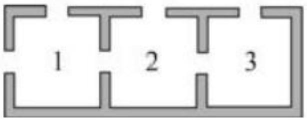
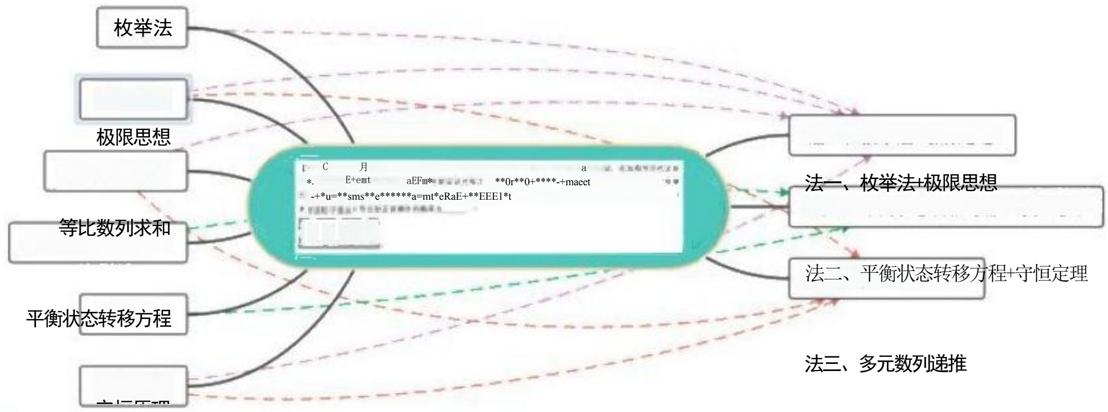
第 5 题　　马尔科夫链问题

【2024届武汉市二月调研考试14】．“布朗运动”是指微小颗粒永不停息的无规则随机运动，在如图所示的试验容器中，容器由三个仓组成，某粒子作布朗运动时每次会从所在仓的通道口中随机选择一个到达相邻仓或者容器外，　一旦粒子到达容器外的就会被外部捕获装置所捕获，此时试验结束．已知该粒子初始位置在1号仓，则试验结束时该粒子是从1号仓到达容器外的概率为__



题多解*综述



题多解*法一　枚举+极限思想

思路分析　利用枚举法分类讨论粒子进入2号仓之后的运动可能，设A=“第一步从2号仓先到达1号仓，第二步再从1号仓出”，B=“从2号仓出发，两步运动之内能再回到2号仓”，并求其概率后再求粒子第一次从2号仓出发，最终能从1号仓出去的概率，根据等比数列求和公式及极限思想计算即可．

详细解析

已知粒子第一次从1号仓到2号仓的概率为 $P_1=\frac{1}{3}$，

率为 $P_2=\frac{2}{3}$．

粒子第一次从1号仓就到达容器外的概

当粒子到达2号仓后，再之后两次运动过程中，有如下可能：

①先到达1号仓，再从1号仓出；②先到达1号仓，再返回2号仓：③直接从2号仓出；④先到达3号仓，再从3号仓出；⑤先到达3号仓，再返回2号仓.

设A=“第一步从2号仓先到达1号仓，第二步再从1号仓出”，B=“从2号仓出发，两步运动之内能再回到2号仓”.

$P(A)=\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{2}{9}$ $P(B)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{5}{18}$

所以

若B 事件发生，那么又将重新进行5种可能.

