十年（2014－2023）年高考真题分项汇编—平面向量

目录

题型一：平面向量的概念及线性运算.....1
题型二：平面向量的基本定理.....3
题型三：平面向量的坐标运算.....9
题型四：平面向量中的平行与垂直.....13
题型五：平面向量的数量积与夹角问题.....14
题型六：平面向量的模长问题.....33
题型七：平面向量的综合应用.....38

题型一：平面向量的概念及线性运算

一、选择题

1．(2021 年高考浙江卷·第 3 题)已知非零向量$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$，则“$\vec{a}\cdot\vec{c}=\vec{b}\cdot\vec{c}$”是“$\vec{a}=\vec{b}$”的 （　　）

A．充分不必要条件　　B．必要不充分条件

C．充分必要条件　　D．既不充分又不必要条件

【答案】B

解析:若$\vec{a}\cdot\vec{c}=\vec{b}\cdot\vec{c}$，则$\left(\vec{a}-\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=0$，推不出$\vec{a}=\vec{b}$；若$\vec{a}=\vec{b}$，则$\vec{a}\cdot\vec{c}=\vec{b}\cdot\vec{c}$必成立，故“$\vec{a}\cdot\vec{c}=\vec{b}\cdot\vec{c}$”是“$\vec{a}=\vec{b}$”的必要不充分条件,故选 B.

2．(2020 年新高考全国卷II数学(海南)·第 3 题)在$\triangle ABC$中，D是AB边上的中点，则$\overrightarrow{CB}=$ （　　）

A．$2\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{CA}$　　B．$\overrightarrow{CD}-2\overrightarrow{CA}$　　C．$2\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{CA}$　　D．$\overrightarrow{CD}+2\overrightarrow{CA}$

【答案】C

解析：$\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CA}+2\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{CA}+2\left(\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{CA}\right)=2\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{CA}$

3．(2022 新高考全国 I 卷·第 3 题)在$\triangle ABC$中，点D在边AB上，$BD=2DA$．记$\overrightarrow{CA}=\vec{m},\overrightarrow{CD}=\vec{n}$，则$\overrightarrow{CB}=$ （　　）

A．$3\vec{m}-2\vec{n}$　　B．$-2\vec{m}+3\vec{n}$　　C．$3\vec{m}+2\vec{n}$　　D．$2\vec{m}+3\vec{n}$

【答案】B

解析：因为点D在边AB上，$BD=2DA$，所以$\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{DA}$，即$\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{CB}=2\left(\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CD}\right)$，

所以$\overrightarrow{CB}=3\overrightarrow{CD}-2\overrightarrow{CA}=3\vec{n}-2\vec{m}=-2\vec{m}+3\vec{n}$．　　故选：B.

4．(2019·上海·第 13 题)已知直线方程 $2x-y+c=0$ 的一个方向向量 $\vec{d}$ 可以是 （　　）

A．$(2,-1)$　　B．　　$(2,1)$ C．$(-1,2)$　　D．$(1,2)$

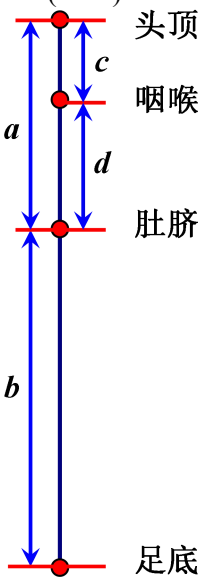
【答案】D

【解析】依题意：$(2,-1)$ 为直线的一个法向量，∴ 方向向量为 $(1,2)$，选 D.

【点评】本题主要考查直线的方向量.

5．(2019·全国I·理·第 4 题)古希腊时期，人们认为最美人体的头顶至肚脐的长度与肚脐至足底的长度之比为 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$（$\frac{\sqrt{5}-1}{2}\approx 0.618$，称为黄金分割比例），著名的“断臂维纳斯”便是如此．此外，最美人体的头顶至咽喉的长度与咽喉至肚脐的长度之比也是 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$．若某人满足上述两个黄金分割比例，且腿长为 105cm，头顶至脖子下端的长度为 26cm，则其身高可能是 （　　）

A．165cm　　*B*．175cm　　*C*．185cm　　*D*．190cm



【答案】

答案：B

解析：如图，$\frac{c}{d}=\frac{a}{b}=0.618,\ \therefore a=0.618b, c=0.618d$，

$c<26$，则 $d=\frac{c}{0.618}<42.07$，$a=c+d<68.07$，$b=\frac{a}{0.618}<110.15$，

所以身高 $h=a+b<178.22$，

又 $b>105$，所以 $a=0.618b>64.89$，身高 $h=a+b>64.89+105=169.89$，

故 $h\in(169.89,\ 178.22)$，故选 B.

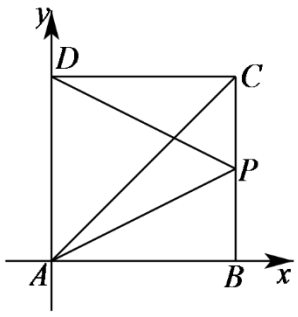
二、填空题

1.(2020 北京高考·第 13 题)已知正方形 $ABCD$ 的边长为 2，点 P 满足 $\overrightarrow{AP}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$，则 $|\overrightarrow{PD}|=$_____；

$\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PD}=$_____.

【答案】(1)．　$\sqrt{5}$　　(2)．　-1

【解析】以点 A 为坐标原点，AB、AD 所在直线分别为 x、y 轴建立如下图所示的平面直角坐标系，



则点 $A(0,0)$、$B(2,0)$、$C(2,2)$、$D(0,2)$，$\overrightarrow{AP}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)=\frac{1}{2}(2,0)+\frac{1}{2}(2,2)=(2,1)$，

则点 $P(2,1)$，$\therefore \overrightarrow{PD}=(-2,1)$，$\overrightarrow{PB}=(0,-1)$，

因此，$\left|\overrightarrow{PD}\right|=\sqrt{(-2)^2+1^2}=\sqrt{5}$，$\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PD}=0\times(-2)+1\times(-1)=-1$．故答案为：$\sqrt{5}$；$-1$．

2.(2014 高考数学北京理科·第 10 题)已知向量 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 满足$|\vec{a}|=1$，$\vec{b}=(2,1)$，且 $\lambda\vec{a}+\vec{b}=0(\lambda\in R)$，则$|\lambda|$ = _____.

【答案】$\sqrt{5}$

解析：$\because \lambda\vec{a}+\vec{b}=0$，$\therefore \lambda\vec{a}=-\vec{b}$，$\therefore |\lambda|=\dfrac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}=\sqrt{5}$

3．(2015 高考数学新课标 2 理科·第 13 题)设向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 不平行，向量 $\lambda\vec{a}+\vec{b}$ 与 $\vec{a}+2\vec{b}$ 平行，则实数 $\lambda=$_____.

【答案】$\dfrac{1}{2}$

解析：因为向量 $\lambda\vec{a}+\vec{b}$ 与 $\vec{a}+2\vec{b}$ 平行，所以 $\lambda\vec{a}+\vec{b}=k(\vec{a}+2\vec{b})$，则 $\begin{cases}\lambda=k,\\1=2k,\end{cases}$ 所以 $\lambda=\dfrac{1}{2}$.

题型二：平面向量的基本定理

一、选择题

1．(2018 年高考数学课标卷I(理)·第 6 题)在 ΔABC 中，AD 为 BC 边上的中线，E 为 AD 的中点，则 $\overrightarrow{EB}=$ (　　)

A．$\dfrac{3}{4}\overrightarrow{AB}-\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AC}$　　B．$\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AB}-\dfrac{3}{4}\overrightarrow{AC}$　　C．$\dfrac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AC}$　　D．$\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\dfrac{3}{4}\overrightarrow{AC}$

【答案】A

解析：在 $\triangle ABC$ 中，AD 为 BC 边上的中线，E 为 AD 的中点，$\overrightarrow{EB}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}-\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)=\dfrac{3}{4}\overrightarrow{AB}-\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AC}$，故选 A.

