齐次化妙解圆锥曲线

01 内容速览

02 重难点题型归纳

题型1定点在原点的斜率问题

划重点

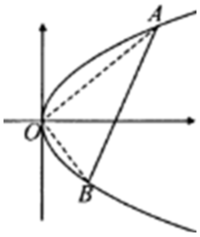
圆锥曲线的定义、定值、弦长、面积,很多都可以转化为斜率问题,当圆锥曲线遇到斜率之和或者斜率之积,以往我们的常用解法是设直线 $y=kx+b$,与圆锥曲线方程联立方程组,韦达定理,再将斜率之和或之积的式子通分后,将 x_1+x_2 和 $x_1\cdot x_2$ 代入,得到关于 k、b 的式子. 解法不难,计算量较为复杂.

如果采用齐次化解决,直接得到关于 k 的方程,会使题目计算量大大减少.

“齐次”即次数相等的意思,例如 $f(x)=ax^2+bxy+cy^2$ 称为二次齐式,即二次齐次式的意思,因为 $f(x)$ 中每一项都是关于 x、y 的二次项.

如果公共点在原点,不需要平移.

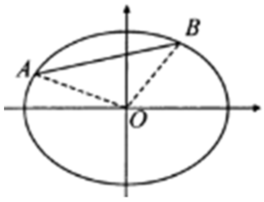
例1 直线 $mx+ny=1$ 与抛物线 $y^2=4x$ 交于 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,求 $k_{OA}+k_{OB}$,$k_{OA}\cdot k_{OB}$.(用 m,n 表示)



【解析】联立 $\begin{cases}mx+ny=1\\y^2=4x\end{cases}$,齐次化得 $y^2=4x(mx+ny)$,等式两边同时除以 x^2,$\left(\dfrac{y}{x}\right)^2-4n\left(\dfrac{y}{x}\right)-4m=0$,

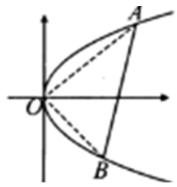
$\therefore k_{OA}+k_{OB}=\dfrac{y_1}{x_1}+\dfrac{y_2}{x_2}=4n$,$k_{OA}k_{OB}=\dfrac{y_1}{x_1}\cdot\dfrac{y_2}{x_2}=-4m$.

题目 1 直线 $mx+ny=1$ 与椭圆 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 交于 $A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$，求 $k_{OA}\cdot k_{OB}$(用 m，n 表示).



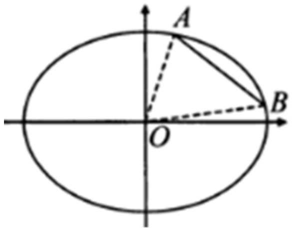
【解析】$\begin{cases}mx+ny=1\\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1\end{cases}$ 齐次化联立得：$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=(mx+ny)^2$，等式两边同时除以 x^2，$(12n^2-4)\left(\frac{y}{x}\right)^2+24mn\left(\frac{y}{x}\right)+12m^2-3=0$，$\therefore k_{OA}\cdot k_{OB}=\frac{y_1}{x_1}\cdot\frac{y_2}{x_2}=\frac{12m^2-3}{12n^2-4}$.

题目 2 抛物线 $y^2=4x$，直线 l 交抛物线于 A、B 两点，且 $OA\perp OB$，求证：直线 l 过定点.



【解析】设直线 AB 方程为 $mx+ny=1$，$A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$，$\begin{cases}mx+ny=1\\ y^2=4x\end{cases}$ 联立得 $\left(\frac{y}{x}\right)^2-4n\left(\frac{y}{x}\right)-4m=0$，$\because k_{OA}k_{OB}=\frac{y_1y_2}{x_1x_2}$，$\therefore -4m=-1$，$\therefore m=\frac{1}{4}$，$\therefore$ 直线 AB：$\frac{1}{4}x+ny=1$ 过定点 $(4,0)$.

题目 3 不过原点的动直线交椭圆 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 于 A、B 两点，直线 OA、AB、OB 的斜率成等比数列，求证：直线 l 的斜率为定值.



【解析】设直线 AB 方程为 $mx+ny=1$，$A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$，

$\begin{cases}mx+ny=1\\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1\end{cases}$ 联立得 $(12n^2-4)\left(\frac{y}{x}\right)^2+24mn\left(\frac{y}{x}\right)+12m^2-3=0$，

于是 $k_{OA}k_{OB}=\frac{y_1}{x_1}\frac{y_2}{x_2}=\frac{12m^2-3}{12n^2-4}$，又 $k_{AB}=-\frac{m}{n}$，$\therefore \frac{12m^2-3}{12n^2-4}=\frac{m^2}{n^2}$，得 $k_{AB}=-\frac{m}{n}=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$.

题目 4 已知直线 $y=kx+4$ 交椭圆 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ 于 A，B 两点，O 为坐标原点，若 $k_{OA}+k_{OB}=2$，求该直线方程.

【解析】法一(齐次化解法)：设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，

步骤 1：构建关于 x、y 的齐次式：

将直线变形为 $\frac{y-kx}{4}=1$ 代入 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ 进行"1"的代换得 $\frac{x^2}{4}+y^2=\left(\frac{y-kx}{4}\right)^2$，

整理得 $15y^2+2kxy+(4-k^2)x^2=0$；

步骤 2：构建关于斜率 $k=\frac{y}{x}$ 的方程：

因为 $x\neq 0$,方程两边同除以 x^2,得 $15\left(\frac{y}{x}\right)^2+2k\left(\frac{y}{x}\right)+(4-k^2)=0$;

步骤3:利用韦达定理转化目标:

易知 $k_{OA}=\frac{y_1}{x_1}$ 和 $k_{OB}=\frac{y_2}{x_2}$ 是方程 $15\left(\frac{y}{x}\right)^2+2k\left(\frac{y}{x}\right)+(4-k^2)=0$ 的两个根,由韦达定理得 $k_{OA}+k_{OB}=\frac{-2k}{15}=2$,即 $k=-15$,故所求直线方程为 $y=-15x+4$.

法二(常规解法):

设 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,联立 $\begin{cases}y=kx+4 ①\\ \frac{x^2}{4}+y^2=1 ②\end{cases}$,①代入②消去 y 得

$$(4k^2+1)x^2+32kx+60=0,$$

设 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,则

$$x_1+x_2=\frac{32k}{4k^2+1},\ x_1x_2=\frac{60}{4k^2+1},$$

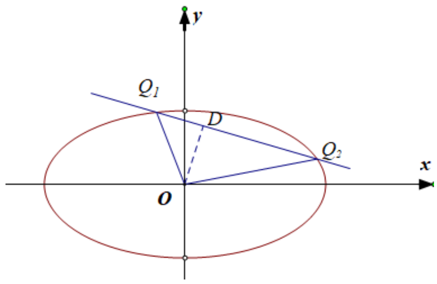
所以

$$k_{OM}+k_{ON}=\frac{y_1}{x_1}+\frac{y_2}{x_2}=\frac{kx_1+4}{x_1}+\frac{kx_2+4}{x_2}=2k+\frac{4(x_1+x_2)}{x_1x_2}=2k+\frac{32k}{15}=2,$$

解得 $k=-15$,故所求直线方程为 $y=-15x+4$.

【方法小结】本题属于曲线上的两个点与原点连线的斜率之和为定值(斜率之积为定值也可以用本法)问题,通过对直线变形,采取"1"的巧用,一般二次方不变,一次方项直接乘以"1",常数项乘以"1"的平方,从而构建关于 x,y 的二元二次的齐次方程,再两边同时除以 x^2 得到一个是以原点与曲线上连线的斜率 k 为根的一元二次方程,再借助韦达定理使得问题运算得到简化,我们把这种操作手法称之为"齐次化".

题目 5 设 Q_1,Q_2 为椭圆 $\frac{x^2}{2b^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 上两个动点,且 $OQ_1\perp OQ_2$,过原点 O 作直线 Q_1Q_2 的垂线 OD,求 D 的轨迹方程.



【解析】法一:(常规方法)

设 $Q_1(x_1,y_1)$,$Q_1(x_2,y_2)$,$D(x_0,y_0)$,设直线 Q_1Q_2 方程为 $y=kx+m$,联立 $\begin{cases}y=kx+m\\ \frac{x^2}{2b^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\end{cases}$ 化简可得:$(2b^2k^2+b^2)x^2+4kmb^2x+2b^2(m^2-b^2)=0$,

所以 $x_1x_2=\frac{2b^2(m^2+b^2)}{2b^2k^2+b^2}$,$y_1y_2=\frac{b^2(m^2-2b^2k^2)}{2b^2k^2+b^2}$,

因为 $OQ_1\perp OQ_2$,所以

$$x_1x_2+y_1y_2=\frac{2b^2(m^2+b^2)}{2b^2k^2+b^2}+\frac{b^2(m^2-2b^2k^2)}{2b^2k^2+b^2}=\frac{2(m^2-b^2)}{2k^2+1}+\frac{m^2-2b^2k^2}{2k^2+1}=0,$$

$\therefore 3m^2=2b^2(1+k^2)$ ①

又因为直线 Q_1Q_2 方程等价于为 $y-y_0=-\frac{x_0}{y_0}(x-x_0)$,即 $y=-\frac{x_0}{y_0}x+\frac{x_0^2}{y_0}+y_0$,

对比于 $y=kx+m$，则 $\begin{cases}-\dfrac{x_0}{y_0}=k\\ \dfrac{x_0^2}{y_0}+y_0=m\end{cases}$ 代入①中，化简可得：$x_0^2+y_0^2=\dfrac{2}{3}b^2$.

法二：(齐次化解法)

设直线 Q_1Q_2 方程为 $mx+ny=1$，联立 $\begin{cases}mx+ny=1\\ \dfrac{x^2}{2b^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\end{cases}$，可得 $\begin{cases}mx+ny=1\\ \dfrac{x^2}{2b^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-1=0\end{cases}$，

所以 $\dfrac{x^2}{2b^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-(mx+ny)^2=0$，化简可得 $\dfrac{x^2}{2b^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-m^2x^2-n^2y^2-2mnxy=0$，

整理成关于 x,y 的齐次式：$(2-2b^2n^2)y^2+(1-2m^2b^2)x^2-4mnb^2xy=0$，

进而两边同时除以 x^2，则 $(2-2b^2n^2)\left(\dfrac{y}{x}\right)^2-4mnb^2\dfrac{y}{x}+1-2m^2b^2=0$，

记 OQ_1，OQ_2 的斜率分别为 k_1，k_2，则 k_1，k_2 为方程 $(2-2b^2n^2)\left(\dfrac{y}{x}\right)^2-4mnb^2\dfrac{y}{x}+1-2m^2b^2=0$ 的两个根，由韦达定理得 $k_1k_2=\dfrac{1-2m^2b^2}{2-2b^2n^2}$，

因为 $OQ_1\perp OQ_2$，所以 $k_1k_2=\dfrac{1-2m^2b^2}{2-2b^2n^2}=-1$，

$\therefore 3m^2=2b^2(1+k^2)$ ①

又因为直线 Q_1Q_2 方程等价于为 $y-y_0=-\dfrac{x_0}{y_0}(x-x_0)$，即 $y=-\dfrac{x_0}{y_0}x+\dfrac{x_0^2}{y_0}+y_0$，

对比于 $y=kx+m$，则 $\begin{cases}-\dfrac{x_0}{y_0}=k\\ \dfrac{x_0^2}{y_0}+y_0=m\end{cases}$，代入①中，化简可得：$x_0^2+y_0^2=\dfrac{2}{3}b^2$.

