2023} + ka_{2023} = 3(k > 0)$ ，

所以  $a_{2023} = \frac{3}{\frac{1}{k} + 1 + k}$ ，

所以  $a_{2022}^2 + a_{2023}^2 + a_{2024}^2 = a_{2023}^2 \left(\frac{1}{k^2} + 1 + k^2\right) = \left(\frac{3}{\frac{1}{k} + 1 + k}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{k^2} + 1 + k^2\right)$

令  $t = \frac{1}{k} + k (t \geq 2)$ , 当且仅当  $k = 1$  时取等号,

化简可得  $a_{2022}^2 + a_{2023}^2 + a_{2024}^2 = 9(t^2 - 1) \frac{1}{(t+1)^2}$ ,

令  $f(t) = 9(t^2 - 1) \frac{1}{(t+1)^2} = 9\left(1 - \frac{2}{t+1}\right) (t \geq 2)$ , 因为  $t \geq 2$ , 所以  $0 < \frac{2}{t+1} \leq \frac{2}{3}$ ,

所以  $\frac{1}{3} \leq 1 - \frac{2}{t+1} < 1$ , 所以  $f(t) \in [3, 9)$ ,

所以  $a_{2022}^2 + a_{2023}^2 + a_{2024}^2$  的取值范围是  $[3, 9)$ .

故选: A.

【点睛】关键点点睛: 本题解答的关键是根据等比数列的通项公式将式子转化为关于  $k$  的式子, 再利用换元法求出目标式子的取值范围.

## 9. BCD

【分析】根据图象得  $\frac{5T}{4} = 3\pi$ , 解得  $\omega = \frac{5}{6}$ , 再由  $f(\pi) = 1$  解得  $\varphi = -\frac{\pi}{3}$ , 再代值即可求解.

【详解】由图象可知,  $\frac{5T}{4} = \pi - (-2\pi) = 3\pi$ , 则  $T = \frac{12\pi}{5}$ ,

故  $\frac{2\pi}{\omega} = \frac{12\pi}{5}$ , 解得  $\omega = \frac{5}{6}$ ,

所以  $f(x) = \sin\left(\frac{5}{6}x + \varphi\right)$ ,

由  $f(\pi) = 1$  得  $\sin\left(\frac{5}{6}\pi + \varphi\right) = 1$ ,

解得  $\frac{5\pi}{6} + \varphi = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ , 即  $\varphi = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ ,

又因为  $-\pi < \varphi < 0$ ,

所以  $\varphi = -\frac{\pi}{3}$ ,

所以  $f(x) = \sin\left(\frac{5}{6}x - \frac{\pi}{3}\right)$ ,

故  $f(2\pi) = \sin\left(\frac{5}{6} \times 2\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \sin \frac{4\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ .

故选: BCD.

## 10. BD

【分析】对  $b$  分类讨论, 当  $b \leq 0$  时, 由  $(ax+3)(x^2-b) \leq 0$  得到  $ax+3 \leq 0$  在  $x \in (0, +\infty)$  上恒

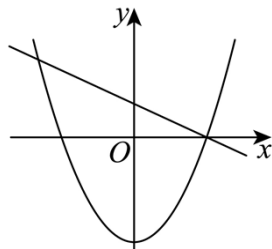
成立, 则  $a$  不存在; 当  $b > 0$  时, 由  $(ax+3)(x^2-b) \leq 0$

，结合图象利用数形结合的思想得出  $a, b$  的整数解.

【详解】当  $b \leq 0$  时，由  $(ax+3)(x^2-b) \leq 0$  得到  $ax+3 \leq 0$  在  $x \in (0, +\infty)$  上恒成立，则  $a$  不存在，

当  $b > 0$  时，由  $(ax+3)(x^2-b) \leq 0$  可设  $f(x) = ax+3$ ， $g(x) = x^2-b$ ，

又  $g(x)$  的大致图象如下，



那么由题意可知： $\begin{cases} a < 0 \\ -\frac{3}{a} = \sqrt{b} \end{cases}$ ，再由  $a, b$  是整数得到  $\begin{cases} a = -1, \\ b = 9 \end{cases}$  或  $\begin{cases} a = -3, \\ b = 1, \end{cases}$

因此  $a+b=8$  或  $-2$ .