2．(2014 高考数学福建理科·第 8 题)在下列向量组中，可以把向量 $\vec{a}=(3,2)$ 表示出来的是　　(　　)

A．$\vec{e}_1=(0,0),\vec{e}_2=(1,2)$　　B．$\vec{e}_1=(-1,2),\vec{e}_2=(5,-2)$

C．$\vec{e}_1=(3,5),\vec{e}_2=(6,10)$　　D．$\vec{e}_1=(2,-3),\vec{e}_2=(-2,3)$

【答案】B

解析：根据 $\vec{a}=\lambda\vec{e_1}+\mu\vec{e_2}$，

选项 A：$(3,2)=\lambda(0,0)+\mu(1,2)$，则 $3=\mu$，$2=2\mu$，无解，故选项 A 不能；

选项 B：$(3,2)=\lambda(-1,2)+\mu(5,-2)$，则 $3=-\lambda+5\mu$，$2=2\lambda-2\mu$，解得，$\lambda=2$，$\mu=1$，故选项 B 能.

选项 C：$(3,2)=\lambda(3,5)+\mu(6,10)$，则 $3=3\lambda+6\mu$，$2=5\lambda+10\mu$，无解，故选项 C 不能.

选项 D：$(3,2)=\lambda(2,-3)+\mu(-2,3)$，则 $3=2\lambda-2\mu$，$2=-3\lambda+3\mu$，无解，故选项 D 不能．故选：B.

3．(2015 高考数学新课标 1 理科·第 7 题)设 D 为ΔABC 所在平面内一点 $\overrightarrow{BC}=3\overrightarrow{CD}$，则 （　　）

A．$\overrightarrow{AD}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{4}{3}\overrightarrow{AC}$　　B．$\overrightarrow{AD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}-\frac{4}{3}\overrightarrow{AC}$

C．$\overrightarrow{AD}=\frac{4}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$　　D．$\overrightarrow{AD}=\frac{4}{3}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

【答案】A

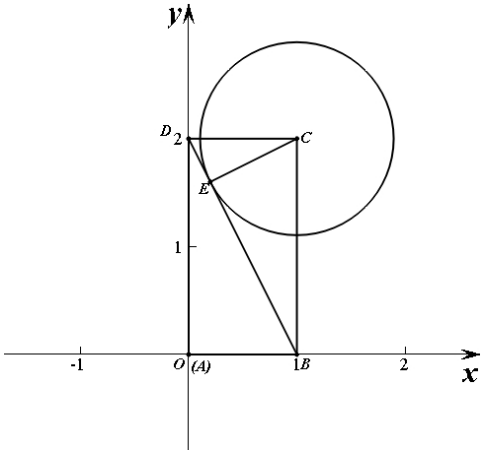
解析：由题知 $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}+\frac{1}{3}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})==-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{4}{3}\overrightarrow{AC}$，故选 A.

4．(2017 年高考数学课标III卷理科·第 12 题)在矩形 $ABCD$ 中，$AB=1$，$AD=2$，动点 P 在以点 C 为圆心且与 BD 相切的圆上，若 $\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AD}$，则 $\lambda+\mu$ 的最大值为 （　　）

A．3　　B．$2\sqrt{2}$　　C．$\sqrt{5}$　　D．2

【答案】A

【解析】法一：以 A 为坐标原点，AB 所在直线为 x 轴，AD 所在直线为 y 轴建立平面直角坐标系，如下图



则 $A(0,0)$，$B(1,0)$，$D(0,2)$，$C(1,2)$，连结 BD，过点 C 作 $CE\perp BD$ 于点 E

在 $Rt\Delta BDC$ 中，有 $BD=\sqrt{AB^2+AD^2}=\sqrt{5}$

$S_{\triangle ACD}=\frac{1}{2}\times BC\times CD=\frac{1}{2}\times BD\times CE$ 即 $\frac{1}{2}\times1\times2=\frac{1}{2}\times\sqrt{5}\times CE\Rightarrow CE=\frac{2\sqrt{5}}{5}$

所以圆 C 的方程为 $(x-1)^2+(y-2)^2=\frac{4}{5}$

可设 $P\left(1+\frac{2\sqrt{5}}{5}\cos\theta,2+\frac{2\sqrt{5}}{5}\sin\theta\right)$

由 $\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AD}$ 可得 $\left(1+\frac{2\sqrt{5}}{5}\cos\theta,2+\frac{2\sqrt{5}}{5}\sin\theta\right)=(\lambda,2\mu)$

所以 $\begin{cases}\lambda=1+\dfrac{2\sqrt{5}}{5}\cos\theta\\ \mu=1+\dfrac{\sqrt{5}}{5}\sin\theta\end{cases}$，所以 $\lambda+\mu=2+\dfrac{2\sqrt{5}}{5}\cos\theta+\dfrac{\sqrt{5}}{5}\sin\theta=2+\sin(\theta+\varphi)$

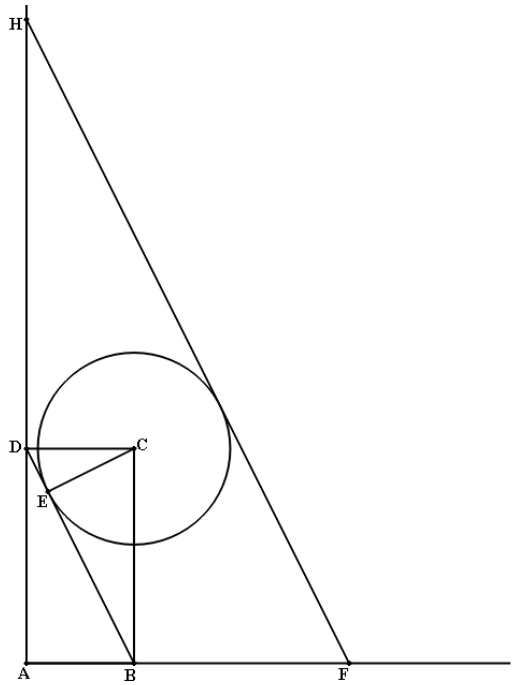
其中 $\sin\varphi=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$，$\cos\varphi=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

所以 $\lambda+\mu$ 的最大值为 3，故选 A.

法二：通过点 C 作 $CE\perp BD$ 于 E 点，由 $AB=1$，$AD=2$，可求得 $BD=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$

又由 $S_{\triangle ACD}=\dfrac{1}{2}\times CD\times CB=\dfrac{1}{2}\times BD\times CE$，可求得 $CE=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

由等和线定理可知，当点 P 的切线(即 FH)与 DB 平行时，$\lambda+\mu$ 取得最大值



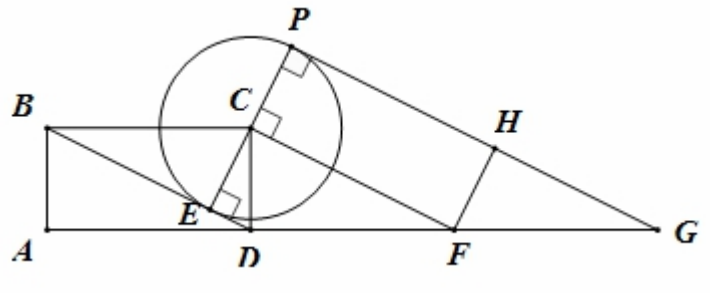
又点 A 到 BD 的距离与点 C 到直线 BD 的距离相等，均为 $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

而此时点 A 到直线 FH 的距离为 $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}+2r=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}+2\times\dfrac{2\sqrt{5}}{5}=\dfrac{6\sqrt{5}}{5}$

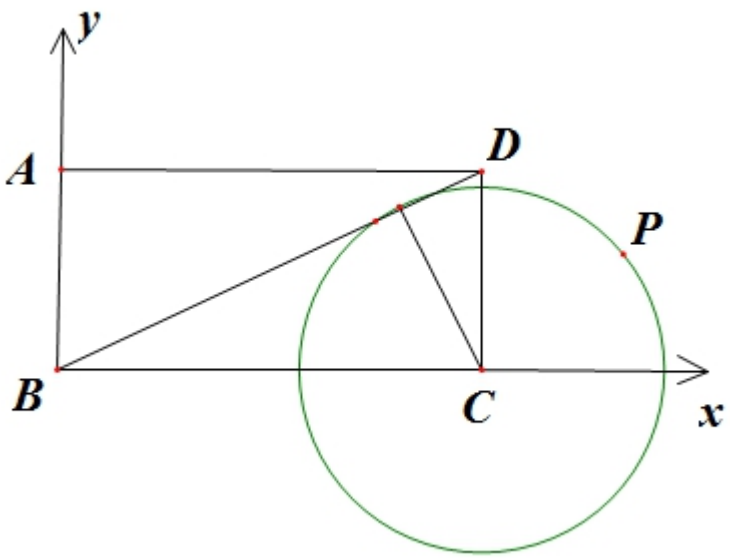
所以 $\dfrac{AF}{AB}=\dfrac{\frac{6\sqrt{5}}{5}}{\frac{2\sqrt{5}}{5}}=3$，所以 $\lambda+\mu$ 的最大值为 3，故选 A.