题型2 定点在原点转化成斜率问题

划重点

圆锥曲线齐次化原理是：过程中为了式子整齐好记，所以将它齐次化。齐次化是常见的代数处理技巧，圆锥曲线中用齐次化的方法解决和斜率相关的定值定点。

齐次化法简化计算适用范围：圆锥曲线中处理斜率之和与斜率之积类型问题。

以圆锥曲线中椭圆为例，先介绍齐次化解题的基本特征与一般步骤：

(一) 基本特征

1. 椭圆上有定点 $P(x_o,y_o)$ 和动弦 AB;

2. 题设或结论中涉及 PA,PB 的斜率之积或斜率之和等情况. 如 $k_1\cdot k_2,k_1+k_2$,,。

(二) 解题步骤

1. 设直线方程为 $m(x-x_o)+n(y-y_o)=1$，其中点 (x_o,y_o) 为两相关直线的交点 (这样设直线方程的形式，右边为 1 对联立齐次化较为方便);

2. 椭圆方程变形为

3. 椭圆变形方程与直线方程联立齐次化:

4. 由韦达定理得 $k_1+k_2,k_1\cdot k_2$;

5. 根据题设进一步求解。

注意：过一定点作两条直线

且两直线间存在斜率关系 (显性或隐性) 如果你发现题目出现了以上情况那这个题目八成可用齐次化来简化但要注意叙述的严谨性和完整性否则易被老师扣去过程分

例 1 已知抛物线 C 的方程为 $y^2=2px$，若直线 $y=kx+b$ 与抛物线 C 相交于 A，B 两点，且以 AB 为直径的圆过坐标原点，证明直线 $y=kx+b$ 过定点.

【证明】因为以 AB 为直径的圆过坐标原点，所以 $OA\perp OB$，即 $k_{OA}\cdot k_{OB}=-1$.

设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则 $k_{OA}=\dfrac{y_1}{x_1}$，$k_{OB}=\dfrac{y_2}{x_2}$.

将直线 $y=kx+b$ 变形得 $\dfrac{y}{b}-\dfrac{kx}{b}=1$，记 $m=\dfrac{1}{b}$，$n=-\dfrac{k}{b}$，则直线可化为 $my+nx=1$，

将“1”代入抛物线 C 的方程得 $y^2=2px(my+nx)$，整理得 $y^2-2pmxy-2pnx^2=0$，

因为 $x\neq 0$，方程两边同除以 x^2，得 $\left(\dfrac{y}{x}\right)^2-2pm\dfrac{y}{x}-2pn=0$，

易知 $k_{OA}=\dfrac{y_1}{x_1}$ 和 $k_{OB}=\dfrac{y_2}{x_2}$ 是方程 $\left(\dfrac{y}{x}\right)^2-2pm\dfrac{y}{x}-2pn=0$ 的两个根，

由韦达定理得 $k_{OA}\cdot k_{OB}=-2pn=-1$，即 $n=\dfrac{1}{2p}$，

代入求直线方程 $my+nx=1$ 得 $my+\dfrac{1}{2p}x=1$，即 $x=2pmy+2p$，

当 $y=0$ 时，$x=2p$，故直线恒定过点 $(2p,0)$.

题目 1 直线 $x+2y-3=0$ 与圆 $x^2+y^2+x-6y+c=0$ 相交于 P，Q，且 $OP\perp OQ$，求 c 的值.

类型识别：$OP\perp OQ$，所以 $k_{OP}\cdot k_{OQ}=-1$，适合用齐次化来处理.

【解析】设 $P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，将直线变形为 $\dfrac{x+2y}{3}=1$，

代入圆 $x^2+y^2+x-6y+c=0$ 得 $x^2+y^2+(x-6y)\cdot\dfrac{x+2y}{3}+c\left(\dfrac{x+2y}{3}\right)^2=0$，

化简得 $(4c-27)y^2+(4c-12)xy+(c+12)x^2=0$，

等式两边同除以 x^2 得 $(4c-27)\left(\dfrac{y}{x}\right)^2+(4c-12)\dfrac{y}{x}+(c+12)=0$，

注意到 $k_{OP}=\dfrac{y_1}{x_1}$，$k_{OQ}=\dfrac{y_2}{x_2}$，所以 k_{OP} 和 k_{OQ} 方程 $(4c-27)\left(\dfrac{y}{x}\right)^2+(4c-12)\dfrac{y}{x}+(c+12)=0$ 的两个根，所以

$k_{OP}\cdot k_{OQ}=\dfrac{c+12}{4c-27}=-1$，计算可得 $c=3$.

题目 2 (2021 重庆期末) 已知抛物线 C:$y^2=2px(p>0)$ 上一点 $A(2,a)$ 到其焦点的距离为 3.

(Ⅰ) 求抛物线 C 的方程；

(Ⅱ) 过点 $(4,0)$ 的直线与抛物线 C 交于 P，Q 两点，O 为坐标原点，证明：$\angle POQ=90^\circ$.

【解析】解法 1：(Ⅰ) 由题意知：$2-\left(-\dfrac{p}{2}\right)=3\Rightarrow p=2\Rightarrow y^2=4x$.

(Ⅱ) 证明：设该直线为 $my=x-4$，P、Q 的坐标分别为 (x_1,y_1)、(x_2,y_2)，

联立方程有：$\begin{cases}my=x-4\\y^2=4x\end{cases}\Rightarrow y^2-4my-16=0$，

$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=x_1x_2+y_1y_2=\dfrac{y_1^2y_2^2}{16}+y_1y_2=\dfrac{1}{16}\times(-16)^2-16=0$，$\therefore\angle POQ=90^\circ$.

解法 2：要证明 $\angle POQ=90^\circ$，即证 $k_{PO}\cdot k_{QO}=-1$，

设 PQ:$mx+ny=1$，过 $(4,0)$，$\therefore 4m=1$，$m=\dfrac{1}{4}$，$y^2=4x(mx+ny)$，$y^2-4nxy-4mx^2=0$，

同除以 x^2 得 $\left(\dfrac{y}{x}\right)^2-4n\dfrac{y}{x}-4m=0$，$k_1\cdot k_2=-4m$，$\because m=\dfrac{1}{4}$，$\therefore k_1\cdot k_2=-1$ 即 $\angle POQ=90^\circ$.

题目 3 (2022 连云港期末) 已知直线 l 与抛物线 C:$y^2=4x$ 交于 A，B 两点.

(1) 若直线 l 的斜率为 -1，且经过抛物线 C 的焦点，求线段 AB 的长；

(2) 若点 O 为坐标原点，且 $OA\perp OB$，求证：直线 l 过定点.

【答案】(1)8

(2) 证明见解析

【分析】(1) 联立直线与抛物线的方程，根据抛物线的焦点弦公式结合韦达定理即可得解；

(2) 直线 AB 方程为：$x=my+n$，由向量数量积公式结合韦达定理可得 n 的值，进而可得结果.

【详解】(1) 抛物线为 $y^2=4x$，

$\therefore$ 焦点坐标为 $(1,0)$，直线 AB 斜率为 -1，则直线 AB 方程为：$y=-x+1$，

设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，由 $\begin{cases}y=-x+1\\y^2=4x\end{cases}$ 得：$x^2-6x+1=0$，可得 $x_1+x_2=6$，

由抛物线定义可得 $|AB|=x_1+x_2+2$，

$\therefore |AB|=8$.

(2) 设直线 AB 方程为：$x=my+n$，设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，

$\because OA\perp OB$，$\therefore \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$，$\therefore x_1x_2+y_1y_2=0$，

由 $\begin{cases}x=my+n\\y^2=4x\end{cases}$ 得：$y^2-4my-4n=0$，

$\therefore y_1y_2=-4n$；$x_1x_2=n^2$；$\therefore n^2-4n=0$，解得 $n=0$ 或 $n=4$，

当 $n=0$ 时，直线 AB 过原点，不满足题意；当 $n=4$ 时，直线 AB 过点 $(4,0)$.

故当 $OA\perp OB$ 时，直线 AB 过定点 $(4,0)$.

题型 3 定点不在原点之齐次化基础运用

划重点

$\dfrac{y-n}{x-m}$ 型怎么采用齐次化运算解决，平移是关键

如果不在原点，先平移图形，将公共点平移到原点，无论如何平移，直线斜率是不变的. 注意平移口诀是“左加右减，上减下加”，你没有看错，“上减下加”，因为是在等式与 y 同侧进行加减，我们以往记的“上加下减”都是在等式与 y 的异侧进行的.

例：$y=kx+b$ 向上平移 1 个单位，变为 $y=kx+b+1$，即 $y-1=kx+b$，

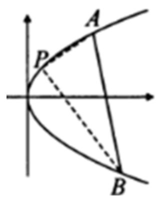
$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 向上平移 1 个单位，变为 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{(y-1)^2}{b^2}=1$.

设平移后的直线为 $mx+ny=1$(为什么这样设？$\because$ 这样齐次化更加方便，相当于“1”的妙用)，与平移后的圆锥联立，一次项乘以 $mx+ny$，常数项乘以 $(mx+ny)^2$，构造 $ay^2+bxy+cx^2=0$，然后等式两边同时除以 x^2(前面注明 x 不等于 0)，得到 $a\cdot\left(\dfrac{y}{x}\right)^2+b\cdot\dfrac{y}{x}+c=0$，可以直接利用韦达定理得出斜率之和或者斜率之积，$\dfrac{y_1}{x_1}+\dfrac{y_2}{x_2}=-\dfrac{b}{a}$，$\dfrac{y_1}{x_1}\cdot\dfrac{y_2}{x_2}=\dfrac{c}{a}$，即可得出答案. 如果是过定点题目，还需要还原，之前如何平移，现在反平移回去.

总结解法为：①平移；②联立并齐次化；③同除以 x^2；④韦达定理. 证明完毕，若过定点，还需要还原.

优点：大大减小计算量，提高准确率！缺点：$mx+ny=1$ 不能表示过原点的直线，少量题目需要讨论.

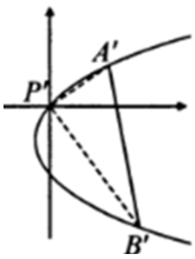
例 1 抛物线 $y^2=4x$，$P(1,2)$，直线 l 交抛物线于 A、B 两点，$PA\perp PB$，求证：直线 l 过定点.



