2024年湖南省长沙市高考三模数学试题

（答案在最后）

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1．已知集合 $A\ \ \{x|\ \ 1\ \ x\ \ 2\},B\ \ \{x|\ \ 2\ \ x\ \ 1\}$，则集合 $ð_{A\ B}\ \ A\ \ B$　（　）

A．$1,1$　　B．$2,2$　　C．$2,\ 1\ \ \ 1,2$　　D．$(\ 2,\ 1]\ \ [1,2)$

2．已知复数 $z\ \ 2i\ \ 1\ \ i$，则复数 z 在复平面内对应的点在（　）

A．第一象限　　B．第二象限　　C．第三象限　　D．第四象限

3．样本数据16，24，14，10，20，15，12，14的上四分位数为（　）

A．14　　B．15　　C．16　　D．18

4．已知 $\cos\ \ \frac{\pi}{6}\ \ \frac{1}{3}$，则 $\sin\frac{\pi}{3}\ \ \ \ \sin 2\ \ \frac{\pi}{6}$　（　）

A．$\frac{10}{9}$　　B．$\frac{4}{9}$　　C．$\frac{2}{3}$　　D．$\frac{6}{5}$

5．已知向量 $a\ \ 1,1$，$b\ \ 0,t$，若 $a\ \ a\ \ 2b$，则 $|b|$　（　）

A．$\frac{\sqrt{2}}{2}$　　B．1　　C．$\sqrt{2}$　　D．2

6．已知等差数列 a_n 的前 n 项和为 S_n，若 $a_2\ \ a_1\ \ 0, S_{20}\ \ 100$，则 $a_{10}\ a_{11}$　（　）

A．有最小值25　　B．有最大值25　　C．有最小值50　　D．有最大值50

7．已知三棱锥 $A\ \ BCD$ 中，AB 平面 BCD，$AB\ \ 4$，$BC\ \ 3$，$CD\ \ 5$，$BD\ \ 7$，则该三棱锥外接球的表面积为（　）

A．$\frac{196\pi}{3}$　　B．$\frac{244\pi}{3}$　　C．$\frac{196\pi}{5}$　　D．$\frac{244\pi}{5}$

8．在平面直角坐标系 xOy 中，已知圆 $C:x\ \ 1^2\ \ y^2\ \ 4$，若直线 $l:x\ \ y\ \ m\ \ 0$ 上有且只有一个点 P 满足：过点 P 作圆 C 的两条切线 PM,PN，切点分别为 M,N，且使得四边形 $PMCN$ 为正方形，则正实数 m 的值为（　）

A．1　　B．$2\sqrt{2}$　　C．3　　D．7

二、选择题：本题共3小题，每小题6分，共18分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得6分，部分选对的得部分分，有选错的得0分．

9．下列说法正确的是（　）

A．某校高一年级共有男女学生 500 人，现按性别采用分层抽样的方法抽取容量为 50 人的样本，若样本中男生有 30 人，则该校高一年级女生人数是 200

B．数据 1，3， 4，5，7，9，11，16 的第 75 百分位数为 10

C．线性回归方程中，若线性相关系数 r 越大，则两个变量的线性相关性越强

D．根据分类变量 x 与 y 的成对样本数据，计算得到 ^{2} 3.937，根据小概率值 0.05的独立性检验 $x_{0.05}$ 3.841，可判断 x 与 y 有关联，此推断犯错误的概率不大于 0.05

10．瑞士数学家 JakobBernoulli于 17 世纪提出如下不等式： x 1，有

$$\begin{matrix} 1 \quad x^{r} \quad 1 \quad rx, r \quad 1 \\ 1 \quad x^{r} \quad 1 \quad rx, 0 \quad r \quad 1 \end{matrix}$$

，请运用以上知识解决如下问题：若 0 a 1，0 b 1，a^{1} b，则以下不等式正确的是（　）

A．a_{a} b_{b} 1　　　　B．a_{b} b_{a} 1

C．a_{a} b_{b} a_{b} b_{a}　　　　D．a_{a} b_{b} a_{b} b_{a}

11．若定义在R 上的连续函数 f x 满足对任意的实数 a,b 都有 f a b f a f b 且 f 1 2，则下列判断正确的有（　）

A．函数 f x 的图象关于原点对称

B． f x 在定义域上单调递增

C．当 x 0, 时， f x 1

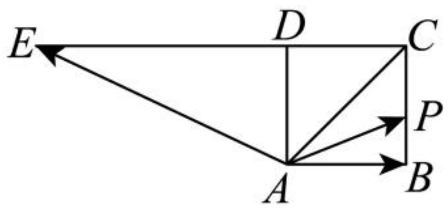
D．$\dfrac{f\ 2}{f\ 1}\ \dfrac{f\ 4}{f\ 3}\ \dfrac{f\ 6}{f\ 5}\ \cdots\ \dfrac{f\ 2022}{f\ 2021}\ \dfrac{f\ 2024}{f\ 2023}\ \ 2024$