设粒子第一次从2号仓出发，最终能从1号仓出去的概率为β，

$$P_3=\frac{2}{9}+\frac{5}{18}\times\frac{2}{9}+\left(\frac{5}{18}\right)^2\times\frac{2}{9}+\cdots+\left(\frac{5}{18}\right)^n\times\frac{2}{9}+\cdots,$$

不妨设 $a_n=\frac{2}{9}\times\left(\frac{5}{18}\right)^{n-1}$，数列$\{a_n\}$的前n项和： $P_3+P_1\times P\ \frac{2}{3}\ \frac{1}{3}\ \frac{4}{13}\ \frac{10}{13}$

$$S_n=\frac{\frac{2}{9}\times\left(1-\frac{5^n}{18}\right)}{1-\frac{5}{18}}=\frac{4}{13}\cdot\left(1-\frac{5^n}{18}\right),\quad \lim_{n\to+\infty}S_n=\frac{4}{13},$$

故最终概率为

故答案为：$\frac{10}{13}$.

举一反三

（2024年3月金丽衢十二校第二次联考）

1．已知正方体ABCD-ABCD, 的棱长为1，点P 是正方形ABC;D, 上的一个动点，初始位置位于点A_1处，每次移动都会到达另外三个顶点.向相邻两顶点移动的概率均头 与$\frac{1}{4}$，向对角顶点移动的概率头 与$\frac{1}{2}$，如当点P 在点A 处时，向点B,D, 移动的概率均 与$\frac{1}{4}$，向 点C_1移动的概率为与$\frac{1}{2}$, 则（ ）

A 移动两次后，“$|PC|=\sqrt{3}$”的概率头$\frac{3}{8}$

B. 对任意$n\in N$, 移动n次后，“PA// 平面BDC” 的概率都小于$\frac{1}{3}$

C. 对任意neN°, 移动n次后，“PC 上平面BDC;”的概率都小于$\frac{1}{2}$

D. 对任意n∈N， 移动n 次后，四面体P-BDC 体积V的数学期望$E(V)<\frac{1}{5}$（注：当点P在平面BDC 上时，四面体P-BDC，体积为0）

(23-24高二下·江苏南京·期中)

2. 在某抽奖活动中，初始时的袋子中有3个除颜色外其余都相同的小球，颜色为2白1红. 每次随机抽取一个小球后放回. 抽奖规则如下：设定抽中红球为中奖，抽中白球为未中奖；若抽到白球，放回后把袋中的一个白色小球替换为红色；若抽到红球，放回后把三个球的颜色重新变为2白1红的初始状态. 记第n 次抽奖中奖的概率为P.

(1) 求P,R;

(2) 若存在实数a,b,c，对任意的不小于4的正整数n，都有$P_1=aP+bP_2+cP_3$，试确定a,b,c 的值，并证明上述递推公式

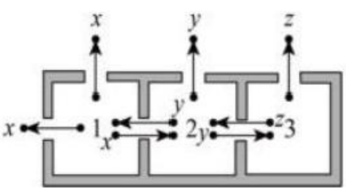
(3) 若累计中奖4次及以上可以获得一枚优胜者勋章，则从初始状态下连抽9次获得至少一枚勋章的概率为多少?

根据平衡状态转移方程及守恒原理直接计算即可.

一题多解*法二 平衡状态转移方程+守恒原理

思路分析

详细解析



$$\begin{cases}3x=1+y\\3y=x+z,\\2z=y\end{cases}$$

如图所示，设出1号仓的概率为x，出2号仓的概率为y，出3号仓的概率为z，则

解得 $x=\frac{5}{13}$,

所以从1号仓到容器外的概率为 $2x=\frac{10}{13}$.

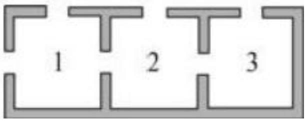
一题多解*法目 多元数列递推法

思路分析 设经过n 步后粒子到达1, 2, 3号仓的概率分别为a,,b,,C₂, 根据题意得出递推关系

$$\begin{cases} a_n=\frac{1}{3}b_{n-1} \\ b_n=\frac{1}{3}a_{n-1}+\frac{1}{2}c_{n-1} \\ c_n=\frac{1}{3}b_{n-1} \end{cases}$$

，# 础 $a_{n+2}=\frac{5}{18}a_n$ 再根据等比数列求和公式计算即可.

