

2023 届福建龙岩市高三下学期高考模拟（最后一模）数学试题

注意事项：

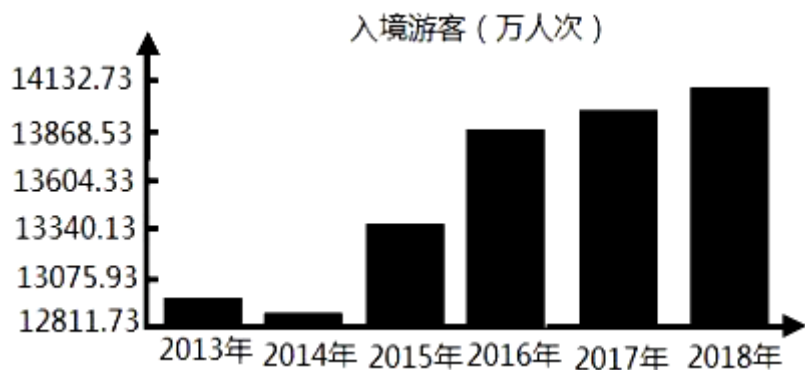
1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号、考场号和座位号填写在试题卷和答题卡上。用 2B 铅笔将试卷类型（B）填涂在答题卡相应位置上。将条形码粘贴在答题卡右上角“条形码粘贴处”。
2. 作答选择题时，选出每小题答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目选项的答案信息点涂黑；如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案。答案不能答在试题卷上。
3. 非选择题必须用黑色字迹的钢笔或签字笔作答，答案必须写在答题卡各题目指定区域内相应位置上；如需改动，先划掉原来的答案，然后再写上新答案；不准使用铅笔和涂改液。不按以上要求作答无效。
4. 考生必须保证答题卡的整洁。考试结束后，请将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知公差不为 0 的等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项的和为 S_n ， $a_1 = 2$ ，且 a_1, a_3, a_9 成等比数列，则 $S_8 =$ （ ）

A. 56 B. 72 C. 88 D. 40

2. 如图是国家统计局公布的年入境游客（单位：万人次）的变化情况，则下列结论错误的是（ ）

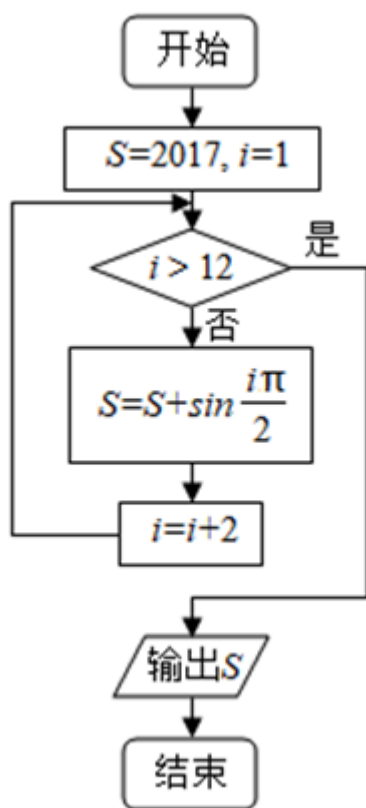


- A. 2014 年我国入境游客万人次最少
- B. 后 4 年我国入境游客万人次呈逐渐增加趋势
- C. 这 6 年我国入境游客万人次的中位数大于 13340 万人次
- D. 前 3 年我国入境游客万人次数据的方差小于后 3 年我国入境游客万人次数据的方差

3. 若复数 z 满足 $(1+3i)z = (1+i)^2$ ，则 $|z| =$ （ ）

A. $\frac{\sqrt{5}}{4}$ B. $\frac{\sqrt{5}}{5}$ C. $\frac{\sqrt{10}}{2}$ D. $\frac{\sqrt{10}}{5}$

4. 运行如图程序，则输出的 S 的值为（ ）



- A. 0 B. 1 C. 2018 D. 2017

5. 一袋中装有5个红球和3个黑球（除颜色外无区别），任取3球，记其中黑球数为 X ，则 $E(X)$ 为（ ）

- A. $\frac{9}{8}$ B. $\frac{7}{8}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{62}{56}$

6. 已知复数 $z = \frac{5i}{2-i} + 5i$ ，则 $|z| =$ （ ）

- A. $\sqrt{5}$ B. $5\sqrt{2}$ C. $3\sqrt{2}$ D. $2\sqrt{5}$

7. 设双曲线 $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = 1$ 的一条渐近线为 $y = -2x$ ，且一个焦点与抛物线 $x^2 = 4y$ 的焦点相同，则此双曲线的方程为