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分．

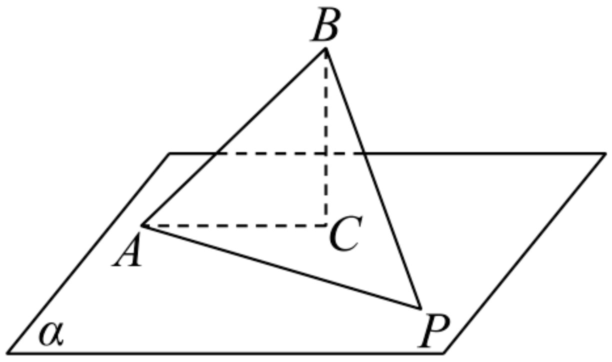
12．根据国家“乡村振兴战略”提出的“推动城乡义务教育一体化发展，高度重视农村义务教育”，某师范大学 4 名毕业生主动申请到某贫困山区的乡村小学工作，若将这 4 名毕业生分配到该山区的 3 所乡村小学，每所学校至少分配 1 人，则不同分配方案的种数为_______．

13．如图，四边形 ABCD 是边长为 1 的正方形，延长 CD 至 E，使得 DE ＝2CD ．动点 P 从点 A 出发，沿正方形的边按逆时针方向运动一周回到 A 点，AP　　AB　　AE，则　　的

取值范围为＿＿＿＿＿＿＿＿＿．



14．如图所示，直角三角形ABC 所在平面垂直于平面 ，一条直角边AC 在平面 内，另一条直角边BC 长为$\frac{\sqrt{3}}{3}$且 BAC $\frac{\pi}{6}$，若平面 上存在点P，使得 ABP 的面积为$\frac{\sqrt{3}}{3}$，则线段CP 长度的最小值为＿＿＿＿．



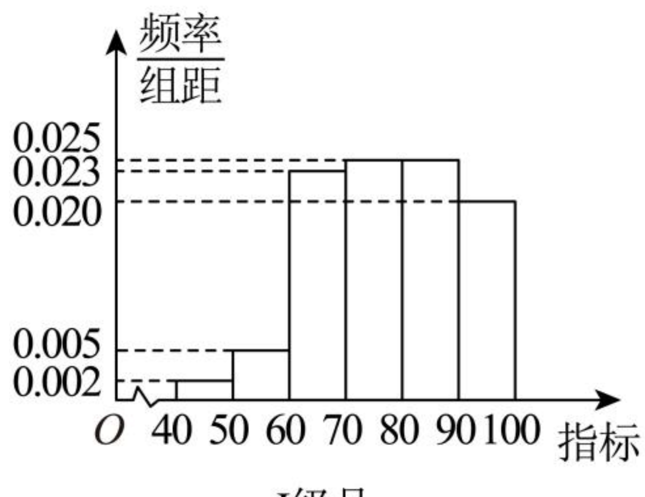
四、解答题：本题共5小题，第15小题13分，第16、17小题15分，第18、19小题17分，共77分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

15．在 ABC 中，角A，B，C 所对应的边分别为a，b，c，已知$\tan C\ \ \sqrt{3}\ \ \tan B\ \ \sqrt{3}\tan C\ \ 1$，

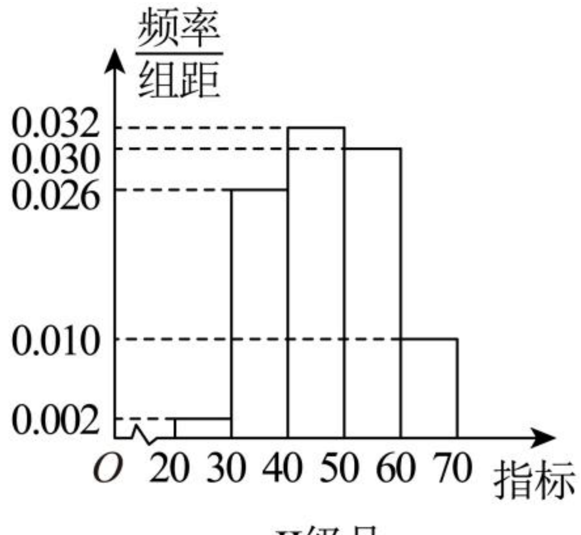
(1)求角A．

(2)若a $\sqrt{3}$， ABC 所在平面内有一点D 满足 BDC $\frac{2}{3}\pi$，且BC 平分 ABD，求 ACD 面积的取值范围．