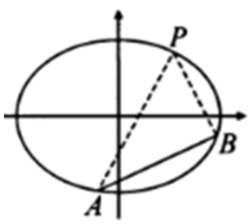
【解析】法1:(推荐)

设直线 l: $m(x-1)+n(y-2)=1$，抛物线变形:$(y-2+2)^2=4(x-1+1)$,化简得:$(y-2)^2+4(y-2)+4=4x-1+4$, 即 $(y-2)^2+4(y-2)=4x-1$,一次项化成二次项得:$(y-2)^2+4(y-2)[m(x-1)+n(y-2)]=4x-1[(x-1)+n(y-2)]$, 即 $(1+4n)\left(\dfrac{y-2}{x-1}\right)^2+(4m-4n)\dfrac{y-2}{x-1}-4m=0$,$k_{pA}k_{PB}=\dfrac{-4m}{1+4n}=-1$, 整理得 $4m-4n=1$, 直线 l: $(5,-2)$

法2:将图形向左平移1个单位,向下平移2个单位,平移后的抛物线方程为 $(y+2)^2=4(x+1)$,整理得 $y^2+4y-4x=0$. 设平移后直线 $A'B'$ 方程为 $mx+ny=1$, $A'(x_1, y_1)$, $B'(x_2, y_2)$, $\begin{cases}mx+ny=1,\\ y^2+4y-4x=0\end{cases}$ 联立得 $(1+4n)\left(\dfrac{y}{x}\right)^2+(4m-4n)\left(\dfrac{y}{x}\right)-4m=0$,于是 $k_{P'A'}k_{P'B'}=\dfrac{y_1}{x_1}\cdot\dfrac{y_2}{x_2}=\dfrac{-4m}{1+4n}=-1$,整理得 $4m-4n=1$, $\therefore mx+ny=1$ 过定点 $(4,-4)$,右移1个,上移2个,直线 AB 过定点 $(5,-2)$.



题目 1 椭圆 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$,点 $P\left(1, \dfrac{3}{2}\right)$, A, B 为椭圆上两点,$k_{PA}+k_{PB}=0$. 求证:直线 AB 斜率为定值.



【解析】解法一:将图形向左平移1个单位,向下平移 $\dfrac{3}{2}$ 个单位,平移后的椭圆为 $\dfrac{(x+1)^2}{4}+\dfrac{\left(y+\frac{3}{2}\right)^2}{3}=1$,整理得 $4y^2+3x^2+6x+12y=0$,设平移后直线 $A'B'$ 方程为 $mx+ny=1$, $A'(x_1,y_1)$, $B'(x_2,y_2)$,

$\begin{cases}mx+ny=1\\ 4y^2+3x^2+6x+12y=0\end{cases}$,联立得 $4y^2+3x^2+(6x+12y)(mx+ny)=0$,

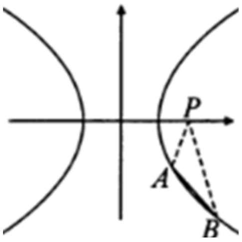
$(12n+4)y^2+6(2m+n)xy+(6m+3)x^2=0$,同时除以 x^2, $(12n+4)\left(\dfrac{y}{x}\right)^2+6(2m+n)\dfrac{y}{x}+(6m+3)=0$,

$k_{P'A'}+k_{P'B'}=\dfrac{y_1}{x_1}+\dfrac{y_2}{x_2}=\dfrac{-6(2m+n)}{12n+4}=0$, $-6(2m+n)=0$, $mx+ny=1$ 的斜率 $-\dfrac{m}{n}=\dfrac{1}{2}$.

解法二(换元法):设 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$,即化为 $\dfrac{y_1-\frac{3}{2}}{x_1-1}\cdot\dfrac{y_2-\frac{3}{2}}{x_2-1}=0$,即建立以 $\dfrac{y-\frac{3}{2}}{x-1}$ 为未知数的一元二次方程 $A\left(\dfrac{y-\frac{3}{2}}{x-1}\right)^2+B\cdot\dfrac{y-\frac{3}{2}}{x-1}+C=0$,即可解答. 为了方便运算设 $x-1=s, y-\dfrac{3}{2}=t$,代入椭圆 $\dfrac{x^2}{4}$

$+\dfrac{y^2}{3}=1$，得 $3s^2+4t^2+6t+12t=0$，∴设直线 $ms+nt=6$ 可方便运算，$3s^2+4t^2+t(ms+nt)+2t(ms+nt)$ $=0$，化简得：$(4+2n)\left(\dfrac{t}{s}\right)^2+(2m+n)\left(\dfrac{t}{s}\right)+(3+m)=0$，∴ $\dfrac{y_1-\frac{3}{2}}{x_1-1}\cdot\dfrac{y_2-\frac{3}{2}}{x_2-1}=\dfrac{t_1}{s_1}\cdot\dfrac{t_2}{s_2}=\dfrac{2m+n}{4+2n}=0$，$x-1=s$，$y-\dfrac{3}{2}=t$，$n=-2m$ 代入 $ms+nt=6$，得 $m(x-1)-2m\left(y-\dfrac{3}{2}\right)=6$，∴直线 AB 的斜率是 $\dfrac{1}{2}$.

题目 2 双曲线 $\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{y^2}{2}=1$，$P(2,0)$，$A$、$B$ 为双曲线上两点，且 $k_{PA}+k_{PB}=0$. AB 不与 x 轴垂直，求证：直线 AB 过定点.



【解析】将图形左平移 2 个单位，平移后的双曲线为 $\dfrac{(x+2)^2}{2}-\dfrac{y^2}{2}=1$，整理得 $y^2-x^2-4x-2=0$，

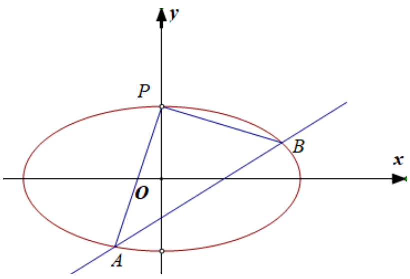
设平移后直线 $A'B'$ 方程为 $mx+ny=1$，$A'(x_1,y_1)$，$B'(x_2,y_2)$，$\begin{cases}mx+ny=1\\ y^2-x^2-4x-2=0\end{cases}$，

联立得 $y^2-x^2-4x(mx+ny)-2(mx+ny)^2=0$，$(1-2n^2)y^2-(4n+4mn)xy-(2m^2+4m+1)x^2=0$，

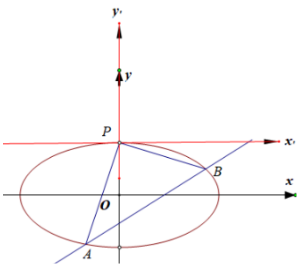
同时除以 x^2，$(1-2n^2)\left(\dfrac{y}{x}\right)^2-(4n+4mn)\dfrac{y}{x}-(2m^2+4m+1)=0$，$k_{P'A'}+k_{P'B'}=\dfrac{y_1}{x_1}+\dfrac{y_2}{x_2}=\dfrac{4n+4mn}{1-2n^2}=0$，

$4n+4mn=4n(m+1)=0$，$n=0$ 或 $m=-1$，AB 不与 x 轴垂直，$n\neq0$，∴ $m=-1$，$-x+ny=1$ 过 $(-1,0)$，右移 2 个单位，原直线过 $(1,0)$.

题目 3 已知椭圆 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$，设直线 l 不经过点 $P(0,1)$ 的直线交椭圆于 A，B 两点，若直线 PA，PB 的斜率之和为 -1，证明：直线 l 恒过定点.



【解析】(1) 当直线 l 的斜率存在时，以点 P 为坐标原点，建立新的直角坐标系 $x'py'$，如图所示：



旧坐标　　新坐标

$(x,y)\Rightarrow(x',y')$

即 $(0,1)\Rightarrow(0,0)$

所以 $\begin{cases}x'=x\\y'=y-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A\to A'\\B\to B'\end{cases}$，则 $k_{PA}+k_{PB}=-1$，即 $\dfrac{y_1-1}{x_1}+\dfrac{y_2-1}{x_2}=-1$，

在新坐标中转换为：$\dfrac{y_1'}{x_1'}+\dfrac{y_2'}{x_2'}=-1$，即 $k_1'+k_2'=-1$.

设直线 l 方程为：$mx'+ny'=1$.

原方程：$x^2+4y^2=4$ 则转换到新坐标就成为：$x'^2+4(y'+1)^2=4$.

展开得：$x'^2+4y'^2+8y'=0$

构造齐次式：$x'^2+4y'^2+8y'(mx'+ny')=0$

整理为：$(4+8n)y'^2+8mx'y'+x'^2=0$

两边同时除以 x'^2，则 $(4+8n)k'^2+8mk'+1=0$

所以 $k_1'+k_2'=-\dfrac{8m}{4+8n}=-1$，所以 $2m-2n=1\Rightarrow m=n+\dfrac{1}{2}$ 代入 $mx'+ny'=1$，

整理得 $n(x'+y')+\dfrac{x'}{2}-1=0$，对于任意 n 都成立.

则 $\begin{cases}x'+y'=0\\\dfrac{x'}{2}-1=0\end{cases}$，解之得 $\begin{cases}x'=2\\y'=-2\end{cases}$，故原理坐标系地应点坐标为 $\begin{cases}x=2\\y=-1\end{cases}$，所以过定点 $(2,-1)$；

(2) 当直线 l 的斜率不存在时，设 l：$x=a$，则 $A\left(a,\sqrt{1-\dfrac{a^2}{4}}\right)$，$B\left(a,-\sqrt{1-\dfrac{a^2}{4}}\right)$，

所以 $=\dfrac{\sqrt{1-\frac{a^2}{4}}-1}{a}-\dfrac{-\sqrt{1-\frac{a^2}{4}}-1}{a}=1\Rightarrow a=2$，直线 l：$x=2$，过定点 $(2,-1)$.

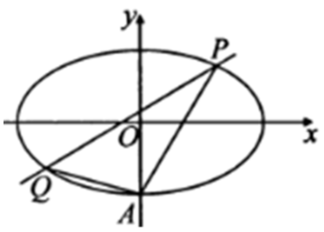
综上，直线 l 恒过定点 $(2,-1)$

题型4定点不在原点的斜率问题

例 1 如图，椭圆 E:$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 经过点 $A(0,-1)$，且离心率为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

(Ⅰ) 求椭圆 E 的方程；

(Ⅱ) 经过点 $(1,1)$，且斜率为 k 的直线与椭圆 E 交于不同的两点 P，Q(均异于点 A)，证明：直线 AP 与 AQ 斜率之和为 2.



【解析】解法1：(Ⅰ) 由题设知，$\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$b=1$，结合 $a^2=b^2+c^2$，解得 $a=\sqrt{2}$，$\therefore\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$.

(Ⅱ) 证明：由题意设直线 PQ 的方程为 $y=k(x-1)+1(k\neq0)$，代入椭圆方程 $\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$，

可得 $(1+2k^2)x^2-4k(k-1)x+2k(k-2)=0$，由已知得 $(1,1)$ 在椭圆外，

设 $P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，$x_1x_2\neq0$，则 $x_1+x_2=\dfrac{4k(k-1)}{1+2k^2}$，$x_1x_2=\dfrac{2k(k-2)}{1+2k^2}$，

且 $\Delta=16k^2(k-1)^2-8k(k-2)(1+2k^2)>0$，解得 $k>0$ 或 $k<-2$.