（ ）

- A. $\frac{5}{4}x^2 - 5y^2 = 1$ B. $5y^2 - \frac{5}{4}x^2 = 1$ C. $\frac{5}{4}y^2 - 5x^2 = 1$ D. $5x^2 - \frac{5}{4}y^2 = 1$

8. 已知四棱锥 $E-ABCD$ ，底面 $ABCD$ 是边长为1的正方形， $ED=1$ ，平面 $ECD \perp$ 平面 $ABCD$ ，当点 C 到平面 ABE 的距离最大时，该四棱锥的体积为（ ）

- A. $\frac{\sqrt{2}}{6}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{\sqrt{2}}{3}$ D. 1

9. 2021年部分省市将实行“3+1+2”的新高考模式，即语文、数学、英语三科必选，物理、历史二选一，化学、生物、政治、地理四选二，若甲同学选科没有偏好，且不受其他因素影响，则甲同学同时选择历史和化学的概率为

14. 如图是九位评委打出的分数的茎叶统计图，去掉一个最高分和一个最低分后，所剩数据的平均分为_____.



15. 若将函数 $f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$ 的图象沿 x 轴向右平移 φ ($\varphi > 0$) 个单位后所得的图象与 $f(x)$ 的图象关于 x 轴对称，则 φ 的最小值为_____.

16. $(1-2x)(1+x)^6$ 的展开式中 x^2 的系数为_____.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

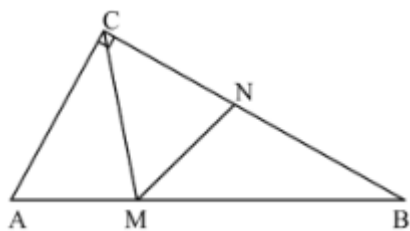
17. (12 分) 已知数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 满足， $a_1 = 2$ ， $b_1 = 1$ ， $a_{n+1} = 2a_n$ ($n \in N^*$)，

$$b_1 + \frac{1}{2}b_2 + \frac{1}{3}b_3 + \dots + \frac{1}{n}b_n = b_{n+1} - 1 \quad (n \in N^*).$$

(I) 求 a_n 与 b_n ；

(II) 记数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和为 T_n ，且 $c_n = \begin{cases} \frac{1}{b_n b_{n+2}}, & n \text{ 为奇数}, \\ -\frac{1}{a_n}, & n \text{ 为偶数}, \end{cases}$ ，若对 $n \in N^*$ ， $T_{2n} \geq T_{2k}$ 恒成立，求正整数 k 的值.

18. (12 分) 如图，在直角 $\triangle ACB$ 中， $\angle ACB = \frac{\pi}{2}$ ， $\angle CAB = \frac{\pi}{3}$ ， $AC = 2$ ，点 M 在线段 AB 上.



(1) 若 $\sin \angle CMA = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ，求 CM 的长；

(2) 点 N 是线段 CB 上一点， $MN = \sqrt{7}$ ，且 $S_{\triangle BMN} = \frac{1}{2} S_{\triangle ACB}$ ，求 $BM + BN$ 的值.

19. (12 分) 在 $\triangle ABC$ 中，角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c ，且满足 $c \sin A = a \sin\left(C + \frac{\pi}{3}\right)$.

(I) 求角 C 的大小；

(II) 若 $\triangle ABC$ 的面积为 $3\sqrt{3}$ ， $a - b = 1$ ，求 c 和 $\cos(2A - C)$ 的值.

20. (12 分) 本小题满分 14 分)

已知曲线 C 的极坐标方程为 $\rho = 4\sin\theta$ ，以极点为原点，极轴为 x 轴的非负半轴建立平面直角坐标系，直线 l 的参数

$$\text{方程为} \begin{cases} x = \frac{1}{2}t, \\ y = \frac{\sqrt{3}}{2}t + 1 \end{cases} \quad (t \text{ 为参数}), \text{ 求直线 } l \text{ 被曲线 } C \text{ 截得的线段的长度}$$

21. (12 分) 已知函数 $f(x) = x|x+a|, a \in \mathbb{R}$.

(1) 若 $f(1) + f(-1) > 1$ ，求 a 的取值范围；

(2) 若 $a < 0$ ，对 $\forall x, y \in (-\infty, -a]$ ，不等式 $f(x) \leq \left|y + \frac{3}{4}\right| + \left|y + \frac{a}{2}\right|$ 恒成立，求 a 的取值范围.