16．已知某科技公司的某型号芯片的各项指标经过全面检测后，分为Ⅰ级和Ⅱ级，两种品级芯片的某项指标的频率分布直方图如图所示：



I级品



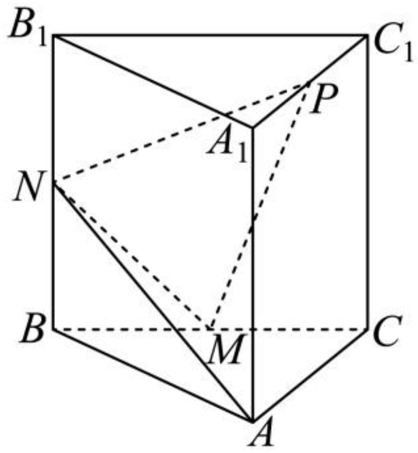
II级品

若只利用该指标制定一个标准，需要确定临界值 K，按规定须将该指标大于 K 的产品应用于 A 型手机，小于或等于 K 的产品应用于 B 型手机．若将Ⅰ级品中该指标小于或等于临界值 K 的芯片错误应用于 A 型手机会导致芯片生产商每部手机损失 800 元；若将Ⅱ级品中该指标大于临界值 K 的芯片错误应用于 B 型手机会导致芯片生产商每部手机损失 400 元；假设数据在组内均匀分布，以事件发生的频率作为相应事件发生的概率．

(1)设临界值 $K \quad 60$ 时，将 1 个Ⅰ级品芯片和 1 个Ⅱ级品芯片分别应用于 A 型手机和 B 型手机．求两部手机有损失的概率（计算结果用小数表示）；

(2)设 $K \quad x$ 且 $x \quad 50,55$，现有足够多的芯片Ⅰ级品、Ⅱ级品，分别应用于 A 型手机、B 型手机各 1 万部的生产，试估计芯片生产商损失费用的最小值．

17．已知直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中，$AB \quad AC \quad AA_1$，M，N 分别为 BC 和 BB_1 的中点，P 为棱 A_1C_1 上的动点，$AN \quad A_1C_1$．



(1)证明：平面ANP 平面A_1MP；

(2)设A_1P A_1C_1，是否存在实数 ，使得平面AA_1B_1B与平面PMN 所成的角的余弦值为$\frac{\sqrt{6}}{3}$？

18．已知函数$f_n\ x\ \ x^n\ \ x^{n\ 1}\ \ \ x\ 1\ n\ \ N$ ．

(1)判断并证明$f_n\ x$ 的零点个数

(2)记$f_n\ x$ 在$(0,\ \ )$上的零点为x_n，求证;

（i） x_n 是一个递减数列

（ii） $\frac{n\ 1}{2}\ \ x_1\ \ x_2\ \ \ \ x_n\ \ \frac{n}{2}\ \ 1$．

19．已知双曲线 Γ:$\frac{x^2}{a^2}$ $\frac{y^2}{b^2}$ $1(a\quad 0,b\quad 0)$ 的左焦点为 F_1 $\sqrt{3},0$，点 M $2,\sqrt{6}$ 在双曲线上，直线 l 与双曲线 Γ 交于 A,B 两点.

(1)若 l 经过点 $2,0$，且 AOB 90，求 $|AB|$；

(2)若 l 经过点 F_1，且 A,B 两点在双曲线 Γ 的左支上，则在 x 轴上是否存在定点 Q，使得 QA QB 为定值.若存在，请求出 QAB 面积的最小值；若不存在，请说明理由.

参考答案：

1．D

【分析】利用不等式性质、交集、并集、补集定义求解.

【详解】由题意，$A \quad B \quad 1,1, A \quad B \quad 2,2$ ，所以$ð_{A \ B} \ A \quad B \quad 2, \ 1 \quad 1,2$.

故选：D.

2．A

【分析】先利用复数乘法运算化简复数，再根据复数的几何意义确定对应点所在的象限.

【详解】因为$z \quad 2i \ 1 \ i \quad 2i \ 2i^2 \quad 2 \ 2i$,

所以该复数在复平面内对应的点为 $2,2$ ，在第一象限.

故选：A

3．D

【分析】根据题意，由百分位数的计算公式，代入计算，即可得到结果.

【详解】将数据从小到大排序可得$10,12,14,14,15,16,20,24$，共 8 个样本数据，

则上四分位数即第75百分位数为$8 \quad 0.75 \quad 6$，即为$\dfrac{16 \quad 20}{2} \quad 18$.