另一种表达：如图，由“等和线”相关知识知，当 P 点在如图所示位置时，$\lambda+\mu$ 最大，且此时若

$\overrightarrow{AG}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AD}$，则有 $\lambda+\mu=x+y$，由三角形全等可得 $AD=DF=FG=2$，知 $x=3,y=0$，所以选 A.



法三：如图，建立平面直角坐标系



设 $A(0,1),B(0,0),D(2,1),P(x,y)$

根据等面积公式可得圆的半径是 $\frac{2}{\sqrt{5}}$，即圆的方程是 $(x-2)^2+y^2=\frac{4}{5}$

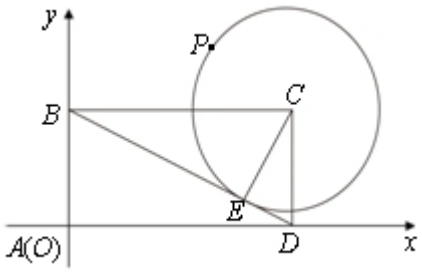
$\overrightarrow{AP}=(x,y-1),\overrightarrow{AB}=(0,-1),\overrightarrow{AD}=(2,0)$，若满足 $\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AD}$

即 $\begin{cases}x=2\mu\\ y-1=-\lambda\end{cases}$，$\mu=\frac{x}{2},\lambda=1-y$，所以 $\lambda+\mu=\frac{x}{2}-y+1$，设 $z=\frac{x}{2}-y+1$，即 $\frac{x}{2}-y+1-z=0$，

点 $P(x,y)$ 在圆 $(x-2)^2+y^2=\frac{4}{5}$ 上，所以圆心到直线的距离 $d\le r$，即 $\frac{|2-z|}{\sqrt{\frac{1}{4}+1}}\le\frac{2}{\sqrt{5}}$，解得 $1\le z\le 3$，

所以 z 的最大值是 3，即 $\lambda+\mu$ 的最大值是 3，故选 A.

法四：由题意，画出右图.



设 BD 与 $\odot C$ 切于点 E，连接 CE．以 A 为原点，AD 为 x 轴正半轴，AB 为 y 轴正半轴建立直角坐标系

则 C 点坐标为 $(2,1)$．$\because |CD|=1$，$|BC|=2$．$\therefore BD=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$．$\because BD$ 切 $\odot C$ 于点 E．

$\therefore CE \perp BD$．$\therefore CE$ 是 $\mathrm{Rt}\triangle BCD$ 中斜边 BD 上的高．$|EC|=\dfrac{2S_{\triangle BCD}}{|BD|}=\dfrac{2\cdot\frac{1}{2}\cdot|BC|\cdot|CD|}{|BD|}=\dfrac{2}{\sqrt{5}}=\dfrac{2}{5}\sqrt{5}$

即 $\odot C$ 的半径为 $\dfrac{2}{5}\sqrt{5}$．$\because P$ 在 $\odot C$ 上．$\therefore P$ 点的轨迹方程为 $(x-2)^2+(y-1)^2=\dfrac{4}{5}$．

设 P 点坐标 (x_0,y_0)，可以设出 P 点坐标满足的参数方程如下：$\begin{cases}x_0=2+\dfrac{2}{5}\sqrt{5}\cos\theta\\ y_0=1+\dfrac{2}{5}\sqrt{5}\sin\theta\end{cases}$

而 $\overrightarrow{AP}=(x_0,y_0)$，$\overrightarrow{AB}=(0,1)$，$\overrightarrow{AD}=(2,0)$．

$\because \overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AD}=\lambda(0,1)+\mu(2,0)=(2\mu,\lambda)$

$\therefore \mu=\dfrac{1}{2}x_0=1+\dfrac{\sqrt{5}}{5}\cos\theta$，$\lambda=y_0=1+\dfrac{2}{5}\sqrt{5}\sin\theta$．

两式相加得：

$$\begin{aligned}\lambda+\mu&=1+\frac{2}{5}\sqrt{5}\sin\theta+1+\frac{\sqrt{5}}{5}\cos\theta\\&=2+\sqrt{(\frac{2\sqrt{5}}{5})^2+(\frac{\sqrt{5}}{5})^2}\sin(\theta+\varphi)\\&=2+\sin(\theta+\varphi)\leqslant 3\end{aligned}$$

（其中 $\sin\varphi=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，$\cos\varphi=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$）

当且仅当 $\theta=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi-\varphi$，$k\in\mathbf{Z}$ 时，$\lambda+\mu$ 取得最大值 3．

二、填空题

1．(2023 年天津卷·第 14 题)在 $\triangle ABC$ 中，$\angle A=60^\circ$，$BC=1$，点 D 为 AB 的中点，点 E 为 CD 的中点，若设 $\overrightarrow{AB}=\vec{a},\overrightarrow{AC}=\vec{b}$，则 $\overrightarrow{AE}$ 可用 $\vec{a},\vec{b}$ 表示为_____；若 $\overrightarrow{BF}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$，则 $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AF}$ 的最大值为_____.

【答案】①. $\frac{1}{4}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$　　②. $\frac{13}{24}$

解析：空 1：因为 E 为 CD 的中点，则 $\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{EC}=\vec{0}$，可得 $\begin{cases}\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{ED}=\overrightarrow{AD}\\ \overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EC}=\overrightarrow{AC}\end{cases}$，

两式相加，可得到 $2\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AC}$，

即 $2\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}\vec{a}+\vec{b}$，则 $\overrightarrow{AE}=\frac{1}{4}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$；

空 2：因为 $\overrightarrow{BF}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$，则 $2\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{FC}=\vec{0}$，可得 $\begin{cases}\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{FC}=\overrightarrow{AC}\\ \overrightarrow{AF}+\overrightarrow{FB}=\overrightarrow{AB}\end{cases}$，

得到 $\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{FC}+2\left(\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{FB}\right)=\overrightarrow{AC}+2\overrightarrow{AB}$，

即 $3\overrightarrow{AF}=2\vec{a}+\vec{b}$，即 $\overrightarrow{AF}=\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}$.

于是 $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AF}=\left(\frac{1}{4}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}\right)\cdot\left(\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}\right)=\frac{1}{12}\left(2\vec{a}^2+5\vec{a}\cdot\vec{b}+2\vec{b}^2\right)$.

记 $AB=x,AC=y$，

则 $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AF}=\frac{1}{12}\left(2\vec{a}^2+5\vec{a}\cdot\vec{b}+2\vec{b}^2\right)=\frac{1}{12}\left(2x^2+5xy\cos 60^\circ+2y^2\right)=\frac{1}{12}\left(2x^2+\frac{5xy}{2}+2y^2\right)$，

在 $\triangle ABC$ 中，根据余弦定理：$BC^2=x^2+y^2-2xy\cos 60^\circ=x^2+y^2-xy=1$，

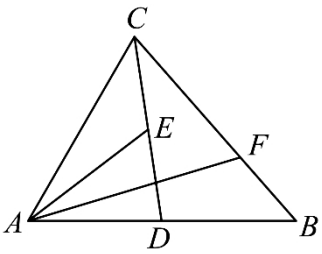
于是 $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AF}=\frac{1}{12}\left(2xy+\frac{5xy}{2}+2\right)=\frac{1}{12}\left(\frac{9xy}{2}+2\right)$，

由 $x^2+y^2-xy=1$ 和基本不等式，$x^2+y^2-xy=1\geq 2xy-xy=xy$，

故 $xy\leq 1$，当且仅当 $x=y=1$ 取得等号，

则 $x=y=1$ 时，$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AF}$ 有最大值 $\frac{13}{24}$.