详细解析



设经过n 步后粒子到达1, 2, 3号仓的概率分别为a,,b,C,n∈N, 则 $a_0=1,b_0=c_0=0$, 则 n ∈N 时，有

$$\begin{cases} a_n=\frac{1}{3}b_{n-1} \\ b_n=\frac{1}{3}a_{n-1}+\frac{1}{2}c_{n-} \\ c_n=\frac{1}{3}b_{n-1} \end{cases}$$

$$a_{n+2}=\frac{1}{3}b_{n+1}=\frac{5}{18}a_n\left(n\in\mathbf{N}^*\right),$$

$$a_n=c_n,\begin{cases} a_n=\frac{1}{3}b_{n-1} \\ b_n=\frac{1}{3}a_{n-1}+\frac{1}{2}a_{n-1}=\frac{5}{6}a_{n-1} \end{cases}$$

故

所以

易知 $a_1=0,a_2=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$，所以试验结束，该粒子是从1号仓到达容器外的概率为：

$$\frac{2}{3}\sum_{n=0}^{\infty}a_n=\frac{2}{3}\left(1+\frac{\frac{1}{9}}{1-\frac{5}{18}}\right)=\frac{10}{13}.$$

举一反三

（浙江省名校协作体2024年2月高三下学期返考）

3. 日常生活中植物寿命的统计规律常体现出分布的无记忆性. 假设在一定的培养环境下，一种植物的寿命是取值为正整数的随机变量X，根据统计数据，它近似满足如下规律：对任意正整数n，寿命恰好为n 的植物在所有寿命不小于n 的植物中的占比为10%. 记“一株植物的寿命为n”为事件A,，“一株植物的寿命不小于n”为事件B,. 则下列结论正确的是（ ）

A.P(A)=0.01

B. $P(B_n)=0.9^{n-1}$

C. 设$a_n=P(A_n|B_2)$, 则$\{a_n\}$为等比数列

D. 设$S_n=nP(A_n)$, 则$\sum_{k=1}^{n} S_k<10$

（2023年9月武汉部分学校高三上调研）

4. 甲，乙，丙三人进行传球游戏，每次投掷一枚质地均匀的正方体骰子决定传球的方式：当球在甲手中时，若骰子点数大于3,则甲将球传给乙，若点数不大于3,则甲将球保留；当球在乙手中时，若骰子点数大于4,则乙将球传给甲，若点数不大于4,则乙将球传给丙；当球在丙手中时，若骰子点数大于3,则丙将球传给甲，若骰子点数不大于3,则丙将球传给乙.初始时，球在甲手中，投掷n 次骰子后（n ε N*）, 记球在甲手中的概率为P, 则

$P_3=$ ______; $P=$ ______

综合训练提高

(22-23高二下·重庆渝中·期末)

5.“紫藤挂穗，蓝楹花开，黄桷新绿，菩提葱蔚”,巴蜀中学即将迎来90周年校庆，学校设计了3个吉祥物“诚诚”,“盈盈”,“嘉嘉”.现在袋中有6个形状.大小完全相同的小球，每一个小球上写有一个字(其中有2个小球写着“诚”,2个小球写着“盈”,2个小球写着“嘉”),现在有四位同学，平均分成甲、乙两队，进行比赛活动，规则如下：每轮参与活动的队伍每位同学抽取1次小球，每次抽取后小球放回袋中，若两次抽取的球上的字组成了吉祥物名称（如：诚诚),则该队得1分，并且该队继续新一轮比赛活动，否则，该队得本轮得0分，由对方组接着抽取，活动开始时由甲队先抽取，若第n 轮由甲队抽取的概率为P,n 轮结束后，甲队得分均值为K。, 则下列说法正确的有()

$P_2=\frac{1}{3}$

B. $P_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1}$

C. $E(K_2)=\frac{4}{9}$

A.