故选：D

4．A

【分析】使用诱导公式和二倍角公式，结合已知条件即可求解.

【详解】$\sin\dfrac{\pi}{3} \qquad \sin 2 \quad \dfrac{\pi}{6} \quad \cos \dfrac{\pi}{2} \ \dfrac{\pi}{3} \qquad \cos \ 2 \quad \dfrac{\pi}{6} \ \dfrac{\pi}{2}$

$\cos \quad \dfrac{\pi}{6} \quad \cos 2 \quad \dfrac{\pi}{3}$

$\cos \quad \dfrac{\pi}{6} \quad 2\cos^2 \quad \dfrac{\pi}{6} \quad 1$

$\dfrac{1}{3} \quad 2 \ \dfrac{1}{3}^2 \ 1 \quad \dfrac{10}{9}$.

故选：A.

5．B

【分析】先出求$a \quad 2b \quad (1,1 \ 2t)$，再根据$a \quad (a \quad 2b)$即可得出$t$的值，最后求$b$的模.

【详解】由题意可知，因为$a \quad (1,1)$, $b \quad (0,t)$，

所以$a\quad 2b\quad (1,1)\ 2(0,t)\quad (1,1\ 2t)$，

又因为$a\quad (a\quad 2b)$，所以$a\ (a\quad 2b)\quad 0$，

即$1\ 1\ 1\quad 1\ 2t\quad 0$，解得$t\quad 1$.

所以$|b|\ 1$.

故选：B.

6．B

【分析】由$S_{20}\quad 100$，利用等差数列的性质推出$a_{10}\quad a_{11}\quad 10$，再利用基本不等式计算即得.

【详解】由$S_{20}\quad \frac{20(a_{1}\quad a_{20})}{2}\quad 10(a_{10}\quad a_{11})\quad 100$可得$a_{10}\quad a_{11}\quad 10$，

因$a_{2}\quad a_{1}\quad 0,$则等差数列a_{n}的公差$d\geqslant 0$，故$a_{10}\quad 0, a_{11}\quad 0$，

则$a_{10}a_{11}\quad (\frac{a_{10}\quad a_{11}}{2})^{2}\quad 25$，当且仅当$a_{10}\quad a_{11}\quad 5$时取等号，

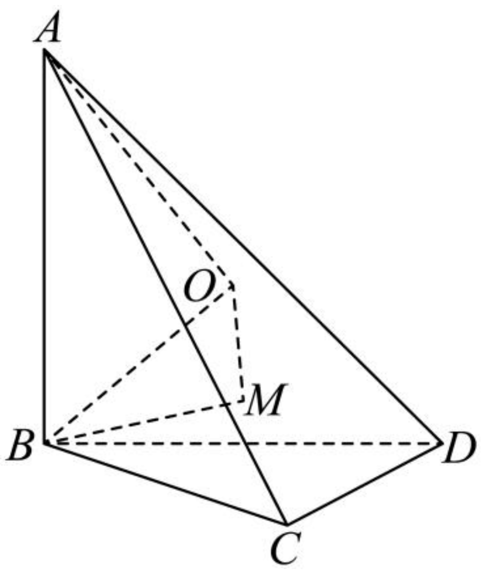
即当$a_{10}\quad a_{11}\quad 5$时，$a_{10}a_{11}$取得最大值25.

故选：B.

7．B

【分析】由题意画出图形，利用正弦定理求出△BCD 的外接圆的半径，再由勾股定理求出三棱锥外接球的半径，代入球的表面积公式得答案.

【详解】如图，



设△BCD 的外心为M，过M 作底面的垂线MO，使$MO\quad \frac{1}{2}BA$，则O 为三棱锥的外接球的球心，

在△BCD 中，由$BC\quad 3$，$CD\quad 5$，$BD\quad 7$，得$\cos\ BCD\quad \frac{3^{2}\quad 5^{2}\quad 7^{2}}{2\quad 3\quad 5}\quad \frac{1}{2}$，

故 $\sin\angle BCD=\frac{\sqrt{3}}{2}$，设△BCD 的外接圆的半径为 r，

则 $r=\frac{7}{2\times\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{7}{\sqrt{3}}$，$OM=2$，

$OB^2=(\frac{7}{\sqrt{3}})^2+2^2=\frac{61}{3}=R^2$.