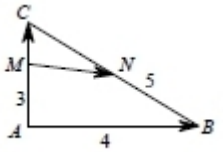
故答案为：$\frac{1}{4}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$；$\frac{13}{24}$.



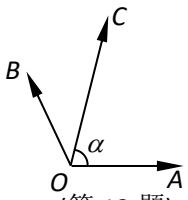
2．(2015 高考数学北京理科·第 13 题)在 $\triangle ABC$ 中，点 M，N 满足 $\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{MC}$，$\overrightarrow{BN}=\overrightarrow{NC}$．若 $\overrightarrow{MN}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$，则 $x=$_____；$y=$_____．

【答案】$\frac{1}{2},-\frac{1}{6}$

解析：特殊化，不妨设 $AC\perp AB, AB=4, AC=3$，利用坐标法，以 A 为原点，AB 为 x 轴，AC 为 y 轴，建立直角坐标系，$A(0,0), M(0,2), C(0,3), B(4,0), N(2,\frac{3}{2})$，$\overrightarrow{MN}=(2,-\frac{1}{2}), \overrightarrow{AB}=(4,0)$，$\overrightarrow{AC}=(0,3)$，则 $(2,-\frac{1}{2})=x(4,0)+y(0,3)$，$4x=2, 3y=-\frac{1}{2}, \therefore x=\frac{1}{2}, y=-\frac{1}{6}$.



3.(2017 年高考数学江苏文理科·第 12 题)如图,在同一个平面内,向量 $\overrightarrow{OA}$,$\overrightarrow{OB}$,$\overrightarrow{OC}$ 的模分别为 1,1,$\sqrt{2}$,$\overrightarrow{OA}$ 与 $\overrightarrow{OC}$ 的夹角为 α,且 $\tan\alpha=7$,$\overrightarrow{OB}$ 与 $\overrightarrow{OC}$ 的夹角为 45°. 若 $\overrightarrow{OC}=m\overrightarrow{OA}+n\overrightarrow{OB}$ $(m,n\in\mathbf{R})$，则 $m+n=$_____.



(第 12 题)

【答案】3

解析:由 $\tan\alpha=7$ 可得 $\sin\alpha=\frac{7\sqrt{2}}{10}$，$\cos\alpha=\frac{\sqrt{2}}{10}$,根据向量的分解,易得 $\begin{cases}n\cos45°+m\cos\alpha=\sqrt{2}\\ n\sin45°-m\sin\alpha=0\end{cases}$,即 $\begin{cases}\frac{\sqrt{2}}{2}n+\frac{\sqrt{2}}{10}m=\sqrt{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2}n-\frac{7\sqrt{2}}{10}m=0\end{cases}$,即 $\begin{cases}5n+m=10\\ 5n-7m=0\end{cases}$,即得 $m=\frac{5}{4}, n=\frac{7}{4}$,所以 $m+n=3$.

题型三：平面向量的坐标运算

一、选择题

1．(2023 年北京卷·第 3 题)已知向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 满足 $\vec{a}+\vec{b}=(2,3), \vec{a}-\vec{b}=(-2,1)$，则 $|\vec{a}|^2-|\vec{b}|^2=$ （　　）

A．-2　　B．-1　　C．0　　D．1

【答案】B

解析：向量$\vec{a},\vec{b}$满足$\vec{a}+\vec{b}=(2,3),\vec{a}-\vec{b}=(-2,1)$，

所以$|\vec{a}|^2-|\vec{b}|^2=(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=2\times(-2)+3\times1=-1$.

故选：B

2．(2023 年新课标全国I卷·第 3 题)已知向量$\vec{a}=(1,1),\vec{b}=(1,-1)$，若$(\vec{a}+\lambda\vec{b})\perp(\vec{a}+\mu\vec{b})$，则(　　)

A．$\lambda+\mu=1$　　B．$\lambda+\mu=-1$

C．$\lambda\mu=1$　　D．$\lambda\mu=-1$

【答案】D

解析：因为$\vec{a}=(1,1),\vec{b}=(1,-1)$，所以$\vec{a}+\lambda\vec{b}=(1+\lambda,1-\lambda)$，$\vec{a}+\mu\vec{b}=(1+\mu,1-\mu)$，

由$(\vec{a}+\lambda\vec{b})\perp(\vec{a}+\mu\vec{b})$可得，$(\vec{a}+\lambda\vec{b})\cdot(\vec{a}+\mu\vec{b})=0$，

即$(1+\lambda)(1+\mu)+(1-\lambda)(1-\mu)=0$，整理得：$\lambda\mu=-1$.

故选：D.

3．(2014 高考数学重庆理科·第 4 题)已知向量$\vec{a}=(k,3),\vec{b}=(1,4),\vec{c}=(2,1)$，且$(2\vec{a}-3\vec{b})\perp\vec{c}$,则实数$k=$(　　)

A．$-\frac{9}{2}$　　B．0　　C．3　　D．$\frac{15}{2}$

【答案】C

解析：$(2\vec{a}-3\vec{b})\perp\vec{c}\Rightarrow(2\vec{a}-3\vec{b})\bullet\vec{c}=0\Rightarrow2\vec{a}\bullet\vec{c}-3\vec{b}\bullet\vec{c}=0\Rightarrow2(2k+3)-3\times6=0\Rightarrow k=3.$

4．(2014 高考数学安徽理科·第 10 题)在平面直角坐标系xOy中，已知向量$\vec{a}$，$\vec{b}$，$|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$，点Q满足$\overrightarrow{OQ}=\sqrt{2}(\vec{a}+\vec{b})$．曲线$C=\{P|\overrightarrow{OP}=\vec{a}\cos\theta+\vec{b}\sin\theta,0\le\theta<2\pi\}$，区域$\Omega=\{P|0<r\le|\overrightarrow{PQ}|\le R,r<R\}$，若$C\cap\Omega$为两段分离的曲线，则(　　)

A．$1<r<R<3$　　B．$1<r<3\le R$

C．$r\le1<R<3$　　D．$1<r<3<R$

【答案】A

解析：因为$|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$，且$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$，设$\vec{a}=(1,0)$，$\vec{b}=(0,1)$，

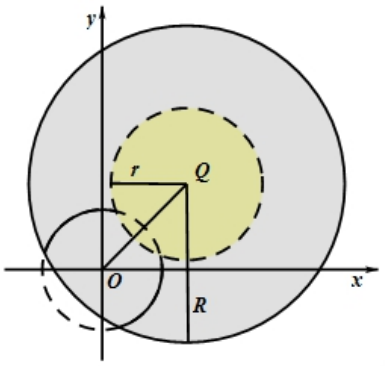
则由$\overrightarrow{OQ}=\sqrt{2}(\vec{a}+\vec{b})$得$Q(\sqrt{2},\sqrt{2})$

曲线C：设$P(x,y)$，则$\overrightarrow{OP}=(1,0)\cos\theta+(0,1)\sin\theta=(\cos\theta,\sin\theta)$，$0\le\theta<2\pi$，则

$\begin{cases} x=\cos\theta, \\ y=\sin\theta \end{cases}(0\le\theta<2\pi)$，表示以 $(0,0)$ 为圆心，1为半径的圆；

区域 Ω ：设 $P(x,y)$，则由 $r\le|\overrightarrow{PQ}|\le R$，则有：$r^2\le(x-\sqrt{2})^2+(y-\sqrt{2})^2\le R^2$，

表示以 $(\sqrt{2},\sqrt{2})$ 为圆心，分别以 r 和 R 为半径的同心圆的圆环形区域(如图)，



若使得 $C\bigcap\Omega$ 是两段分离的曲线，则由图像可知：$1<r<R<3$，故选 A.

5．(2016 高考数学课标III卷理科·第 3 题)已知向量 $\overrightarrow{BA}=(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}),\overrightarrow{BC}=(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2})$,则 $\angle ABC=$ （　　）

A．$30°$　　B．$45°$　　C．$60°$　　D．$120°$

【答案】A

【解析】由题意,得 $\cos\angle ABC=\dfrac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}|\cdot|\overrightarrow{BC}|}=\dfrac{\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{1}{2}}{1\times1}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$,所以 $\angle ABC=30°$,故选 A.