D. $K_n=\frac{1}{3}P_n+K_{n-1}$

6. 学校食堂每天中午都会提供A,B 两种套餐供学生选择(学生只能选择其中的一种),经过统计分析发现：学生第一天选择A 套餐的概率头$\frac{2}{3}$，选择B 套餐的概率为$\frac{1}{3}$.而前一天选择了A套餐的学生第二天选择A套餐的概率头$\frac{1}{4}$，选择B 套餐的概率为$\frac{3}{4}$； 前一天选择 B 套餐的学生第二天选择A套餐的概率为$\frac{1}{2}$，选择 B 套餐的概率也是$\frac{1}{2}$ 如此反复.记某同学第n 天选择A 套餐的概率为A,，选择B 套餐的概率为B,.一个月(30天)后，记甲、乙、丙三位同学选择B 套餐的人数为X, 则下列说法中正确的是( )

A.A,+B=1

B. 数列$\left\{A_n-\frac{2}{5}\right\}$是等比数列

C.E(X)=1.5

D. $P(X=1)=\frac{36}{125}$

7. 随着高三毕业日期的逐渐临近，有n(n≥2) 个同学组成的学习小组，每人写了一个祝福的卡片准备送给其他同学，小组长收齐所有卡片后让每个人从中随机抽一张作为祝福卡片，则( )

A. 当n=4 时，每个人抽到的卡片都不是自己的概率与$\frac{3}{8}$

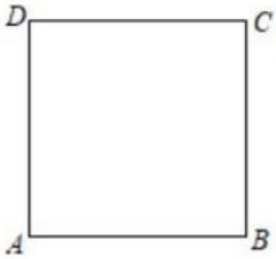
B. 当n=5 时，恰有一人抽到自己的卡片的概率为$\frac{3}{40}$

C. 甲和乙恰好互换了卡片的概率 $\frac{\cdot 1}{n-1}-\frac{1}{n}$

D. 记n个同学都拿到其他同学的卡片的抽法数为a_1, 则 $a_2=(n+1)(a_0+a_4)$, n∈N

(2022•重庆沙坪坝•模拟预测)

8. 如图， 一只蚂蚁从正方形ABCD 的顶点A 出发，每一次行动顺时针或逆时针经过一条边到达另一顶点，其中顺时针的概率少$\frac{1}{3}$，逆时针的概率$\frac{2}{3}$ 设蚂蚁经过 n步到达 B,D 两点的概率分别为P_0q,(n∈N,). 下列说法正确的有( )



A. $p_3=\frac{13}{27}$

B.P2n+Q₂n=1

C. $p_{2n-1}=\left(\frac{1}{6}\right)\times\left(-\frac{1}{9}\right)^{n-1}+\frac{1}{2}$

D. $\sum_{k=1}^{2022}p_k>505$

9. 甲、乙两人进行围棋比赛，共比赛2n(n∈N*) 局，且每局甲获胜的概率和乙获胜的概率均为$\frac{1}{2}$. 如果某人获胜的局数多于另一人，则此人赢得比赛. 记甲赢得比赛的概率为P(n), 则(　)

A. $P(2)=\frac{1}{8}$

B. $P(3)=\frac{11}{32}$

C. $P(n)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{C_{2n}^{n}}{2^{2n}}\right)$

D. P(n)　的最大值》为$\frac{1}{4}$

10. 设k 个人进行互相传球游戏，每个拿球的人等可能地把球传给其他人中的任何一位，k≥3. 若初始时球在甲手中，则第n 次传球之后，球又回到甲手中的概率为______

(2020 • 江苏 • 高考真题)

11. 甲口袋中装有2个黑球和1个白球，乙口袋中装有3个白球. 现从甲、乙两口袋中各任取一个球交换放入另一口袋，重复n 次这样的操作，记甲口袋中黑球个数为Xn, 恰有2个黑球的概率为 pn, 恰有1个黑球的概率为qa.