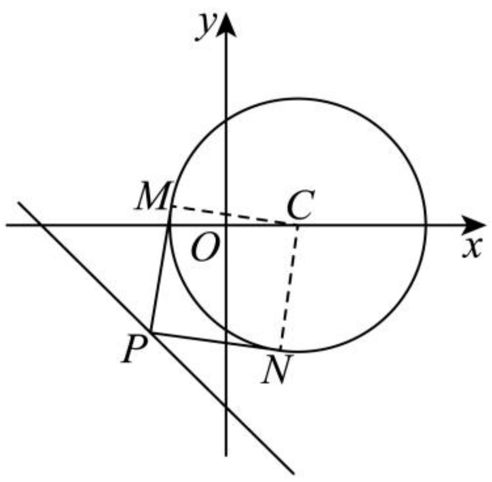
三棱锥外接球的表面积为 $4\pi R^2=4\pi\times\frac{61}{3}=\frac{244}{3}\pi$.

故选：B

8．C

【分析】根据直线与圆相切得圆心与点 P 的距离，即结合正方形的性质可得符合的点 P 的位置，从而可得结论.

【详解】由 $(x-1)^2+y^2=4$ 可知圆心 $C(1,0)$，半径为 2，



因为四边形 PMCN 为正方形，且边长为圆 C 的半径 2，所以 $PC=2\sqrt{2}$，

所以直线 $l:x+y+m=0$ 上有且只有一个点 P，使得 $PC=2\sqrt{2}$，即 $PC\perp l$，

所以圆心 C 到直线 l 的距离为 $2\sqrt{2}$，

所以 $\frac{|1+0+m|}{\sqrt{1+1}}=2\sqrt{2}$，解得 $m=3$ 或 $m=-5$，又 $m>0$，所以 $m=3$．

故选：C.

9．ABD

【分析】利用分层抽样计算判断 A；求出第 75 百分位数判断 B；利用线性相关系数的意义判断 C；利用独立性检验的思想判断 D.

【详解】对于 A，该校高一年级女生人数是 $\frac{50-30}{\frac{50}{500}}=200$，A 正确；

对于 B，由 $8\times75\%=6$，得第 75 百分位数为 $\frac{9+11}{2}=10$，B 正确；

对于 C，线性回归方程中，线性相关系数 r 绝对值越大，两个变量的线性相关性越强，C 错

误；

对于D，由 ^{2} 3.937 3.841 $x_{0.05}$，可判断x与y有关联，此推断犯错误的概率不大于0.05，D 正确.

故选：ABD

10．ABC

【分析】不妨设a b，根据选项C 的结构构造函数f x x_a x_b，利用导数研究其单调性，结合题目不等式结论即可判定正确，再根据题目不等式结论证明得a_b $\frac{a}{a\ \ b}$及b_a $\frac{b}{a\ \ b}$，相加即可判断B 正确，结合C 判断A 正确，得解.

【详解】不妨设a b，先证明C：证明f x x_a x_b在a x b上单调递减即可.

f x $ax_{a\ 1}$ $bx_{b\ 1}$ $ax_{a\ 1}$ 1 $\frac{b}{a}x_{b\ a}$，即要证明1 $\frac{b}{a}x_{b\ a}\left\langle 0 \quad x_{b\ a}\right\rangle\frac{a}{b}$，

即要证明$a_{b\ a}$ $\frac{a}{b}$ b $a_{a\ 1b}$ $b^{\frac{1}{1\ a\ b}}$ a，

因为$b^{\frac{1}{1\ a\ b}}$ b 1 $1^{\frac{1}{1\ a\ b}}$ $\frac{1}{1\ \ a\ \ b}$ b 1 1 $\frac{a}{1\ \ a\ \ b}$ a，得证，

所以a_a a_b b_a b_b，即a_a b_b a_b b_a，故选项C 正确，D 错误；

再证明B：$\frac{1}{a}^{b}$ $1+\frac{1\ \ a}{a}^{b}$ 1 $\frac{b\ 1\ \ a}{a}$ $\frac{a\ \ b\ \ ab}{a}$ $\frac{a\ \ b}{a}$，因此a_b $\frac{a}{a\ \ b}$，

同理b_a $\frac{b}{a\ \ b}$，故a_b b_a $\frac{a}{a\ \ b}$ $\frac{b}{a\ \ b}$ 1，且a_a b_b a_b b_a 1，所以AB 正确.

故选：ABC

【点睛】方法点睛：利用导数比较大小的基本步骤

（1）作差或变形；

（2）构造新的函数h x；

（3）利用导数研究h x 的单调性或最值；

（4）根据单调性及最值，得到所证不等式.

11．BCD

【分析】直接证明f x 2^x，然后逐个判断选项即可.

【详解】由2 f 1 f x f 1 x 知f x 0恒成立，再由