6．(2016 高考数学课标II卷理科·第 3 题)已知向量 $\vec{a}=(1,m),\vec{b}=(3,-2)$，且 $(\vec{a}+\vec{b})\perp\vec{b}$，则 $m=$ （　　）

A．-8　　B．-6　　C．6　　D．8

【答案】D

【解析】由 $(\vec{a}+\vec{b})\perp\vec{b}$ 可得：$(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{b}=0$，所以 $\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2=0$，又 $\vec{a}=(1,m),\vec{b}=(3,-2)$

所以 $3-2m+(3^2+(-2)^2)=0$，所以 $m=8$，故选 D.

二、填空题

1．(2021 年高考全国乙卷理科·第 14 题)已知向量 $\vec{a}=(1,3),\vec{b}=(3,4)$，若 $(\vec{a}-\lambda\vec{b})\perp\vec{b}$，则 $\lambda=$_____.

【答案】$\dfrac{3}{5}$

解析：因为 $\vec{a}-\lambda\vec{b}=(1,3)-\lambda(3,4)=(1-3\lambda,3-4\lambda)$，所以由 $(\vec{a}-\lambda\vec{b})\perp\vec{b}$ 可得，

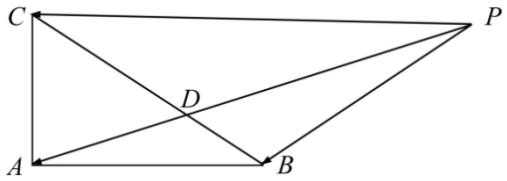
$3(1-3\lambda)+4(3-4\lambda)=0$，解得 $\lambda=\dfrac{3}{5}$.

故答案为：$\dfrac{3}{5}$.

【点睛】本题解题关键是熟记平面向量数量积的坐标表示，设 $\vec{a}=(x_1,y_1),\vec{b}=(x_2,y_2)$，

$\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=0\Leftrightarrow x_1x_2+y_1y_2=0$，注意与平面向量平行的坐标表示区分.

2．(2020 江苏高考·第 13 题)在 ΔABC 中，$AB=4$，$AC=3$，$\angle BAC=90°$，D 在边 BC 上，延长 AD 到 P，使得 $AP=9$，若 $\overrightarrow{PA}=m\overrightarrow{PB}+(\frac{3}{2}-m)\overrightarrow{PC}$（$m$ 为常数），则 CD 的长度是_____.



【答案】$\frac{18}{5}$

【解析】$\because A,D,P$ 三点共线，$\therefore$可设 $\overrightarrow{PA}=\lambda\overrightarrow{PD}(\lambda>0)$，$\therefore\overrightarrow{PA}=m\overrightarrow{PB}+\left(\frac{3}{2}-m\right)\overrightarrow{PC}$，

$\therefore\lambda\overrightarrow{PD}=m\overrightarrow{PB}+\left(\frac{3}{2}-m\right)\overrightarrow{PC}$，即 $\overrightarrow{PD}=\frac{m}{\lambda}\overrightarrow{PB}+\frac{\left(\frac{3}{2}-m\right)}{\lambda}\overrightarrow{PC}$，

若 $m\neq0$ 且 $m\neq\frac{3}{2}$，则 B,D,C 三点共线，$\therefore\frac{m}{\lambda}+\frac{\left(\frac{3}{2}-m\right)}{\lambda}=1$，即 $\lambda=\frac{3}{2}$，

$\because AP=9$，$\therefore AD=3$，$\because AB=4,AC=3,\angle BAC=90°$，$\therefore BC=5$，

设 $CD=x$，$\angle CDA=\theta$，则 $BD=5-x$，$\angle BDA=\pi-\theta$.

$\therefore$根据余弦定理可得 $\cos\theta=\frac{AD^2+CD^2-AC^2}{2AD\cdot CD}=\frac{x}{6}$，$\cos(\pi-\theta)=\frac{AD^2+BD^2-AB^2}{2AD\cdot BD}=\frac{(5-x)^2-7}{6(5-x)}$，

$\because\cos\theta+\cos(\pi-\theta)=0$，$\therefore\frac{x}{6}+\frac{(5-x)^2-7}{6(5-x)}=0$，解得 $x=\frac{18}{5}$，$\therefore CD$ 的长度为 $\frac{18}{5}$.

当 $m=0$ 时，$\overrightarrow{PA}=\frac{3}{2}\overrightarrow{PC}$，$C,D$ 重合，此时 CD 的长度为 0，

当 $m=\frac{3}{2}$ 时，$\overrightarrow{PA}=\frac{3}{2}\overrightarrow{PB}$，$B,D$ 重合，此时 $PA=12$，不合题意，舍去．故答案为：0 或 $\frac{18}{5}$.

3．设向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为 θ，$\vec{a}=(3,3)$，$2\vec{b}-\vec{a}=(-1,1)$，则 $\cos\theta=$_____.

【答案】$\frac{3\sqrt{10}}{10}$

解：设向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为 θ，且 $\vec{a}=(3,3),2\vec{b}-\vec{a}=(-1,1),\therefore\ \vec{b}=(1,2)$，

则 $\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=\frac{9}{3\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}}=\frac{3\sqrt{10}}{10}$。

4．(2015 高考数学江苏文理·第 6 题)已知向量 $a=(2,1)$，$b=(1,-2)$，若 $m\boldsymbol{a}+n\boldsymbol{b}=(9,-8)(m,n\in R)$，则 $m-n$ 的值为_____.

【答案】-3

解析：由题意得：$2m+n=9, m-2n=-8 \Rightarrow m=2, n=5, m-n=-3.$

5．(2016 高考数学课标I卷理科·第 13 题)设向量 $\vec{a}=(m,1)$，$\vec{b}=(1,2)$，且 $|\vec{a}+\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2$，则 $m=$_____.

【答案】$m=-2$ 【解析】由已知得：$\vec{a}+\vec{b}=(m+1,3)$

$\therefore |\vec{a}+\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2 \Leftrightarrow (m+1)^2+3^2=m^2+1^2+1^2+2^2$，解得 $m=-2$.

题型四：平面向量中的平行与垂直

一、选择题

1．(2018 年高考数学北京（理）·第 6 题) 设 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 均为单位向量，则“$|\vec{a}-3\vec{b}|=|3\vec{a}+\vec{b}|$”是“$\vec{a}\perp\vec{b}$ 的 (　　)

A．充分而不必要条件　　B．必要而不充分条件

C．充分必要条件　　D．既不充分也不必要条件

【答案】C

解析：$|\vec{a}-3\vec{b}|=|3\vec{a}+\vec{b}|$ 等号两边分别平方得：$\vec{a}^2-6\vec{a}\cdot\vec{b}+9\vec{b}^2=9\vec{a}^2+6\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2$，因为 $\vec{a}^2=\vec{b}^2=1$，所以 $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$，与 $\vec{a}\perp\vec{b}$ 等价，故选 C.

2．(2016 高考数学山东理科·第 8 题) 已知非零向量 $\vec{m},\vec{n}$ 满足 $4|\vec{m}|=3|\vec{n}|$，$\cos<\vec{m},\vec{n}>=\frac{1}{3}$．若 $\vec{n}\perp(t\vec{m}+\vec{n})$，则实数 t 的值为 (　　)

A．4　　B．-4　　C．$\frac{9}{4}$　　D．$-\frac{9}{4}$

【答案】B

【解析】由 $4|\vec{m}|=3|\vec{n}|$，可设 $|\vec{m}|=3k, |\vec{n}|=4k(k>0)$，又 $\vec{n}\perp(t\vec{m}+\vec{n})$，所以

$\vec{n}\cdot(t\vec{m}+\vec{n})=\vec{n}\cdot t\vec{m}+\vec{n}\cdot\vec{n}=t|\vec{m}|\cdot|\vec{n}|\cos<\vec{m},\vec{n}>+|\vec{n}|^2=t\times3k\times4k\times\frac{1}{3}+(4k)^2=4tk^2+16k^2=0$　所以 $t=-4$，故选 B.

二、填空题

1．(2014 高考数学湖北理科·第 11 题)设向量 $\vec{a}=(3,3)$，$\vec{b}=(1,-1)$，若 $(\vec{a}+\lambda\vec{b})\perp(\vec{a}-\lambda\vec{b})$，则实数 $\lambda=$_____.