故选：BD

11. ABD

【分析】根据两角和的余弦公式，以及二倍角的正余弦公式化简可得  $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$ ，

根据定义即可判断 A 项；根据二倍角公式可推得  $P_4(\cos x) = 8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1$ ，即可得出 B

项；根据诱导公式以及 A 的结论可知， $\cos 54^\circ = 4\cos^3 18^\circ - 3\cos 18^\circ$ ，

$\sin 54^\circ = \cos 36^\circ = 2\cos^2 18^\circ - 1$ . 平方相加，即可得出  $\cos^2 18^\circ = \frac{5+\sqrt{5}}{8}$ ，进而求出 D 项；假设

C 项成立，结合 D 项，检验即可判断.

【详解】对于 A：  $\cos 3x = \cos(2x+x) = \cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x$

$$= (2\cos^2 x - 1)\cos x - 2\cos x \sin^2 x = (2\cos^2 x - 1)\cos x - 2\cos x(1 - \cos^2 x)$$

$$= 4\cos^3 x - 3\cos x.$$

由切比雪夫多项式可知， $\cos 3x = P_3(\cos x)$ ，

$$\text{即 } P_3(\cos x) = 4\cos^3 x - 3\cos x.$$

令  $t = \cos x$ ，可知  $P_3(t) = 4t^3 - 3t$ ，故 A 正确；

对于 B：  $\cos 4x = \cos(2 \times 2x) = 2\cos^2 2x - 1 = 2 \times (2\cos^2 x - 1)^2 - 1 = 8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1$ .

由切比雪夫多项式可知,  $\cos 4x = P_4(\cos x)$ ,

即  $P_4(\cos x) = 8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1$ .

令  $t = \cos x$ , 可知  $P_4(t) = 8t^4 - 8t^2 + 1$ , 故 B 正确;

对于 D: 因为  $36^\circ = 2 \times 18^\circ$ ,  $54^\circ = 3 \times 18^\circ$ ,

根据 A 项  $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$ , 可得  $\cos 54^\circ = 4\cos^3 18^\circ - 3\cos 18^\circ$ ,

$\cos 36^\circ = 2\cos^2 18^\circ - 1$ .

又  $\cos 36^\circ = \sin 54^\circ$ , 所以  $\cos^2 36^\circ + \cos^2 54^\circ = \sin^2 54^\circ + \cos^2 54^\circ = 1$ ,

所以  $(4\cos^3 18^\circ - 3\cos 18^\circ)^2 + (2\cos^2 18^\circ - 1)^2 = 1$ .

令  $t = \cos 18^\circ > 0$ , 可知  $(4t^3 - 3t)^2 + (2t^2 - 1)^2 = 1$ ,

展开即可得出  $16t^6 - 20t^4 + 5t^2 = 0$ ,

所以  $16t^4 - 20t^2 + 5 = 0$ , 解方程可得  $t^2 = \frac{5 \pm \sqrt{5}}{8}$ .

因为  $t = \cos 18^\circ > \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ , 所以  $t^2 = \frac{5 + \sqrt{5}}{8}$ ,

所以  $\cos 36^\circ = 2\cos^2 18^\circ - 1 = 2 \times \frac{5 + \sqrt{5}}{8} - 1 = \frac{\sqrt{5} + 1}{4}$ ,

所以  $\sin 54^\circ = \cos 36^\circ = \frac{\sqrt{5} + 1}{4}$ , 故 D 正确;

对于 C: 假设  $\cos 54^\circ = \frac{\sqrt{5} + 1}{6}$ ,

因为  $\sin 54^\circ = \frac{\sqrt{5} + 1}{4}$ ,

则  $\sin^2 54^\circ + \cos^2 54^\circ = \left(\frac{\sqrt{5} + 1}{4}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{5} + 1}{6}\right)^2 \neq 1$ ,

显然不正确, 故假设不正确, 故 C 错误.

故选: ABD.

【点睛】方法点睛: 根据题意多项式的定义, 结合两角和以及二倍角的余弦公式, 化简可求出  $P_3(\cos x), P_4(\cos x)$ , 换元即可得出  $P_3(t), P_4(t)$ .

12. 2

【分析】对  $\left|\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{smallmatrix}\right| = 2\sqrt{3}$  两边平方求出  $\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{smallmatrix}$ , 再对  $\left|\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ a & -b \end{smallmatrix}\right|$  两边平方再开方可得答案.

【详解】若  $\left|\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{smallmatrix}\right| = \left|\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ a & -b \end{smallmatrix}\right| = 2$ ,  $\left|\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{smallmatrix}\right| = 2\sqrt{3}$ ,

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。

如要下载或阅读全文，请访问：

<https://d.book118.com/436113235225010213>