22. (10 分) 已知抛物线 C 的顶点为原点，其焦点 $F(0, c), (c > 0)$ 关于直线 $l: x - y - 2 = 0$ 的对称点为 M ，且

$|FM| = 3\sqrt{2}$. 若点 P 为 C 的准线上的任意一点，过点 P 作 C 的两条切线 PA, PB ，其中 A, B 为切点.

(1) 求抛物线 C 的方程；

(2) 求证：直线 AB 恒过定点，并求 $\triangle PAB$ 面积的最小值.

参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1、B

【解析】

$a_3^2 = a_1 a_9 \Leftrightarrow (a_1 + 2d)^2 = a_1(a_1 + 8d)$ ，将 $a_1 = 2$ 代入，求得公差 d ，再利用等差数列的前 n 项和公式计算即可.

【详解】

由已知， $a_3^2 = a_1 a_9$ ， $a_1 = 2$ ，故 $(a_1 + 2d)^2 = a_1(a_1 + 8d)$ ，解得 $d = 2$ 或 $d = 0$ (舍)，

故 $a_n = 2 + (n-1) \times 2 = 2n$ ， $S_8 = \frac{8(a_1 + a_8)}{2} = 4(2 + 2 \times 8) = 72$.

故选：B.

【点睛】

本题考查等差数列的前 n 项和公式，考查等差数列基本量的计算，是一道容易题.

2、D

【解析】

ABD 可通过统计图直接分析得出结论，C 可通过计算中位数判断选项是否正确.

【详解】

- A. 由统计图可知：2014 年入境游客万人次最少，故正确；
- B. 由统计图可知：后 4 年我国入境游客万人次呈逐渐增加趋势，故正确；
- C. 入境游客万人次的中位数应为 13340.13 与 13604.33 的平均数，大于 13340 万次，故正确；
- D. 由统计图可知：前 3 年的入境游客万人次相比于后 3 年的波动更大，所以对应的方差更大，故错误.
- 故选：D.

【点睛】

本题考查统计图表信息的读取以及对中位数和方差的理解，难度较易.处理问题的关键是能通过所给统计图，分析出对应的信息，对学生分析问题的能力有一定要求.

3、D

【解析】

先化简得 $z = \frac{3}{5} + \frac{1}{5}i$, 再求 $|z|$ 得解.

【详解】

$$z = \frac{2i}{1+3i} = \frac{2i(1-3i)}{10} = \frac{3}{5} + \frac{1}{5}i,$$

$$\text{所以 } |z| = \frac{\sqrt{10}}{5}.$$

故选：D

【点睛】

本题主要考查复数的运算和模的计算，意在考查学生对这些知识的理解掌握水平.

4、D

【解析】

依次运行程序框图给出的程序可得

第一次： $S = 2017 + \sin \frac{\pi}{2} = 2018, i = 3$ ，不满足条件；

第二次： $S = 2018 + \sin \frac{3\pi}{2} = 2018 - 1 = 2017, i = 5$ ，不满足条件；

第三次： $S = 2017 + \sin \frac{5\pi}{2} = 2018, i = 7$ ，不满足条件；

第四次： $S = 2018 + \sin \frac{7\pi}{2} = 2018 - 1 = 2017, i = 9$ ，不满足条件；

第五次: $S = 2017 + \sin \frac{9\pi}{2} = 2018, i = 11$, 不满足条件;

第六次: $S = 2018 + \sin \frac{11\pi}{2} = 2018 - 1 = 2017, i = 13$, 满足条件, 退出循环. 输出 1. 选 D.

5、A

【解析】

由题意可知, 随机变量 X 的可能取值有 0、1、2、3, 计算出随机变量 X 在不同取值下的概率, 进而可求得随机变量 X 的数学期望值.

【详解】

由题意可知, 随机变量 X 的可能取值有 0、1、2、3,

$$\text{则 } P(X=0) = \frac{C_5^3}{C_8^3} = \frac{10}{56}, \quad P(X=1) = \frac{C_5^2 C_3^1}{C_8^3} = \frac{30}{56}, \quad P(X=2) = \frac{C_5^1 C_3^2}{C_8^3} = \frac{15}{56}, \quad P(X=3) = \frac{C_3^3}{C_8^3} = \frac{1}{56}.$$

$$\text{因此, 随机变量 } X \text{ 的数学期望为 } E(X) = 0 \times \frac{10}{56} + 1 \times \frac{30}{56} + 2 \times \frac{15}{56} + 3 \times \frac{1}{56} = \frac{9}{8}.$$

故选: A.