【答案】±3

解析：由题意得$(\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\lambda\boldsymbol{b})=0$，即 $\boldsymbol{a}^2-\lambda^2\boldsymbol{b}^2=0$，则 $\boldsymbol{a}^2=\lambda^2\boldsymbol{b}^2$.

$\therefore \lambda^2=\frac{\boldsymbol{a}^2}{\boldsymbol{b}^2}=\frac{(\sqrt{3^2+3^2})^2}{(\sqrt{1^2+(-1)^2})^2}=\frac{18}{2}=9$．$\therefore\lambda=\pm3$.

2．(2018 年高考数学课标III卷(理)·第 13 题)已知向量 $\vec{a}=(1,2)$，$\vec{b}=(2,-2)$，$\vec{c}=(1,\lambda)$，若 $\vec{c}//(2\vec{a}+\vec{b})$，则 $\lambda=$_____.

【答案】$\frac{1}{2}$

解析：依题意可得 $2\vec{a}+\vec{b}=(2,4)+(2,-2)=(4,2)$，又 $\vec{c}=(1,\lambda)$，$\vec{c}//(2\vec{a}+\vec{b})$

所以 $4\times\lambda-2\times1=0$，解得 $\lambda=\frac{1}{2}$.

3.(2021 年高考全国甲卷理科·第 14 题) 已知向量 $\vec{a}=(3,1),\vec{b}=(1,0),\vec{c}=\vec{a}+k\vec{b}$.若 $\vec{a}\perp\vec{c}$，则 $k=$_____.

【答案】$-\frac{10}{3}$.

解析：$\because\vec{a}=(3,1),\vec{b}=(1,0),\therefore\vec{c}=\vec{a}+k\vec{b}=(3+k,1)$,

$\because\vec{a}\perp\vec{c},\therefore\vec{a}\cdot\vec{c}=3(3+k)+1\times1=0$，解得 $k=-\frac{10}{3}$,

故答案为：$-\frac{10}{3}$.

题型五：平面向量的数量积与夹角问题

一、选择题

1．(2020 年高考课标III卷理科·第 6 题) 已知向量 a，b 满足 $|a|=5$，$|b|=6$，$a\cdot b=-6$，则 $\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\rangle=$

(　　)

A．$-\frac{31}{35}$　　B．$-\frac{19}{35}$　　C．$\frac{17}{35}$　　D．$\frac{19}{35}$

【答案】D

解析：$\because|\vec{a}|=5$，$|\vec{b}|=6$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=-6$，$\therefore\vec{a}\cdot(\vec{a}+\vec{b})=|\vec{a}|^2+\vec{a}\cdot\vec{b}=5^2-6=19$.

$|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{(\vec{a}+\vec{b})^2}=\sqrt{\vec{a}^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2}=\sqrt{25-2\times6+36}=7$，

因此，$\cos<\vec{a},\vec{a}+\vec{b}>=\frac{\vec{a}\cdot(\vec{a}+\vec{b})}{|\vec{a}|\cdot|\vec{a}+\vec{b}|}=\frac{19}{5\times7}=\frac{19}{35}$.

故选：D.

【点睛】本题考查平面向量夹角余弦值的计算，同时也考查了平面向量数量积的计算以及向量模的计算，考查计算能力，属于中等题.

2．(2022 年高考全国乙卷数学（理）·第 3 题) 已知向量 $\vec{a},\vec{b}$ 满足 $|\vec{a}|=1,|\vec{b}|=\sqrt{3},|\vec{a}-2\vec{b}|=3$，则 $\vec{a}\cdot\vec{b}=$

(　　)

A．-2　　B．-1　　C．1　　D．2

【答案】C

解析：$\because|\vec{a}-2\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2-4\vec{a}\cdot\vec{b}+4|\vec{b}|^2$，

又$\because|\vec{a}|=1,|\vec{b}|=\sqrt{3},|\vec{a}-2\vec{b}|=3,$

$\therefore 9=1-4\vec{a}\cdot\vec{b}+4\times3=13-4\vec{a}\cdot\vec{b}$，

$\therefore\vec{a}\cdot\vec{b}=1$　故选：C.

3．(2019·全国II·理·第 3 题) 已知 $\overrightarrow{AB}=(2,3)$，$\overrightarrow{AC}=(3,t)$，$|\overrightarrow{BC}|=1$，则 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=$　　(　　)

A．-3　　B．-2　　C．2　　D．3

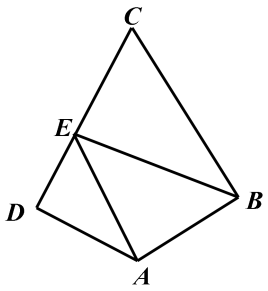
【答案】C

【解析】$\because\overrightarrow{AB}=(2,3)$，$\overrightarrow{AC}=(3,t)$，$\therefore\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=(1,t-3)$，$\therefore|\overrightarrow{BC}|=\sqrt{1^2+(t-3)^2}=1$，解得 $t=3$，

即 $\overrightarrow{BC}=(1,0)$，则 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=(2,3)\cdot(1,0)=2\times1+3\times0=2$.

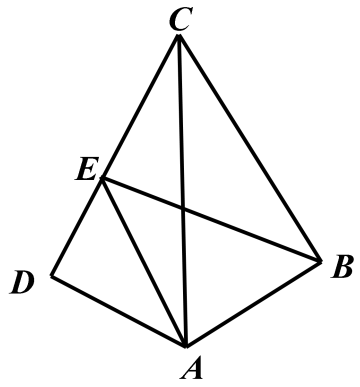
4．(2018 年高考数学天津（理）·第 8 题) 如图，在平面四边形 $ABCD$ 中，$AB\perp BC$，$AD\perp CD$，$\angle BAD=120°$，$AB=AD=1$，若点 E 为边 CD 上的动点，则 $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BE}$ 的最小值为　　(　　)

A．$\frac{21}{16}$　　B．$\frac{3}{2}$　　C．$\frac{25}{16}$　　D．3



【答案】A

【基本解法 1】连接 AC，则易证明 $\triangle ABC\cong\triangle ADC$，所以 $\angle DAC=\angle BAC=60°$



所以 $BC=CD=\sqrt{3}$，设 $DE=\lambda\overrightarrow{DC}\ (0<\lambda<1)$，

则 $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BE}=(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DE})\cdot(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CE})=(\overrightarrow{AD}+\lambda\overrightarrow{DC})\cdot(\overrightarrow{BC}-(1-\lambda)\overrightarrow{DC})$

$=\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}+\lambda\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{BC}-\lambda(1-\lambda)\overrightarrow{DC}^2$

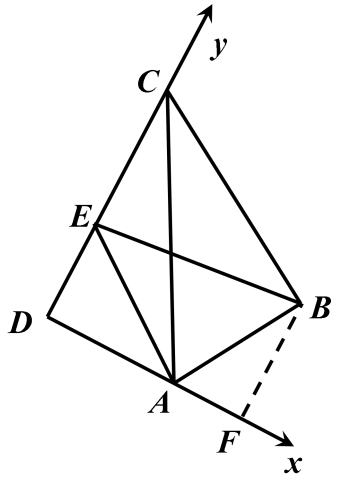
$=\left|\overrightarrow{AD}\right|\cdot\left|\overrightarrow{BC}\right|\cos 30^\circ+\lambda\left|\overrightarrow{DC}\right|\cdot\left|\overrightarrow{BC}\right|\cos 60^\circ-\lambda(1-\lambda)\left|\overrightarrow{DC}\right|^2$

$=3\lambda^2-\frac{3}{2}\lambda+\frac{3}{2}=3\left(\lambda-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{21}{16}$，当$\lambda=\frac{1}{4}$时，$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BE}$取得最小值，最小值为$\frac{21}{16}$.