则有直线 AP，AQ 的斜率之和为

$k_{AP}+k_{AQ}=\dfrac{y_1+1}{x_1}+\dfrac{y_2+1}{x_2}=\dfrac{kx_1+2-k}{x_1}+\dfrac{kx_2+2-k}{x_2}=2k+(2-k)\left(\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}\right)=2k+(2-k)\cdot\dfrac{x_1+x_2}{x_1x_2}$

$=2k+(2-k)\cdot\dfrac{4k(k-1)}{2k(k-2)}=2k-2(k-1)=2.$

即有直线 AP 与 AQ 斜率之和为 2.

解法 2:(2) 上移一个单位,椭圆 E' 和直线 L':$\begin{cases}\frac{x^2}{2}+(y-1)^2=1\\ mx+ny=1\end{cases}$, $mx+ny=1$ 过点 $(1,2)$,

$m+2n=1$, $m=1-2n$, $x^2+2(y-1)^2=2$, $x^2+2y^2-4y=0$, $2y^2+x^2-4y(mx+ny)=0$,

$(-4n+2)y^2-4mxy+x^2=0$, $\because x\neq 0$,同除 x^2,得 $(-4n+2)\left(\dfrac{y}{x}\right)^2-4m\dfrac{y}{x}+1=0$,

$k_1+k_2=-\dfrac{4m}{-4n+2}=\dfrac{2m}{1-2n}=\dfrac{2m}{m}=2.$

题目 1 (2017年全国卷理) 已知椭圆 C:$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$,四点 $P_1(1,1)$, $P_2(0,1)$, $P_3\left(-1,\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $P_4\left(1,\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 中恰有三点在椭圆 C 上.

(1) 求 C 的方程;

(2) 设直线 l 不经过 P_2 点且与 C 相交于 A,B 两点.若直线 P_2A 与直线 P_2B 的斜率的和为 -1,证明:l 过定点.

【解析】(1) 解:根据椭圆的对称性,$P_3\left(-1,\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $P_4\left(1,\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 两点必在椭圆 C 上,又 P_4 的横坐标为 1,

$\therefore$ 椭圆必不过 $P_1(1,1)$, $\therefore P_2(0,1)$, $P_3\left(-1,\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $P_4\left(1,\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 三点在椭圆 C 上,把 $P_2(0,1)$, $P_3\left(-1,\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 代入

椭圆 C,得:$\begin{cases}\frac{1}{b^2}=1\\ \frac{1}{a^2}+\frac{3}{4b^2}=1\end{cases}$,解得 $a^2=4$, $b^2=1$, $\therefore$ 椭圆 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$.

(2) 证法 1:①当斜率不存在时,设 l:$x=m$, $A(m,y_A)$, $B(m,-y_A)$,

$\because$ 直线 P_2A 与直线 P_2B 的斜率的和为 -1, $\therefore k_{P_2A}+k_{P_2B}=\dfrac{y_A-1}{m}+\dfrac{-y_A-1}{m}=\dfrac{-2}{m}=-1$,

解得 $m=2$,此时 l 过椭圆右顶点,不存在两个交点,故不满足.

②当斜率存在时,设 l:$y=kx+t$, $(t\neq 1)$, $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$,联立 $\begin{cases}y=kx+t\\ x^2+4y^2-4=0\end{cases}$,整理,得 $(1+4k^2)x^2+8ktx+4t^2-4=0$, $x_1+x_2=\dfrac{-8kt}{1+4k^2}$, $x_1x_2=\dfrac{4t^2-4}{1+4k^2}$,则 $k_{P_2A}+k_{P_2B}=\dfrac{y_1-1}{x_1}+\dfrac{y_2-1}{x_2}=$

$\dfrac{x_2(kx_1+t)-x_2+x_1(kx_2+t)-x_1}{x_1x_2}=\dfrac{\frac{8kt^2-8k-8kt^2+8kt}{1+4k^2}}{\frac{4t^2-4}{1+4k^2}}=\dfrac{8k(t-1)}{4(t+1)(t-1)}=-1$,又 $t\neq 1$, $\therefore t=-2k-1$,此时 $\Delta=-64k$,存在 k,使得 $\Delta>0$ 成立, $\therefore$ 直线 l 的方程为 $y=kx-2k-1$,当 $x=2$ 时, $y=-1$, $\therefore l$ 过定点 $(2,-1)$.

证法 2:下移 1 个单位得 E':$\dfrac{x^2}{4}+(y+1)^2=1$, $A'B'$:$mx+ny=1$, $\dfrac{x^2}{4}+y^2+2y=0$,

$x^2+4y^2+8y(mx+ny)=0$, $(8n+4)y^2+8mxy+x^2=0$,

$\because x\neq 0$ 同除以 x^2, $(8n+4)\left(\dfrac{y}{x}\right)^2+8m\left(\dfrac{y}{x}\right)+1=0$, $(8n+4)k^2+8mk+1=0$, $k_1+k_2=-\dfrac{8m}{8n+4}=-1$,

$8m=8n+4$, $2m-2n=1$, $\therefore mx+ny=1$ 过 $(2,-2)$,上移 1 个单位 $(2,-1)$.

题目 2 (2022 惠州模拟) 已知左焦点为 $F(-1,0)$ 的椭圆过点 $E\left(1,\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right)$,过点 $P(1,1)$ 分别作斜率为 k_1, k_2 的椭圆的动弦 AB,CD,设 M,N 分别为线段 AB,CD 的中点

(1) 求椭圆的标准方程；

(2) 若 P 为线段 AB 的中点，求 k_1；

(3) 若 $k_1+k_2=1$，求证：直线 MN 恒过定点，并求出定点坐标

【解析】(1) 由题意 $c=1$，且右焦点 $F'(1,0)$，$\therefore 2a=EF+EF'=2\sqrt{3}$，$b^2=a^2-c^2=2$，

$\therefore$ 所求椭圆方程为 $\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{2}=1$.

(2) 设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则 $\dfrac{x_1^2}{3}+\dfrac{y_1^2}{2}=1$①，$\dfrac{x_2^2}{3}+\dfrac{y_2^2}{2}=1$②

② − ①，可得 $k_1=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=-\dfrac{2(x_2+x_1)}{3(y_2+y_1)}=-\dfrac{2}{3}$.

(3) 证法 1：由题意，$k_1\neq k_2$，设 $M(x_M,y_M)$，直线 AB 的方程为 $y-1=k_1(x-1)$，即 $y=k_1x+k_2$，

代入椭圆方程并化简得 $(2+3k_1^2)x^2+6k_1k_2x+3k_2^2-6=0$，$\therefore x_M=\dfrac{-3k_1k_2}{2+3k_1^2}$，$y_M=\dfrac{2k_2}{2+3k_1^2}$，

同理，$x_N=\dfrac{-3k_1k_2}{2+3k_2^2}$，$y_N=\dfrac{2k_1}{2+3k_2^2}$，

当 $k_1k_2\neq 0$ 时，直线 MN 的斜率 $k=\dfrac{y_M-y_N}{x_M-x_N}=\dfrac{10-6k_1k_2}{-9k_1k_2}$，直线 MN 的方程为 $y-\dfrac{2k_2}{2+k_1^2}=$ $\dfrac{10-6k_1k_2}{-9k_1k_2}\left(x-\dfrac{-3k_1k_2}{2+3k_1^2}\right)$，即 $y=\dfrac{10-6k_1k_2}{-9k_1k_2}x-\dfrac{2}{3}$，此时直线过定点 $\left(0,-\dfrac{2}{3}\right)$.

当 $k_1k_2=0$ 时，直线 MN 即为 y 轴，此时亦过点 $\left(0,-\dfrac{2}{3}\right)$.

综上，直线 MN 恒过定点，且坐标为 $\left(0,-\dfrac{2}{3}\right)$.

证法 2：设过点 P 的弦的中点坐标为 (x_0,y_0)，由点差法得 $\dfrac{y_0-1}{x_0-1}\cdot\dfrac{y_0}{x_0}=-\dfrac{2}{3}$，即中点的轨迹方程为 $2(x^2-x)$ $+3(y^2-y)=0$，将点 P 平移到原点，整体左移 1 个单位，下移 1 个单位，设平移后的 MN 方程为 $mx+ny=$ 1，曲线为 $2[(x+1)^2-(x+1)]+3[(y+1)^2-(y+1)]=0$，

$2x^2+3y^2+3y(mx+ny)+2x(mx+ny)=0$，$(3+3n)y^2+(2n+3m)xy+(2+2m)x^2=0$，

同除以 x^2，得 $(3+3n)k^2+(2n+3m)k+2+2m=0$，$\because k_1+k_2=1$，$\therefore -\dfrac{2n+3m}{3+3n}=1$，$-m-\dfrac{3}{5}n=1$，

$\therefore$ 过定点 $\left(-1,-\dfrac{5}{3}\right)$，则平移前的 MN 过定点 $\left(0,-\dfrac{2}{3}\right)$.

题目 3 (2022 阎良区期末) 已知抛物线 $C:x^2=2py(p>0)$，直线 l 经过抛物线 C 的焦点，且垂直于抛物线 C 的对称轴，直线 l 与抛物线 C 交于 M，N 两点，且 $|MN|=4$.

(1) 求抛物线 C 的方程；

(2) 已知点 $P(2,1)$，直线 $m:y=k(x+2)$ 与抛物线 C 相交于不同的两点 A，B，设直线 PA 与直线 PB 的斜率分别为 k_1 和 k_2，求证：$k_1\cdot k_2$ 为定值.

【答案】(1)$x^2=4y$

(2) 证明见解析

【分析】(1) 将 $|MN|$ 用 p 表示，得出 p 的值，进而得抛物线方程；

(2) 联立直线与抛物线的方程，根据斜率计算公式结合韦达定理即可得结果.

【详解】(1) 由题意可得 $2p=4$，得 $p=2$，

$\therefore$ 抛物线 $C:x^2=4y$.

(2) 证明：$m:y=k(x+2)$，联立 $\begin{cases}y=k(x+2)\\x^2=4y\end{cases}$，得 $x^2-4kx-8k=0$.

由 $\Delta=16k^2+32k>0$，得 $k>0$ 或 $k<-2$，

设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则 $x_1+x_2=4k$，$x_1x_2=-8k$，

$$\therefore k_1k_2=\frac{y_1-1}{x_1-2}\cdot\frac{y_2-1}{x_2-2}=\frac{\frac{x_1^2}{4}-1}{x_1-2}\cdot\frac{\frac{x_2^2}{4}-1}{x_2-2}$$

$$=\frac{(x_1+2)(x_2+2)}{16}=\frac{x_1x_2+2(x_1+x_2)+4}{16}=\frac{-8k+8k+4}{16}=\frac{1}{4}.$$

题目 4 已知椭圆 C 过点 $A\left(1,\frac{3}{2}\right)$，两个焦点为 $(-1,0)$，$(1,0)$.