(1) 求pi,qi　和pz,q2;

(2) 求 2pn+qn与 2pn-1+qn-1的递推关系式和Xn 的数学期望E(Xn)(用n表示).

(2023 • 全国 • 高考真题)

12. 甲、乙两人投篮，每次由其中一人投篮，规则如下：若命中则此人继续投篮，若末命中则换为对方投篮. 无论之前投篮情况如何，甲每次投篮的命中率均为0.6, 乙每次投篮的命

中率均为0.8.由抽签确定第1次投篮的人选，第1次投篮的人是甲、乙的概率各为0.5.

(1)求第2次投篮的人是乙的概率；

(2)求第i次投篮的人是甲的概率；

(3)已知：若随机变量X_i服从两点分布，且$P(X_i=1)=1-P(X_i=0)=q_i, i=1,2,\dots,n$，则

$E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)=\sum_{i=1}^{n} q_i$. 记前n次(即从第1次到第n次投篮)中甲投篮的次数为Y, 求E(Y).

(2019·全国·高考真题)

13. 为了治疗某种疾病，研制了甲、乙两种新药，希望知道哪种新药更有效，为此进行动物试验. 试验方案如下：每一轮选取两只白鼠对药效进行对比试验. 对于两只白鼠，随机选一只施以甲药，另一只施以乙药. 一轮的治疗结果得出后，再安排下一轮试验. 当其中一种药治愈的白鼠比另一种药治愈的白鼠多4只时，就停止试验，并认为治愈只数多的药更有效. 为了方便描述问题，约定：对于每轮试验，若施以甲药的白鼠治愈且施以乙药的白鼠未治愈则甲药得1分，乙药得-1分；若施以乙药的白鼠治愈且施以甲药的白鼠未治愈则乙药得1分，甲药得-1分；若都治愈或都未治愈则两种药均得0分. 甲、乙两种药的治愈率分别记为α和β, 一轮试验中甲药的得分记为X.

(1)求X 的分布列；

(2)若甲药、乙药在试验开始时都赋予4分， $P_i\ (i=0,1,\cdots,8)$表示“甲药的累计得分为i时，最终认为甲药比乙药更有效”的概率，则$P_0=0$, $P_8=1$, $P_i=ap_{i-1}+bp_i+cP_{i+1}\ (i=1,2,\cdots,7)$,

其中a=P(X=-1),b=P(X=0),c=P(X=1). 假设α=0.5, β=0.8.

(i)证明：$\{P_{i+1}-P_i\}$(i=0,1,2,…,7) 为等比数列；

(ii)求p_4, 并根据P_4 的值解释这种试验方案的合理性.

参考答案：

1.AC

【分析】先求出点P 在移动n 次后，在点A, B;, C, D_1 处的概率，再结合由向量法求出线面垂直、线面平行和三棱锥的体积，对选项一一判断即可得出答案.

【详解】设移动n 次后，点P 在点A,B,C,D_1 的概率分别为a_n, b_n, c_n, d_n,

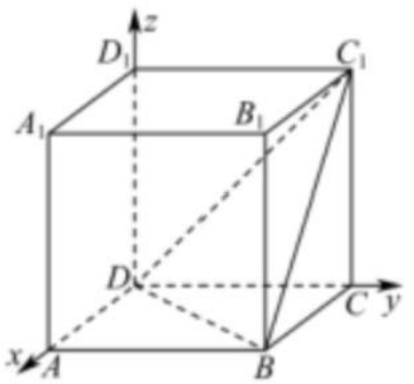
$$\begin{cases} a_n = \frac{1}{4}b_{n-1}+\frac{1}{4}d_{n-1}+\frac{1}{2}c_{n-1} \\ b_n = \frac{1}{4}a_{n-1}+\frac{1}{4}c_{n-1}+\frac{1}{2}d_{n-1} \\ c_n = \frac{1}{4}b_{n-1}+\frac{1}{4}d_{n-1}+\frac{1}{2}a_{n-1} \\ d_n = \frac{1}{4}a_{n-1}+\frac{1}{4}c_{n-1}+\frac{1}{2}b_{n-1} \end{cases}$$