【基本解法 1】连接AC，则易证明$\triangle ABC\cong\triangle ADC$，所以$\angle DAC=\angle BAC=60^\circ$，

所以$BC=CD=\sqrt{3}$，以D为坐标原点，DA,DC所在方向为x,y轴正方向

建立如图所示平面直角坐标系，过B作$BF\perp x$轴于点F



则$AF=AB\cos 60^\circ=\frac{1}{2}, BF=AB\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$，所以$B\left(\frac{3}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，

设$DE=\lambda\ (0<\lambda<\sqrt{3})$，则$A(1,0), E(0,\lambda)$，

$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BE}=(-1,\lambda)\cdot\left(-\frac{3}{2},\lambda-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\lambda^2-\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda+\frac{3}{2}=\left(\lambda-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2+\frac{21}{16}$，

当$\lambda=\frac{\sqrt{3}}{4}$时，$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BE}$取得最小值，最小值为$\frac{21}{16}$.

5．(2018 年高考数学课标Ⅱ卷（理）·第 4 题) 已知向量$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$满足$|\boldsymbol{a}|=1$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-1$，则$\boldsymbol{a}\cdot(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=$

(　　)

A．4　　B．3　　C．2　　D．0

【答案】B

解析：$\boldsymbol{a}\cdot(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=2|\boldsymbol{a}|^2-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=2+1=3$，故选 B.

6．(2014 高考数学天津理科·第 8 题) 已知菱形$ABCD$的边长为$2,\angle BAD=120^\circ$,点E,F分别在边BC,DC上,$BE=\lambda BC$,$DF=\mu DC$．若$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AF}=1,\overrightarrow{CE}\cdot\overrightarrow{CF}=-\frac{2}{3}$,则$\lambda+\mu=$　　(　　)

A．$\frac{1}{2}$　　B．$\frac{2}{3}$　　C．$\frac{5}{6}$　　D．$\frac{7}{12}$

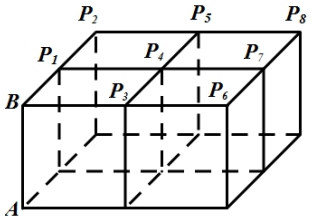
【答案】C

解析:记 $CE=m$,$CF=n$,则 $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AF}=(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CE})\cdot(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CF})=\overrightarrow{AC}^2-\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CE}-\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CF}+\overrightarrow{CE}\cdot\overrightarrow{CF}$

$=4-2m\cdot\cos 60°-2n\cdot\cos 60°-\frac{2}{3}=4-m-n-\frac{2}{3}=4-(2-2\lambda)-(2-2\mu)-\frac{2}{3}=1$,所以 $\lambda+\mu=\frac{5}{6}$. 故选 C.

7. (2014 高考数学上海理科·第 16 题) 如图，四个棱长为1的正方体排成一个正四棱柱， AB 是一条侧棱，$P_i(1,2,\cdots,8)$ 是上底面上其余的八个点，则 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AP_i}(i=1,2,\cdots,8)$ 的不同值的个数为 ( ).

A. 1　　B. 2　　C. 4　　D. 8



【答案】A

解析: $\overrightarrow{AP_i}(i=1,2,\cdots)$ 在 $\overrightarrow{AB}$ 上的投影为 $\left|\overrightarrow{AB}\right|$，所以 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AP_i}(i=1,2,\cdots)=\left|\overrightarrow{AB}\right|^2=1$,值只有一个.

8. (2014 高考数学课标 2 理科·第 3 题) 设向量 a,b 满足|a+b|=$\sqrt{10}$，|a-b|=$\sqrt{6}$，则 a·b= ( )

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 5

【答案】A

解析：因为 $|\vec{a}+\vec{b}|=(\vec{a}+\vec{b})^2=\vec{a}^2+\vec{b}^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}=10$, $|\vec{a}-\vec{b}|=(\vec{a}-\vec{b})^2=\vec{a}^2+\vec{b}^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}=6$,

两式相加得：$\vec{a}^2+\vec{b}^2=8$, 所以 $\vec{a}\cdot\vec{b}=1$，故选 A.

9. (2015 高考数学四川理科·第 7 题) 设四边形 $ABCD$ 为平行四边形，$\left|\overrightarrow{AB}\right|=6$，$\left|\overrightarrow{AD}\right|=4$. 若点 M,N 满足 $\overrightarrow{BM}=3\overrightarrow{MC}$，$\overrightarrow{DN}=2\overrightarrow{NC}$，则 $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{NM}=$ ( )

A. 20　　B. 15　　C. 9　　D. 6

【答案】C

解析：

$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AD},\overrightarrow{NM}=\overrightarrow{CM}-\overrightarrow{CN}=-\frac{1}{4}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$，所以

$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{NM}=\frac{1}{4}(4\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AD})\bullet\frac{1}{12}(4\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{AD})=\frac{1}{48}(16\overrightarrow{AB}^2-9\overrightarrow{AD}^2)=\frac{1}{48}(16\times36-9\times16)=9$，选 C.

10. (2015 高考数学陕西理科·第 7 题) 对任意向量 $\vec{a},\vec{b}$，下列关系式中不恒成立的是 ( )

A. $|\vec{a}\cdot\vec{b}|\le|\vec{a}||\vec{b}|$　　B. $|\vec{a}-\vec{b}|\le||\vec{a}|-|\vec{b}||$

C. $(\vec{a}+\vec{b})^2=|\vec{a}+\vec{b}|^2$　　D. $(\vec{a}+\vec{b})\bullet(\vec{a}-\vec{b})=\vec{a}^2-\vec{b}^2$

【答案】B

解析：因为 $\left|\vec{a}\cdot\vec{b}\right|=|\vec{a}||\vec{b}|\left|\cos\left\langle\vec{a},\vec{b}\right\rangle\right|\le|\vec{a}||\vec{b}|$，所以选项 A 正确；当 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 方向相反时，$\left|\vec{a}-\vec{b}\right|\le\left||\vec{a}|-|\vec{b}|\right|$ 不成立，所以选项 B 错误；向量的平方等于向量的模的平方，所以选项 C 正确；$\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\left(\vec{a}-\vec{b}\right)=\vec{a}^2-\vec{b}^2$，所以选项 D 正确. 故选 B.

11. (2015 高考数学山东理科·第 4 题) 已知菱形 $ABCD$ 的边长为 a，$\angle ABC=60°$,则 $\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{CD}=$ ( )

A．$-\frac{3}{2}a^2$　　B．$-\frac{3}{4}a^2$　　C．$\frac{3}{4}a^2$　　D．$\frac{3}{2}a^2$

【答案】D

解析：因为 $\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{BA}=\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}\right)\cdot\overrightarrow{BA}\ \left(\overrightarrow{BA}\right)^2+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BA}=a^2+a^2\cos 60^\circ=\frac{3}{2}a^2$

故选 D.

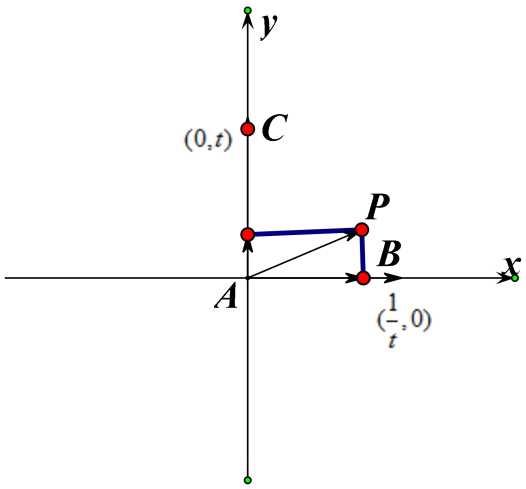
12.(2015 高考数学福建理科·第 9 题) 已知 $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AC},\left|\overrightarrow{AB}\right|=\frac{1}{t},\left|\overrightarrow{AC}\right|=t$，若 P 点是 ΔABC 所在平面内一点，且 $\overrightarrow{AP}=\frac{\overrightarrow{AB}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|}+\frac{4\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AC}\right|}$，则 $\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}$ 的最大值等于　　(　　)

A．13　　B．15　　C．19　　D．21

【答案】A

解析：以 A 为坐标原点，建立平面直角坐标系，如图所示，则 $B(\frac{1}{t},0)$，$C(0,t)$，$\overrightarrow{AP}=(1,\ 0)+4(0,\ 1)=(1,\ 4)$，即 $P(1,\ 4)$，所以 $\overrightarrow{PB}=(\frac{1}{t}-1,\ -4)$，$\overrightarrow{PC}=(-1,\ t-4)$，因此 $\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}$

$=1-\frac{1}{t}-4t+16=17-(\frac{1}{t}+4t)$，因为 $\frac{1}{t}+4t\geq 2\sqrt{\frac{1}{t}\cdot 4t}=4$，所以 $\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}$ 的最大值等于 13，当 $\frac{1}{t}=4t$，即 $t=\frac{1}{2}$ 时取等号.