(I) 求椭圆 C 的标准方程；

(II) E，F 是椭圆上的两个动点，

(1) 如果直线 AE 的斜率与 AF 的斜率之和为 2，证明直线 EF 恒过定点；

(2) 如果直线 AE 的斜率与 AF 的斜率之积为 2，证明直线 EF 恒过定点.

【分析】本题定点 $A\left(1,\frac{3}{2}\right)$ 不再是坐标原点，若坐标系原点平移到与 $A\left(1,\frac{3}{2}\right)$ 重合，则问题就转化为定点为坐标原点的类型，则可以采取类型一的齐次化解法.

【解析】(I) 椭圆 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$，过程略；

(II) 法一：(平移构造 + 齐次化) 平移坐标系.

【解析】平移坐标系，使得坐标原点和点 $A\left(1,\frac{3}{2}\right)$ 重合，则 $\begin{cases}x=x'+1\\y=y'+\frac{3}{2}\end{cases}$，得新坐标系 $x'Oy'$ 中，

在新坐标系中，椭圆方程为 $\frac{(x'+1)^2}{4}+\frac{\left(y'+\frac{3}{2}\right)^2}{3}=1$，化简得

$$3x'^2+4y'^2+6x'+12y'=0 \text{ ①},$$

直线 EF 平移后变为 $E'F'$，其方程不妨设为 $mx'+ny'=1$，代入①构建齐次式得

$$3x'^2+4y'^2+6x'(mx'+ny')+12y'(mx'+ny')=0,$$

整理得

$$(4+12n)y'^2+(6n+12m)x'y'+(3+6m)x'^2=0,$$

两边同除以 x'^2

$$\text{得 }(4+12n)\left(\frac{y'}{x'}\right)^2+(6n+12m)\frac{y'}{x'}+(3+6m)=0 \text{ ②},$$

易知 $k_{AE'}$ 和 $k_{AF'}$ 是方程②的两个根，由韦达定理得

$$k_{AE'}+k_{AF'}=-\frac{6n+12m}{4+12n}=2,$$

化简得 $n=-\frac{6}{15}m-\frac{4}{15}$，代入直线 $mx'+ny'=1$ 得 $mx'+\left(-\frac{6}{15}m-\frac{4}{15}\right)y'=1$，整理得

$$m\left(x'-\frac{6}{15}y'\right)-\frac{4}{15}y'-1=0,$$

直线 $E'F'$ 恒过 $x'-\frac{6}{15}y'=0$ 和直线 $-\frac{4}{15}y'-1=0$ 的交点 $\left(-\frac{3}{2},-\frac{15}{4}\right)$，

则直线 EF 恒定过点 $\left(-\frac{1}{2},-\frac{9}{4}\right)$.

(2) $k_{AE'}\cdot k_{AF'}=\frac{3+6m}{4+12n}=2$，即 $m=4n+\frac{5}{6}$，直线 $E'F'$ 的方程为 $n(4x'+y')+\frac{5}{6}x'-1=0$，

直线 $E'F'$ 恒过 $4x'+y'=0$ 和直线 $\frac{5}{6}x'-1=0$ 的交点 $\left(\frac{6}{5},-\frac{10}{3}\right)$，则直线 EF 恒定过点 $\left(\frac{11}{5},-\frac{33}{10}\right)$.

法二：(平移构造 + 齐次化) 平移直线和平移椭圆.

【解析】设直线 EF 的方程为 $y=kx+m$，即 $y-\frac{3}{2}=k(x-1)+k+m-\frac{3}{2}$，变形得 $\frac{y-\frac{3}{2}-k(x-1)}{k+m-\frac{3}{2}}=1$，

将椭圆 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 变形为 $\frac{[(x-1)+1]^2}{4}+\frac{\left[\left(y-\frac{3}{2}\right)+\frac{3}{2}\right]^2}{3}=1$

展开整理得 $3(x-1)^2+4\left(y-\frac{3}{2}\right)^2+6\left[(x-1)+2\left(y-\frac{3}{2}\right)\right]\cdot 1=0$，

将直线进行“1”的代换得

$$3(x-1)^2+4\left(y-\frac{3}{2}\right)^2+6\left[(x-1)+2\left(y-\frac{3}{2}\right)\right]\cdot\frac{y-\frac{3}{2}-k(x-1)}{k+m-\frac{3}{2}}=0,$$

去分母化简得

$$4\left(k+m+\frac{3}{2}\right)\left(y-\frac{3}{2}\right)^2+6(1-2k)(x-1)\left(y-\frac{3}{2}\right)+\left(3m-3k-\frac{9}{2}\right)(x-1)^2=0,$$

等式同除以 $(x-1)^2$ 得

$$4\left(k+m+\frac{3}{2}\right)\left(\frac{y-\frac{3}{2}}{x-1}\right)^2+6(1-2k)\frac{y-\frac{3}{2}}{x-1}+3m-3k-\frac{9}{2}=0*,$$

因此 $\frac{y-\frac{3}{2}}{x-1}$ 是方程 $*$ 的实数根，设 $E(x_1,y_1)$，$F(x_2,y_2)$，

则 $k_{AE}=\frac{y_1-\frac{3}{2}}{x_1-1}$ 和 $k_{AE}=\frac{y_2-\frac{3}{2}}{x_2-1}$ 是方程 $*$ 的两个实数根，①

由韦达定理得：$k_{AE}+k_{AE}=\frac{-6(1-2k)}{4\left(k+m+\frac{3}{2}\right)}=2$，即 $-3(1-2k)=4k+4m+6$，即 $2k=4m+9$，

代入直线 EF 的方程得 $y=kx+\frac{2k-9}{4}=k\left(x+\frac{1}{2}\right)-\frac{9}{4}$，

所以直线 EF 恒定过定点 $\left(-\frac{1}{2},-\frac{9}{4}\right)$.

②由韦达定理得 $k_{AE}\cdot k_{AE}=\frac{3m-3k-\frac{9}{2}}{4\left(k+m+\frac{3}{2}\right)}=2$，所以 $m=\frac{11k+\frac{33}{2}}{-5}$，

代入直线 EF 的方程为 $y=kx+\frac{11k+\frac{33}{2}}{-5}=k\left(x-\frac{11}{5}\right)-\frac{33}{10}$，

所以直线 EF 恒定过定点 $\left(\frac{11}{5},-\frac{33}{10}\right)$.

法三：(常规解法).

【解析】设 $E(x_1,y_1)$，$F(x_2,y_2)$，直线 EF 的方程为 $y=kx+b$，联立 $\begin{cases}y=kx+b\\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1\end{cases}$ 得

$$(3+4k^2)x^2+8kbx+4b^2-12=0,$$

由韦达定理得

$$x_1+x_2=-\frac{8kb}{3+4k^2},\ x_1x_2=\frac{4b^2-12}{3+4k^2}.$$

由题意知，$k_{AE}+k_{AF}=\frac{y_1-\frac{3}{2}}{x_1-1}+\frac{y_2-\frac{3}{2}}{x_2-1}=2$，即 $\frac{kx_1+b-\frac{3}{2}}{x_1-1}+\frac{kx_2+b-\frac{3}{2}}{x_2-1}=2$，

去分母得 $\left(kx_1+b-\frac{3}{2}\right)(x_2-1)+\left(kx_2+b-\frac{3}{2}\right)(x_1-1)=2(x_1-1)(x_2-1)$，整理得

$$(2k-2)x_1x_2+\left(b-k+\frac{1}{2}\right)(x_1+x_2)+1-2b=0,$$

代入韦达定理得

$$(2k-2)\cdot\frac{4b^2-12}{3+4k^2}+\left(b-k+\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{8kb}{3+4k^2}\right)+1-2b=0,$$

去分母整理得 $8b^2+24k-27+4kb+6b-4k^2=0$，即 $8b^2+(4k+6)b-(4k^2-24k+27)=0$，

即 $8b^2+(4k+6)b-(2k-9)(2k-3)=0$，即 $[4b-(2k-9)][2b+(2k-3)]=0$，

故 $b=\frac{k}{2}-\frac{9}{4}$，或 $b=-k+\frac{3}{2}$.

当 $b=\frac{k}{2}-\frac{9}{4}$ 时，直线 $EFy=kx+b=k\left(x+\frac{1}{2}\right)-\frac{9}{4}$ 恒过定点 $\left(-\frac{1}{2},-\frac{9}{4}\right)$；

当 $b=-k+\frac{3}{2}$ 时，直线 EF 的方程为 $y=kx+b=k(x-1)+\frac{3}{2}$ 恒过定点 $\left(1,\frac{3}{2}\right)$ 与 A 点重合，不符合题意，舍去.

综上：直线 EF 恒过定点 $\left(-\frac{1}{2},-\frac{9}{4}\right)$.

【方法小结】解法三是常规方法，需要较强代数恒等变形能力；解法一和解法二通过平移构造二元二次齐次式，使得运算难度大大降低，及时处理的过程有所不同. 对于曲线上两个点与定点连线斜率问题，当定点不在作用原点时，往往可以像解法一一样把坐标系原点平到定点处，然后按照定点为原点的处理方法求解，但是最后一定记得把求解结果平移回去；当然也可以按照解法二的方法来处理，但是这个计算往往没有解法一那么简洁. 解法二的操作方法如下：一般地，构造齐次方程的方法为：设定点 $P(a,b)$，直线与曲线的交点为 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，将圆锥曲线的方程及直线方程都转化为关于 $(x-a)$，$(x-b)$ 的方程，使直线方程具有 $\frac{(y-b)+k(x-a)}{m}=1$ 的形式，在圆锥曲线的方程中，二次项不变，一次项乘以 $\frac{(y-b)+k(x-a)}{m}$，常数项乘以 $\left[\frac{(y-b)+k(x-a)}{m}\right]^2$，即构造成为关于 $(x-a)$，$(x-b)$ 的齐次方程，然后等式两边同乘以 $(x-a)(x-b)$，从而使得所研究直线的斜率为该方程的两个根，达到简化数学运算的目的

题目 5 (2022 滁州期末) 已知点 A 在圆 $C:(x-\sqrt{2})^2+y^2=16$ 上，$B(-\sqrt{2},0)$，$P(0,\sqrt{2})$，线段 AB 的垂直平分线与 AC 相交于点 D.

(1) 求动点 D 的轨迹方程；

(2) 若过点 $Q(0,-1)$ 的直线 l 斜率存在，且直线 l 与动点 D 的轨迹相交于 M，N 两点. 证明：直线 PM 与 PN 的斜率之积为定值.

【答案】(1) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$; (2) $-\frac{3}{2}-\sqrt{2}$.