【点睛】

本题考查随机变量数学期望的计算, 考查计算能力, 属于基础题.

6、B

【解析】

利用复数除法、加法运算, 化简求得 z , 再求得 $|z|$

【详解】

$$z = \frac{5i}{2-i} + 5i = \frac{5i(2+i)}{5} + 5i = -1 + 7i, \text{ 故 } |z| = \sqrt{(-1)^2 + 7^2} = 5\sqrt{2}.$$

故选: B

【点睛】

本小题主要考查复数的除法运算、加法运算, 考查复数的模, 属于基础题.

7、C

【解析】

求得抛物线的焦点坐标, 可得双曲线方程 $\frac{y^2}{b} - \frac{x^2}{-a} = 1$ 的渐近线方程为 $y = \pm \sqrt{\frac{b}{-a}}x$, 由题意可得 $b = -4a$, 又 $c^2 = 1$,

即 $b - a = 1$, 解得 a, b , 即可得到所求双曲线的方程.

【详解】

解: 抛物线 $x^2 = 4y$ 的焦点为 $(0, 1)$

可得双曲线 $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = 1 (b > 0, a < 0)$

即为 $\frac{y^2}{b} - \frac{x^2}{-a} = 1$ 的渐近线方程为 $y = \pm \sqrt{\frac{b}{-a}}x$

由题意可得 $\sqrt{\frac{b}{-a}} = 2$, 即 $b = -4a$

又 $c^2 = 1$, 即 $b - a = 1$

解得 $a = -\frac{1}{5}$, $b = \frac{4}{5}$.

即双曲线的方程为 $\frac{5y^2}{4} - 5x^2 = 1$.

故选: C

【点睛】

本题主要考查了求双曲线的方程, 属于中档题.

8、B

【解析】

过点 E 作 $EH \perp CD$, 垂足为 H , 过 H 作 $HF \perp AB$, 垂足为 F , 连接 EF . 因为 $CD \parallel$ 平面 ABE , 所以点 C 到平面 ABE 的距离等于点 H 到平面 ABE 的距离 h . 设 $\angle CDE = \theta (0 < \theta \leq \frac{\pi}{2})$, 将 h 表示成关于 θ 的函数, 再求函数的最值, 即可

得答案.

【详解】

过点 E 作 $EH \perp CD$, 垂足为 H , 过 H 作 $HF \perp AB$, 垂足为 F , 连接 EF .

因为平面 $ECD \perp$ 平面 $ABCD$, 所以 $EH \perp$ 平面 $ABCD$,

所以 $EH \perp HF$.

因为底面 $ABCD$ 是边长为 1 的正方形, $HF \parallel AD$, 所以 $HF = AD = 1$.

因为 $CD \parallel$ 平面 ABE , 所以点 C 到平面 ABE 的距离等于点 H 到平面 ABE 的距离.

易证平面 $EFH \perp$ 平面 ABE ,

所以点 H 到平面 ABE 的距离, 即为 H 到 EF 的距离 h .

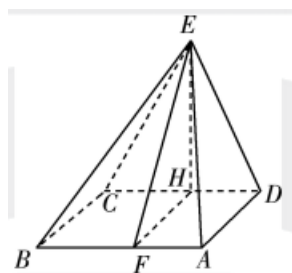
不妨设 $\angle CDE = \theta (0 < \theta \leq \frac{\pi}{2})$, 则 $EH = \sin \theta$, $EF = \sqrt{1 + \sin^2 \theta}$.

因为 $S_{\triangle EHF} = \frac{1}{2} \cdot EF \cdot h = \frac{1}{2} \cdot EH \cdot FH$ ，所以 $h \cdot \sqrt{1 + \sin^2 \theta} = \sin \theta$ ，

所以 $h = \frac{\sin \theta}{\sqrt{1 + \sin^2 \theta}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\sin^2 \theta} + 1}} \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$ ，当 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 时，等号成立。

此时 EH 与 ED 重合，所以 $EH = 1$ ， $V_{E-ABCD} = \frac{1}{3} \times 1^2 \times 1 = \frac{1}{3}$ 。

故选：B.