其中$a_1=0, b_1=\frac{1}{4}, c_1=\frac{1}{2}, d_1=\frac{1}{4}, a_n+b_n+c_n+d_n=1$，解得：

$$\begin{cases} a_n = \frac{1}{4}+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ c_n = \frac{1}{4}-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ b_n = d_n = \frac{1}{4} \end{cases},$$

对于A, 移动两次后，“$|PC|=\sqrt{3}$”表示点P移动两次后到达点A,

所以概率为$a_2=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\times\left(-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{8}$，故 A 正确；



对于 B, 以D 为坐标原点，建立如图所示的空间直角坐标系，

所以A(1,0,0),D(0,0,0),B(1,1,0),C(0,1,0),A(1,0,1),D(0,0,1),B(1,1,1),G(0,1,1),

因为DB=(1,1,0),DC=(0,1,1),BA=(0,-1,-1),DA=(1,0,-1),AC=(-1,1,-1),

设平面BDC_1的法向量为n=(x,y,z), 则$\begin{cases} n \cdot D\vec{B} = x + y = 0 \\ n \cdot DC_1 = y + z = 0 \end{cases}$,

取 y=1, 可得x=-1,z=-1, 所以n=(-1,1,-1),

而BA·n=0,DA·n=0,BA,DAx 平面BDC,

所以当点P 位于B,或D_1时 ，PA// 平面BDC,

当P 移动一次后到达点B_1或 D_1 时，所以概率为$\frac{1}{4}\times 2=\frac{1}{2}>\frac{1}{3}$，故 B 错误；

对于C,AC=(-1,1,-1)=n, 所以当点P位于A时 ，PC⊥平面BDC,

所以移动n 次后点P 位于A, 则$a_n=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^n<\frac{1}{2}$ 故 C 正确；

对于D, 四面体P-BDC 体积V的数学期望

E(V)=a,·V-ms+b_2Va-oogs+c·Vc-mog+d,·Va-mvc

$S_{\triangle BDC_1}=\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\sqrt{2}\right)^2=\frac{\sqrt{3}}{2}$, 因为DA=(1,0,1),

所以点A到平面ADC的距离;为$d_1=\frac{\left|DA_1\cdot n\right|}{|n|}=\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$

同理，点B,C_1,D_1 到平面BDC 的距离分别为$\frac{\sqrt{3}}{3},0,\frac{\sqrt{3}}{3}$,

所以$V_{A_1-BDC_1}=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{2\sqrt{3}}{3}=\frac{1}{3},V_{B_1-BDC_1}=V_{D_1-BDC_1}=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{1}{6},V_{C_1-BDC_1}=0$

所以$E(V)=\left[\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right]\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{6}+0+\frac{1}{4}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$

当n 为偶数，所以$E(V)=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}\right)^{\prime}$, 当n=2 时,$E(V)=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}\right)^n=\frac{5}{24}>\frac{1}{5}$

当n 为奇数，所以$E(V)=\frac{1}{6}-\frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}\right)^n<\frac{1}{6}<\frac{1}{5}$ 故 D 错误.

故选： AC.

【点睛】关键点睛：本题的关键点是先求出点P 在移动n 次后，点A,B,C,D_1 的概率，再结合由向量法求出线面垂直、线面平行和三棱锥的体积，对选项一一判断即可得出答案.

2 (1) $P_2=\frac{5}{9}$, $P_3=\frac{5}{9}$

(2) $a=\frac{1}{3},b=\frac{4}{9},c=\frac{2}{9}$，证明见解析

(3) $\frac{1979}{2187}$