【解析】(1) 由圆的方程可得：圆心 $C(\sqrt{2},0)$，半径 $r=4$，$|DA|=|DB|$，$|DB|+|DC|$ $=|DA|+|DC|=|AC|=r=4>|BC|=2\sqrt{2}$，由椭圆的定义即可求解；

(2) 设 $l:y=kx-1$，$M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，联立直线与椭圆的方程，利用根与系数的关系计算 x_1+x_2，x_1x_2，再计算 $k_1k_2=\frac{y_1-\sqrt{2}}{x_1}\cdot\frac{y_2-\sqrt{2}}{x_2}=\frac{(kx_1-\sqrt{2}-1)}{x_1}\cdot\frac{(kx_2-\sqrt{2}-1)}{x_2}$ 即可求解.

【详解】(1) 由 $C:(x-\sqrt{2})^2+y^2=16$ 得，圆心 $C(\sqrt{2},0)$，半径 $r=4$，

$\because$ 点 D 在线段 AB 的垂直平分线上，

$\therefore |DA|=|DB|$，

$\therefore$ $|DB|+|DC|=|DA|+|DC|=|AC|=r=4>|BC|=2\sqrt{2}$，

由椭圆的定义可得动点 D 的轨迹是以 $B(-\sqrt{2},0)$，$C(\sqrt{2},0)$ 为焦点，

长轴长为 $2a=4$ 的椭圆.

从而 $a=2,c=\sqrt{2},b^2=a^2-c^2=2$，

故所求动点D的轨迹方程为$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1$.

(2) 设$l:y=kx-1$, $M(x_1,y_1)$, $N(x_2,y_2)$

由$\begin{cases}y=kx-1\\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1\end{cases}$消去$y$得$(2k^2+1)x^2-4kx-2=0$,

显然$\Delta=(-4k)^2+8(2k^2+1)=k^2+8>0$

$\therefore x_1+x_2=\dfrac{4k}{2k^2+1}, x_1x_2=-\dfrac{2}{2k^2+1}$.

$\because x_1\neq 0, x_2\neq 0$, $\therefore$ 可设直线PM与PN的斜率分别为k_1,k_2则

$k_1k_2=\dfrac{y_1-\sqrt{2}}{x_1}\cdot\dfrac{y_2-\sqrt{2}}{x_2}=\dfrac{(kx_1-\sqrt{2}-1)}{x_1}\cdot\dfrac{(kx_2-\sqrt{2}-1)}{x_2}$

$=\dfrac{k^2x_1x_2-(\sqrt{2}+1)k(x_1+x_2)+2\sqrt{2}+3}{x_1x_2}=k^2+\dfrac{-(\sqrt{2}+1)k\times\frac{4k}{2k^2+1}+2\sqrt{2}+3}{-\frac{2}{2k^2+1}}$

$=k^2+\dfrac{2k^2+3+2\sqrt{2}}{-2}=-\dfrac{3}{2}-\sqrt{2}$

即直线PM与PN的斜率之积为定值.

【点睛】方法点睛:求轨迹方程的常用方法

(1) 直接法:如果动点满足的几何条件本身就是一些几何量,如(距离和角)的等量关系,或几何条件简单明了易于表达,只需要把这种关系转化为x,y的等式,就能得到曲线的轨迹方程;

(2) 定义法:某动点的轨迹符合某一基本轨迹如直线、圆锥曲线的定义,则可根据定义设方程,求方程系数得到动点的轨迹方程;

(3) 几何法:若所求轨迹满足某些几何性质,如线段的垂直平分线,角平分线的性质,则可以用几何法,列出几何式,再代入点的坐标即可;

(4) 相关点法(代入法):若动点满足的条件不变用等式表示,但动点是随着另一动点(称之为相关点)的运动而运动,且相关点满足的条件是明显的或是可分析的,这时我们可以用动点的坐标表示相关点的坐标,根据相关点坐标所满足的方程,求得动点的轨迹方程;

(5) 交轨法:在求动点轨迹时,有时会出现求两个动曲线交点的轨迹问题,这类问题常常通过解方程组得出交点(含参数)的坐标,再消去参数即可求出所求轨迹的方程.

题型5定点不在原点转化为斜率问题

例1 若A,B为抛物线C: $y^2=2px$上两点,且以AB为直径的圆过点$P(p,\sqrt{2}p)$,证明:直线AB过定点.

【证明】因为以AB为直径的圆过点P,所以$PA\perp PB$,即$k_{PA}\cdot k_{PB}=-1$.

设$A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$,则$k_{PA}=\dfrac{y_1}{x_1}$, $k_{PB}=\dfrac{y_2}{x_2}$. 令$\begin{cases}x=x'+p\\ y=y'+\sqrt{2}p\end{cases}$,

代入抛物线方程C得: $(y'+\sqrt{2}p)^2=2p(x'+p)$,整理得:

$$y'^2+2\sqrt{2}py'-2px'=0 *,$$

不妨设直线AB的方程为: $mx'+ny'=1$,

将其代入$*$式得: $y'^2+2\sqrt{2}py'(mx'+ny')-2px'(mx'+ny')=0$,

化简得:

$$(1+2\sqrt{2}pn)y'^2+(2\sqrt{2}pm-2pn)x'y'-2pmx'^2=0,$$

因为$x\neq 0$,方程两边同除以x^2,得

$$(1+2\sqrt{2}pn)\left(\frac{y'}{x'}\right)^2+(2\sqrt{2}pm-2pn)\frac{y'}{x'}-2pm=0 ①,$$

易知 $k_{PA'}=\frac{y_1'}{x_1'}$ 和 $k_{PB'}=\frac{y_2'}{x_2'}$ 是方程①的两个根，

由韦达定理得 $k_{PA'}\cdot k_{PB'}=-\frac{2pm}{1+2\sqrt{2}pn}=-1$，即 $m=\frac{1}{2p}+\sqrt{2}n$，

代入求直线方程 $\left(\frac{1}{2p}+\sqrt{2}n\right)x'+ny'=1$ 得

$$(\sqrt{2}+y')n+\frac{1}{2p}x'-1=0,$$

所以直线 $A'B'$ 过 $\sqrt{2}+y'=0$ 和 $\frac{1}{2p}x'-1=0$ 的交点，即 $(2p,-\sqrt{2})$，

利用变换 $\begin{cases}x=x'+p\\y=y'+\sqrt{2}p\end{cases}$ 将其平移回原坐标系得 $(3p,\sqrt{2}p-\sqrt{2})$，故直线恒定过点 $(3p,\sqrt{2}p-\sqrt{2})$.

题目 1 设 A，B 为曲线 C:$y=\frac{x^2}{4}$ 上两点，A 与 B 的横坐标之和为4.

(1) 求直线 AB 的斜率；

(2) 设 M 为曲线 C 上一点，C 在 M 处的切线与直线 AB 平行，且 $AM\perp BM$，求直线 AB 的方程.

【解析】(1) 设 $A\left(x_1,\frac{x_1^2}{4}\right)$，$B\left(x_2,\frac{x_2^2}{4}\right)$ 为曲线 C:$y=\frac{x^2}{4}$ 上两点，

则直线 AB 的斜率为 $k=\frac{\frac{x_1^2}{4}-\frac{x_2^2}{4}}{x_1-x_2}=\frac{1}{4}(x_1+x_2)=\frac{1}{4}\times4=1$.

(2) 解法1：设直线 AB 的方程为 $y=x+t$，代入曲线 C:$y=\frac{x^2}{4}$，可得 $x^2-4x-4t=0$，即有 $x_1+x_2=4$，$x_1x_2=-4t$，再由 $y=\frac{x^2}{4}$ 的导数为 $y'=\frac{1}{2}x$，设 $M\left(m,\frac{m^2}{4}\right)$，可得 M 处切线的斜率为 $\frac{1}{2}m$，

由 C 在 M 处的切线与直线 AB 平行，可得 $\frac{1}{2}m=1$，解得 $m=2$，即 $M(2,1)$，由 $AM\perp BM$ 可得，$k_{AM}\cdot k_{BM}=-1$，即为 $\frac{\frac{x_1^2}{4}-1}{x_1-2}\cdot\frac{\frac{x_2^2}{4}-1}{x_2-2}=-1$，化为 $x_1x_2+2(x_1+x_2)+20=0$，即为 $-4t+8+20=0$，解得 $t=7$，则直线 AB 的方程为 $y=x+7$.

解法2：$y=\frac{x^2}{4}$，$y'=\frac{x}{2}=1$，$x=2$，$\therefore M(2,1)$，左移2个单位，下移1个单位 C':$y+1=\frac{(x+2)^2}{4}$，$A'B'$:$mx+ny=1$，$4y+4=x^2+4x+4$，$x^2+4(x-y)(mx+ny)=0$，$x^2+4(mx^2+nxy-mxy-ny^2)=0$，

$(1+4m)x^2+4(n-m)xy-4ny^2=0$，$x\neq0$，同除以 x^2，得 $-4n\left(\frac{y}{x}\right)^2+4(n-m)\frac{y}{x}+(1+4m)=0$，

$4nk^2-4(n-m)k-(1+4m)=0$，$mx+ny=1$，斜率 $-\frac{m}{n}=1$，$m=-n$，$k_1k_2=\frac{-(1+4m)}{4n}=-1$，

$1+4m=4n$，$n=\frac{1}{8}$，$m=-\frac{1}{8}$，$-\frac{1}{8}x+\frac{1}{8}y=1$，$x-y+8=0$ 右2，上1，$(x-2)-(y-1)+8=0$，

$x-y+7=0$.

题目 2 (2020·山东) 已知椭圆 C:$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$，且过点 $A(2,1)$.

(1) 求 C 的方程；

(2) 点 M，N 在 C 上，且 $AM\perp AN$，$AD\perp MN$，D 为垂足. 证明：存在定点 Q，使得 $|DQ|$ 为定值.

【解析】(1) $\because$ 离心率 $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$\therefore a=\sqrt{2}c$，又 $a^2=b^2+c^2$，$\therefore b=c$，$a=\sqrt{2}b$，

把点 $A(2,1)$ 代入椭圆方程得，$\dfrac{4}{2b^2}+\dfrac{1}{b^2}=1$，解得 $b^2=3$，故椭圆 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{y^2}{3}=1$.

(2) 证法1：①当直线 MN 的斜率存在时，设其方程为 $y=kx+m$，

联立 $\begin{cases} y=kx+m \\ \frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{3}=1 \end{cases}$，得 $(2k^2+1)x^2+4kmx+2m^2-6=0$，

由 $\Delta=(4km)^2-4(2k^2+1)(2m^2-6)>0$，知 $m^2<6k^2+3$，

设 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，则 $x_1+x_2=-\dfrac{4km}{2k^2+1}$，$x_1x_2=\dfrac{2m^2-6}{2k^2+1}$，

$\because AM\perp AN$，$\therefore \overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AN}=(x_1-2,y_1-1)\cdot(x_2-2,y_2-1)=0$，

即 $(k^2+1)x_1x_2+(km-k-2)(x_1+x_2)+m^2-2m+5=0$，

$\therefore (k^2+1)\cdot\dfrac{2m^2-6}{2k^2+1}+(km-k-2)\left(-\dfrac{4km}{2k^2+1}\right)+m^2-2m+5=0$，化简整理得，$4k^2+8km+3m^2-2m-1=(2k+m-1)(2k+3m+1)=0$，$\therefore m=1-2k$ 或 $m=-\dfrac{2k+1}{3}$，

当 $m=1-2k$ 时，$y=kx-2k+1$，过定点 $A(2,1)$，不符合题意，舍去；

当 $m=-\dfrac{2k+1}{3}$ 时，$y=kx-\dfrac{2k+1}{3}$，过定点 $\left(\dfrac{2}{3},-\dfrac{1}{3}\right)$.