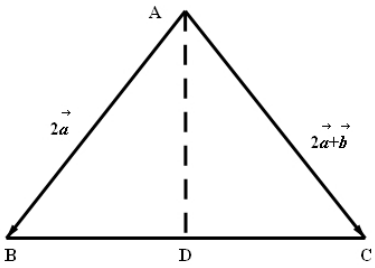


13．(2015 高考数学安徽理科·第 8 题) ΔABC 是边长为 2 的等边三角形，已知向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 满足 $\overrightarrow{AB}=2\vec{a}$，$\overrightarrow{AC}=2\vec{a}+\vec{b}$，则下列结论正确的是　　(　　)

A．$\left|\vec{b}\right|=1$　　B．$\vec{a}\perp\vec{b}$　　C．$\vec{a}\cdot\vec{b}=1$　　D．$\left(4\vec{a}+\vec{b}\right)\perp\overrightarrow{BC}$

【答案】D

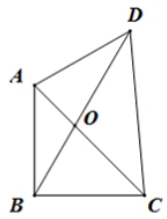
解析：如图，



由题意，$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=(2\vec{a}+\vec{b})-2\vec{a}=\vec{b}$，则$|\vec{b}|=2$，故 A 错误；$|2\vec{a}|=2|\vec{a}|=2$，所以$|\vec{a}|=1$，又$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=2\vec{a}\cdot(2\vec{a}+\vec{b})=4|\vec{a}|^2+2\vec{a}\vec{b}=2\times2\cos60^\circ=2$，所以$\vec{a}\cdot\vec{b}=-1$，故 B,C 错误；设 B,C 中点为 D，则 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AD}$，且 $\overrightarrow{AD}\perp\overrightarrow{BC}$，而$2\overrightarrow{AD}=2\vec{a}+(2\vec{a}+\vec{b})=4\vec{a}+\vec{b}$，所以$\left(4\vec{a}+\vec{b}\right)\perp\overrightarrow{\mathrm{BC}}$，故选 D.

14．(2017 年高考数学浙江文理科·第 10 题) 如图，已知平面四边形 $ABCD$，$AB\perp BC$，$AB=BC=AD=2$，$CD=3$，AC 与 BD 交于点 O．记 $I_1=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$，$I_2=\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}$，$I_3=\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OD}$，则 (　　)

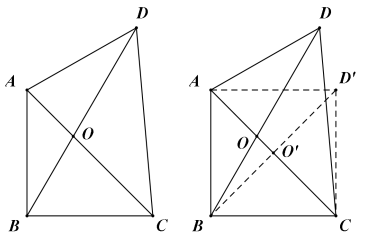
A．$I_1<I_2<I_3$　　B．$I_1<I_3<I_2$　　C．$I_3<I_1<I_2$　　D．$I_2<I_1<I_3$



(第 10 题图)

【答案】C

【解析】法一：



动态研究问题：$D'\to D$，$O'\to O$．

此时有 $\angle AOB>90^\circ$，$\angle BOC<90^\circ$，$\angle COD>90^\circ$，且 $CO>AO$，$DO>BO$．

故 $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}>\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}>\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OD}$．故选 C.

【解析】法二：

如图，取 AC 边中点 K，则 $BK\perp AC$，O 在线段 AK 上，再取 AB，BC 中点 M,N，则 $ON>OM$．所以

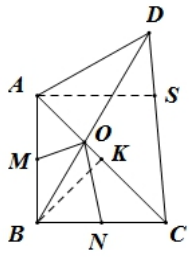
$I_1=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=OM^2-(\frac{AB}{2})^2=OM^2-1$，

$I_2=\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=ON^2-(\frac{BC}{2})^2=ON^2-1$，所以 $I_1<I_2$．

作 $AS\,//\,BC$ 交 CD 于 S，所以 $\angle ACB=\angle CAS=45^\circ$，而 $CD=3>AD=2$，所以，

$\angle DAC>45^\circ=\angle BAC$，所以 $OD>OB$，又 $OC>OA$，$\angle AOB=\angle COD>90^\circ$．

所以 $I_3=\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OD}<I_1=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}<0$，所以 $I_3<I_1<I_2$．故选 C.



法三:余弦定理得 $\cos\angle ABD=\dfrac{BD^2}{4BD}$,$\cos\angle CBD=\dfrac{BD^2-5}{4BD}$,所以 $\cos\angle ABD>\cos\angle CBD$,

所以 $\angle ABD<\angle CBD$,所以 $OA<OC,\angle AOB>90°>\angle BOC$.

又由余弦定理得 $\cos\angle CAD=\dfrac{3\sqrt{2}}{16}<\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\cos\angle BAC$,所以 $\angle CAD>\angle BAC$,

所以 $OB<OD$. 故 $OA\cdot OB<OC\cdot OD$.

而 $I_1=OA\cdot OB\cdot\cos\angle BOA<0$,$I_2=OB\cdot OC\cdot\cos\angle BOC>0$,

$I_3=OC\cdot OD\cdot\cos\angle COD<0$,所以 $I_3<I_1<I_2$. 故选 C.

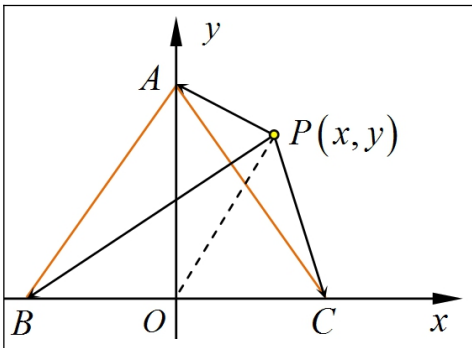
15. (2017 年高考数学课标II卷理科·第 12 题) 已知 ΔABC 是边长为 2 的等边三角形，P 为平面 ABC 内一点，则 $\overrightarrow{PA}\cdot(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC})$ 的最小值是 ( )

A. -2　　B. $-\dfrac{3}{2}$　　C. $-\dfrac{4}{3}$　　D. -1

【答案】B

【命题意图】本题主要考查等边三角形的性质及平面向量的线性运算、数量积，意在考查考生转化与化归思想和运算求解能力

【解析】解法一：建系法



连接 OP，$\overrightarrow{OA}=(0,\sqrt{3})$，$\overrightarrow{OB}=(-1,0)$，$\overrightarrow{OC}=(1,0)$.

$\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PB}=2\overrightarrow{PO}$，$\therefore\overrightarrow{PO}\cdot\overrightarrow{PA}=(-x,-y)\cdot(-x,\sqrt{3}-y)$

$\therefore\overrightarrow{PO}\cdot\overrightarrow{PA}=x^2+y^2-\sqrt{3}y=x^2+\left(y-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2-\dfrac{3}{4}$

$\therefore\overrightarrow{PO}\cdot\overrightarrow{PA}\geq-\dfrac{3}{4}$，$\therefore\ \overrightarrow{PA}\cdot\left(\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PB}\right)=2\overrightarrow{PO}\cdot\overrightarrow{PA}\geq-\dfrac{3}{2}$

$\therefore$最小值为 $-\dfrac{3}{2}$

解法二：均值法

$\because\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PB}=2\overrightarrow{PO}$，$\therefore\ \overrightarrow{PA}\cdot\left(\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PB}\right)=2\overrightarrow{PO}\cdot\overrightarrow{PA}$

由上图可知：$\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{PA}-\overrightarrow{PO}$；两边平方可得 $3=\left(\overrightarrow{PA}\right)^2+\left(\overrightarrow{PO}\right)^2-2\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PO}$

$\because\ \left(\overrightarrow{PA}\right)^2+\left(\overrightarrow{PO}\right)^2\geq-2\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PO}$，$\therefore\ 2\overrightarrow{PO}\cdot\overrightarrow{PA}\geq-\dfrac{3}{2}$

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：https://d.book118.com/437052060115006052