【点睛】

本题考查空间中点到面的距离的最值，考查函数与方程思想、转化与化归思想，考查空间想象能力和运算求解能力，求解时注意辅助线及面面垂直的应用。

9、B

【解析】

甲同学所有的选择方案共有 $C_2^1 C_4^2 = 12$ 种，甲同学同时选择历史和化学后，只需在生物、政治、地理三科中再选择一科即可，共有 $C_3^1 = 3$ 种选择方案，根据古典概型的概率计算公式，可得甲同学同时选择历史和化学的概率

$$P = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}，\text{故选 B.}$$

10、A

【解析】

设 $CA = CC_1 = 2CB = 2$ ，延长 A_1B_1 至 D ，使得 $A_1B_1 = B_1D$ ，连 BD, C_1D ，可证 $AB_1 \parallel BD$ ，得到 $\angle C_1BD$ （或补角）为所求的角，分别求出 BC_1, AB_1, C_1D ，解 $\triangle C_1BD$ 即可。

【详解】

设 $CA = CC_1 = 2CB = 2$ ，延长 A_1B_1 至 D ，使得 $A_1B_1 = B_1D$ ，

连 BD, C_1D ，在直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中， $AB \parallel A_1B_1, AB = A_1B_1$ ，

$\therefore AB \parallel B_1D, AB = B_1D$ ，四边形 $ABDB_1$ 为平行四边形，

$\therefore AB_1 \parallel BD$, $\therefore \angle C_1BD$ (或补角) 为直线 BC_1 与 AB_1 所成的角,

在 $Rt\triangle BCC_1$ 中, $BC_1 = \sqrt{CC_1^2 + BC^2} = \sqrt{5}$,

在 $Rt\triangle A_1B_1C_1$ 中, $A_1B_1 = \sqrt{A_1C_1^2 + B_1C_1^2} = \sqrt{5}$, $\cos \angle B_1A_1C_1 = \frac{2}{\sqrt{5}}$,

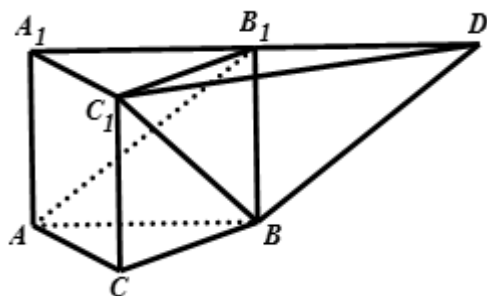
在 $\triangle A_1C_1D$ 中,

$$C_1D^2 = A_1C_1^2 + A_1D^2 - 2A_1C_1 \cdot A_1D \cos \angle B_1A_1C_1 = 4 + 20 - 16 = 8,$$

在 $Rt\triangle AA_1B_1$ 中, $AB_1 = \sqrt{AA_1^2 + A_1B_1^2} = 3$, $\therefore BD = AB_1 = 3$,

$$\text{在 } \triangle B_1C_1D \text{ 中, } \cos \angle C_1BD = \frac{BC_1^2 + BD^2 - C_1D^2}{2BC_1 \cdot BD} = \frac{5 + 9 - 8}{6\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

故选: A.



【点睛】

本题考查异面直线所成的角, 要注意几何法求空间角的步骤“做”“证”“算”缺一不可, 属于中档题.

11、C

【解析】

解 对于 (1), 当 $CD \perp$ 平面 ABE , 且 E 在 AB 的右上方时, E 到平面 BCD 的距离最大, 当 $CD \perp$ 平面 ABE , 且 E 在 AB 的左下方时, E 到平面 BCD 的距离最小,

$\therefore$ 四面体 $E-BCD$ 的体积有最大值和最小值, 故 (1) 正确;

对于 (2), 连接 DE , 若存在某个位置, 使得 $AE \perp BD$, 又 $AE \perp BE$, 则 $AE \perp$ 平面 BDE , 可得 $AE \perp DE$, 进一步可得 $AE = DE$, 此时 $E-ABD$ 为正三棱锥, 故 (2) 正确;

对于 (3), 取 AB 中点 O , 连接 DO , EO , 则 $\angle DOE$ 为二面角 $D-AB-E$ 的平面角, 为 θ ,

直角边 AE 绕斜边 AB 旋转, 则在旋转的过程中, $\theta \in [0, \pi)$,

$\angle DAE \in [\frac{\pi}{12}, \pi)$, 所以 $\theta \geq \angle DAE$ 不成立. (3) 不正确;

对于 (4) AE 的中点 M 与 AB 的中点 N 连线交平面 BCD 于点 P , P 到 BC 的距离为: d_{P-BC} ,

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/437054006200006061>