设 $D(x_0,y_0)$，则 $y_0=kx_0+m$，

(i) 若 $k\neq0$，$\because AD\perp MN$，$\therefore k\cdot\dfrac{kx_0+m-1}{x_0-2}=-1$，解得 $x_0=\dfrac{2k^2+4k+6}{3k^2+3}$，$y_0=\dfrac{3k^2+4k-1}{3k^2+3}$，

$\therefore \left(x_0-\dfrac{4}{3}\right)^2+\left(y_0-\dfrac{1}{3}\right)^2=\left(\dfrac{-2k^2+4k+2}{3k^2+3}\right)^2+\left(\dfrac{2k^2+4k-2}{3k^2+3}\right)^2=\dfrac{8(k^4+2k^2+1)}{9(k^2+1)^2}=\dfrac{8}{9}$，

$\therefore$ 点 D 在以 $\left(\dfrac{4}{3},\dfrac{1}{3}\right)$ 为圆心，$\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ 为半径的圆上，故存在 $Q\left(\dfrac{4}{3},\dfrac{1}{3}\right)$，使得 $|DQ|=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$，为定值.

(ii) 若 $k=0$，则直线 MN 的方程为 $y=-\dfrac{1}{3}$，$\because AD\perp MN$，$\therefore D\left(2,-\dfrac{1}{3}\right)$，

$\therefore |DQ|=\sqrt{\left(\dfrac{4}{3}-2\right)^2+\left(\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}\right)^2}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$，为定值.

②当直线 MN 的斜率不存在时，设其方程为 $x=t$，$M(t,s)$，$N(t,-s)$，且 $\dfrac{t^2}{6}+\dfrac{s^2}{3}=1$，

$\because AM\perp AN$，$\therefore \overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AN}=(t-2,s-1)\cdot(t-2,-s-1)=t^2-4t-s^2+5=\dfrac{3}{2}t^2-4t+2=0$，解得 $t=\dfrac{2}{3}$ 或 2(舍 2)，$\therefore D\left(\dfrac{2}{3},1\right)$，此时 $|DQ|=\sqrt{\left(\dfrac{4}{3}-\dfrac{2}{3}\right)^2+\left(\dfrac{1}{3}-1\right)^2}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$，为定值.

综上所述，存在定点 $Q\left(\dfrac{4}{3},\dfrac{1}{3}\right)$，使得 $|DQ|$ 为定值，且该定值为 $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

证法2：将图像向左移动两个单位，向下移动一个单位，那么平移后的 C' 和直线 $M'N'$：

$\begin{cases} \frac{(x+2)^2}{6}+\frac{(y+1)^2}{3}=1 \\ mx+ny=1 \end{cases}$，联立得：$x^2+2y^2+(4x+4y)(mx+ny)=0$，两边同时除以 x^2：$(4n+2)y^2+(4m+4n)xy+(4m+1)x^2=0$，得：$(4n+2)k^2+(4m+4n)k+(4m+1)=0$，

$\because AM\perp AN$，$\therefore k_{AM}\cdot k_{AN}=-1$，$\therefore \dfrac{4m+1}{4n+2}=-1$，$4m+1=-4n-2$，

即 $-\dfrac{4}{3}m+\left(-\dfrac{4}{3}n\right)=1$，$M'N'$ 过定点 $\left(-\dfrac{4}{3},--\dfrac{4}{3}\right)$，则平移前该直线过定点 $P\left(\dfrac{2}{3},-\dfrac{1}{3}\right)$.

在 $\triangle ADP$ 中，$AD\perp DP$，则 D 点的轨迹是以 AP 为直径，

$\because A$ 为定点，P 为定点，则 $|AP|$ 为定值，则 Q 为 AP 中点，此时 $|DQ|$ 为定值，

$\because A(2,1)$，$P\left(\frac{2}{3},-\frac{1}{3}\right)$，则 $Q\left(\frac{4}{3},\frac{1}{3}\right)$，$|DQ|=\frac{1}{2}|AP|=\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

题目 3　(2022武汉模拟) 已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左右顶点分别为 A，B，过椭圆内点 $D\left(\frac{2}{3},0\right)$ 且不与 x 轴重合的动直线交椭圆 C 于 P，Q 两点，当直线 PQ 与 x 轴垂直时，$|PD|=|BD|=\frac{4}{3}$.

(1) 求椭圆 C 的标准方程；

(2) 设直线 AP，AQ 和直线 $l:x=t$ 分别交于点 M，N，若 $MD\perp ND$ 恒成立，求 t 的值.

【解析】(Ⅰ) 由 $|BD|=\frac{4}{3}$ 得 $a=\frac{2}{3}+\frac{4}{3}=2$，故 C 的方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{b^2}=1$，此时 $P\left(\frac{2}{3},\frac{4}{3}\right)$，

代入方程 $\frac{1}{9}+\frac{16}{9b^2}=1$，解得 $b^2=2$，故 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$.

(Ⅱ) 解法1：设直线 PQ 的方程为：$x=my+\frac{2}{3}$，与椭圆联立得 $(m^2+2)y^2+\frac{4m}{3}y\frac{32}{9}=0$，

设 $P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，则 $\begin{cases} y_1+y_2=\frac{-4m}{3(m^2+2)} \\ y_1y_2=\frac{-32}{9(m^2+2)} \end{cases}$，①

此时直线 PA 的方程为 $y=\frac{y_1}{x_1+2}(x+2)$，与 $x=t$ 联立，得点 $M\left(t,\frac{(t+2)y_1}{x_1+2}\right)$，同理，$N\left(t,\frac{(t+2)y_2}{x_2+2}\right)$，由

$MD\perp ND$，则 $k_{MD}\cdot k_{ND}=-1$，即 $\frac{(t+2)y_1}{\left(t-\frac{2}{3}\right)(x_1+2)}\cdot\frac{(t+2)y_2}{\left(t-\frac{2}{3}\right)(x_2+2)}=-1$，

$\therefore (t+2)^2y_1y_2+\left(t-\frac{2}{3}\right)^2\left(my_1+\frac{8}{3}\right)\left(my_2+\frac{8}{3}\right)=0$，即 $(t+2)^2y_1y_2+\left(t-\frac{2}{3}\right)^2\left[m^2y_1y_2+\frac{8m}{3}(y_1+y_2)+\frac{64}{9}\right]=0$，

把①代入得 $\frac{-32(t+2)^2}{9(m^2+2)}+\left(t-\frac{2}{3}\right)^2\left[\frac{-32m^2}{9(m^2+2)}-\frac{32m^2}{9(m^2+2)}+\frac{64}{9}\right]=0$，

化简得 $-32(t+2)^2+\left(t-\frac{2}{3}\right)^2[-32m^2-32m^2+64(m^2+2)]=0$，

即 $(t+2)^2-4\left(t-\frac{2}{3}\right)^2=0$，$t+2=\pm2\left(t-\frac{2}{3}\right)$，解得 $t=-\frac{2}{9}$ 或 $t=\frac{10}{3}$.

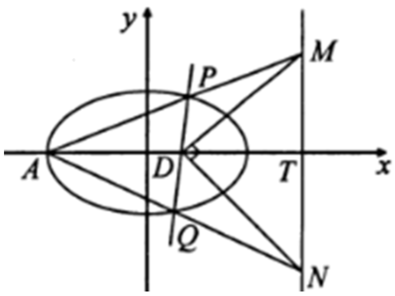
解法2：公共点 $A(-2,0)$，右移2个单位后 $P'Q':mx+ny=1$ 过 $D'\left(\frac{8}{3},0\right)$，$\therefore \frac{8}{3}m+0n=1$，$m=\frac{3}{8}$，

$\begin{cases} C':\frac{(x-2)^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1 \\ P'Q':mx+ny=1 \end{cases}$，$x^2+2y^2-4x(mx+ny)=0$，$2y^2-4nxy+(1-4m)x^2=0$，

等式两边同时除以 x，$2\left(\frac{y}{x}\right)^2-4n\frac{y}{x}+(1-4m)=0$，$k_{AP}\cdot k_{AQ}=k_{AM}\cdot k_{AN}=\frac{1-4m}{2}=-\frac{1}{4}$，

$\because MD\perp ND$，$\therefore k_{MD}\cdot k_{ND}=-1$，$\frac{k_{DM}\cdot k_{DN}}{k_{AM}\cdot k_{AN}}=\frac{-1}{-\frac{1}{4}}=4$，

直线 $MN:x=t$，$\frac{\frac{MT}{t-\frac{2}{3}}\cdot\left(-\frac{NT}{t-\frac{2}{3}}\right)}{\frac{MT}{t+2}\cdot\left(-\frac{NT}{t+2}\right)}=4$，$\frac{(t+2)^2}{\left(t-\frac{2}{3}\right)^2}=4$，解得 $t=-\frac{2}{9}$ 或 $t=\frac{10}{3}$.



题目 4 已知椭圆 C：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 经过点 $\left(1,\dfrac{\sqrt{6}}{2}\right)$，且离心率等于 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

(1) 求椭圆 C 的方程；

(2) 过点 $P(2,0)$ 作直线 PA,PB 交椭圆于 A，B 两点，且满足 $PA\perp PB$，试判断直线 AB 是否过定点，若过定点请写出点坐标.

【解析】(Ⅰ) 椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 经过点 $\left(1,\dfrac{\sqrt{6}}{2}\right)$，且离心率等于 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，椭圆 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1$;

(Ⅱ) 方法一：(常规方法)

设直线 AB 的方程为 $y=kx+m$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$

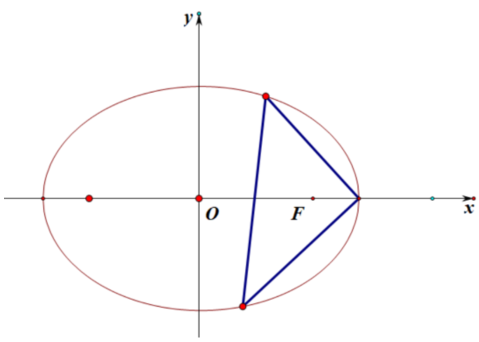
联立椭圆方程得 $(1+2k)x^2+4mkx+2(m^2-2)=0$，则 $x_1+x_2=-\dfrac{4km}{1+2k^2}$，$x_1x_2=\dfrac{2m^2-4}{1+2k^2}$.

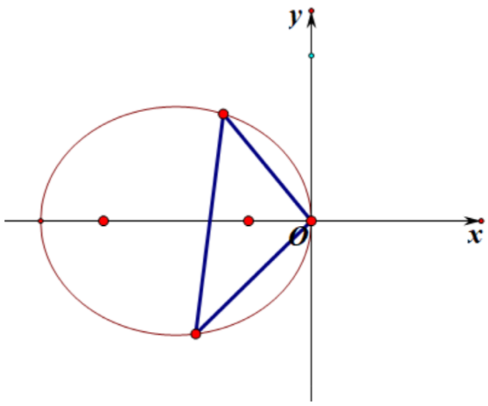
$y_1y_2=(kx_1+m)(kx_2+m)=k^2x_1x_2+mk(x_1+x_2)+m^2=\dfrac{m^2-4k^2}{1+2k^2}$,

由 $PA\perp PB$，得 $(x_1-2)(x_2-2)+y_1y_2=0$，代入得 $4k^2+8mk+3m^2=0$，

$m=-2k$(舍去)，$m=-\dfrac{2}{3}k$，直线 AB 的方程为 $y=k\left(x-\dfrac{2}{3}\right)$，所以过定点 $\left(\dfrac{2}{3},0\right)$.

方法二：(平移坐标＋齐次化)





把椭圆向左平移 2 个单位，(是为了平移到原点)

则方程变成 $(x+2)^2+2y^2=4$(左加右减，上减下加)

设直线为 $mx+ny=1$；下面对椭圆方程进行化简 $x^2+4x+2y^2=0$；

我们需要的形式是不出现一次项，都是二次项，此时将 $4x$ 乘上一个 1，也就是 $mx+ny$ 即可，此时椭圆方程变成 $x^2+4x(mx+ny)+2y^2=0\Rightarrow 2y^2+4nxy+(4m+1)x^2=0$，两边同时除以 x^2，令 $k=\dfrac{y}{x}$，则化简为 $2k^2+4nk+4m+1=0$，又因为 $k_1k_2=-1\Rightarrow m=-\dfrac{3}{4}\Rightarrow -\dfrac{3}{4}x+ny=1$，则恒过 $\left(-\dfrac{4}{3},0\right)$，再向右平移 2 个单位，则恒过 $\left(\dfrac{2}{3},0\right)$.

题型6 定点不在原点之二级结论第三定义的使用

划重点

齐次化运算为什么不是解决圆锥曲线的常规武器

通过上面分析，我们可以发现，齐次化运算比传统的设而不求运算量大大的降低，但为什么齐次化运算并不是常规武器呢？首先我们总结一下齐次化运算步骤

$$\begin{cases}f(x,\ y)=0,\\ g(x,\ y)=0\end{cases}\Rightarrow A\left(\frac{y}{x}\right)^2+B\cdot\frac{y}{x}+C=0\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{y_1}{x_1}+\dfrac{y_2}{x_2}=-\dfrac{B}{A},\\ \dfrac{y_1}{x_1}\cdot\dfrac{y_2}{x_2}=\dfrac{C}{A}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}k_1+k_2=-\dfrac{B}{A},\\ k_1k_2=\dfrac{C}{A}.\end{cases}$$

通过上面的步骤可以看出，本方法适用于斜率的相关问题，有较大的局限性，当然，还有一个难点在于方程消元的基本思路是消未知数，而本方法是消去常数，这也是学生不适应之处．但更大的难点是如果通过审题，转化为斜率之积、之和问题．

齐次化运算在解析几何中的运算，只可以处理斜率之和（积）的问题，基本步骤如下：

$$\begin{cases}f(x,\ y)=0,\\ g(x,\ y)=0\end{cases}\Rightarrow A\left(\frac{y}{x}\right)^2+B\cdot\frac{y}{x}+C=0\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{y_1}{x_1}+\dfrac{y_2}{x_2}=-\dfrac{B}{A},\\ \dfrac{y_1}{x_1}\cdot\dfrac{y_2}{x_2}=\dfrac{C}{A}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}k_1+k_2=-\dfrac{B}{A},\\ k_1k_2=\dfrac{C}{A}\end{cases}$$，重点一在于通过分析题意，明确能不能用本方法，二在于直线方程的设元技巧，三在于消元中的齐次化运算．

例1 A,B 分别是椭圆 $E:\dfrac{x^2}{9}+y^2=1$ 左右顶点，P 是直线 $x=6$ 的动点，PA 交 E 于另一点 C，PB 交 E 于另一点 D．求证：直线 CD 过定点．

思路一：本问题没有直接的提到斜率之和（积），而且很容易入手，分别设直线 PA,PB，与椭圆方程联立，消去 x 得到关于 y 的常数项为0的方程，即可解出 C,D 坐标，然后写出 CD 方程．在实际运算中，C,D 坐标，CD 过定点运算量巨大．本方法少思、多算．解答如下：

证法一：设 $P(6,y_0)$，则直线 AP 的方程为：$y=\dfrac{y_0-0}{6-(-3)}(x+3)$，即：$y=\dfrac{y_0}{9}(x+3)$，联立直线 AP 的方程与椭圆方程可得：$\begin{cases}\dfrac{x^2}{9}+y^2=1\\ y=\dfrac{y_0}{9}(x+3)\end{cases}$，整理得：$(y_0^2+9)x^2+6y_0^2x+9y_0^2-81=0$，解得：$x=-3$ 或 $x=\dfrac{-3y_0^2+27}{y_0^2+9}$，

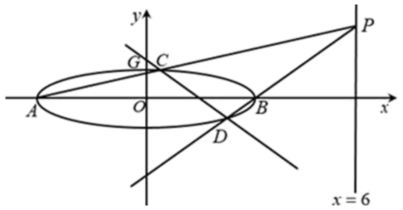
将 $x=\dfrac{-3y_0^2+27}{y_0^2+9}$ 代入直线 $y=\dfrac{y_0}{9}(x+3)$ 可得：$y=\dfrac{6y_0}{y_0^2+9}$，所以点 C 的坐标为 $\left(\dfrac{-3y_0^2+27}{y_0^2+9},\dfrac{6y_0}{y_0^2+9}\right)$．同理可得：点 D 的坐标为 $\left(\dfrac{3y_0^2-3}{y_0^2+1},\dfrac{-2y_0}{y_0^2+1}\right)$．

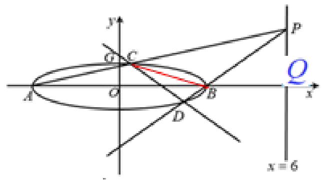
当 $y_0^2\neq3$ 时，直线 CD 的方程为：$y-\left(\dfrac{-2y_0}{y_0^2+1}\right)=\dfrac{\dfrac{6y_0}{y_0^2+9}-\left(\dfrac{-2y_0}{y_0^2+1}\right)}{\dfrac{-3y_0^2+27}{y_0^2+9}-\dfrac{3y_0^2-3}{y_0^2+1}}\left(x-\dfrac{3y_0^2-3}{y_0^2+1}\right)$，

整理可得：$y+\dfrac{2y_0}{y_0^2+1}=\dfrac{8y_0(y_0^2+3)}{6(9-y_0^4)}\left(x-\dfrac{3y_0^2-3}{y_0^2+1}\right)=\dfrac{8y_0}{6(3-y_0^2)}\left(x-\dfrac{3y_0^2-3}{y_0^2+1}\right)$，

整理得：$y=\dfrac{4y_0}{3(3-y_0^2)}x+\dfrac{2y_0}{y_0^2-3}=\dfrac{4y_0}{3(3-y_0^2)}\left(x-\dfrac{3}{2}\right)$，所以直线 CD 过定点 $\left(\dfrac{3}{2},0\right)$．

当 $y_0^2=3$ 时，直线 CD：$x=\dfrac{3}{2}$，直线过点 $\left(\dfrac{3}{2},0\right)$．故直线 CD 过定点 $\left(\dfrac{3}{2},0\right)$．





思路二：连接 CB，由椭圆第三定义得，$k_{CA}k_{CB}=-\dfrac{1}{9}$，而 $k_{CA}k_{CB}=-\dfrac{1}{9}$，$k_{CA}=\dfrac{PQ}{AQ}$，$k_{BD}=k_{BP}=\dfrac{PQ}{BQ}=\dfrac{1}{3}$，

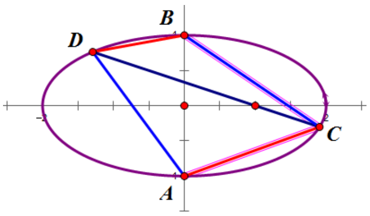
可得：$k_{BC}k_{BD}=-\dfrac{1}{3}$，就可以采用本方法解答.

证法二：设交点 $C(x_1,y_1)$，$D(x_2,y_2)$，即化为 $\dfrac{y_1}{x_1-3}\cdot\dfrac{y_2}{x_2-3}=-\dfrac{1}{3}$，

设 $x-3=t$，得 $t^2+9y^2+6t=0$，故设 $6=mt+ny$ 易算. 计算如下：

$9\left(\dfrac{y}{t}\right)^2+n\cdot\dfrac{y}{t}+(m+1)=0\Rightarrow k_1k_2=\dfrac{m+1}{9}=-\dfrac{1}{3}\Rightarrow m=-4\Rightarrow -4(x-3)+ny=6$，可知直线 CD 过定点 $\left(\dfrac{3}{2},\ 0\right)$.

题目 1 A,B 分别是椭圆 E:$\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ 下上两顶点，过 $(1,0)$ 的直线 l 交于 E 的 C，D，设直线 AC,BD 的斜率为 k_1,k_2，$k_1=2k_2$，求直线 l 的方程.



【分析】已知给出了 $k_1=2k_2$，但还是没有斜率之积(和)为定值，还是要用到椭圆的第三定义，$k_{AD}k_{BD}=-\dfrac{1}{4}$，得到 $k_{AC}k_{AD}=-\dfrac{1}{2}$，即可采用齐次化运算了.

【简解】设交点 $C(x_1,y_1)$，$D(x_2,y_2)$，即化为 $\dfrac{y_1}{x_1+1}\cdot\dfrac{y_2}{x_2+1}=-\dfrac{1}{2}$，

设 $y+1=t$，得 $x^2+4t^2-8t=0$，所以设 $8=mx+n(y+1)=mx+nt$ 易算. 计算如下：

$(4-n)\left(\dfrac{t}{x}\right)^2-m\cdot\dfrac{t}{x}+1=0$，$\therefore k_1k_2=\dfrac{1}{4-n}$，$\therefore \dfrac{1}{4-n}=-\dfrac{1}{2}$，$\therefore n=6$，又 l 过 $(1,0)$，得 $m=2$，$\therefore$ 直线 l 的方程的方程：$y=\dfrac{1}{3}x-\dfrac{1}{3}$.

题目 2 (2020·新课标 Ⅰ) 已知 A，B 分别为椭圆 E:$\dfrac{x^2}{a^2}+y^2=1(a>1)$ 的左、右顶点，G 为 E 的上顶点，$\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{GB}=8$. P 为直线 $x=6$ 上的动点，PA 与 E 的另一交点为 C，PB 与 E 的另一交点为 D.

(1) 求 E 的方程；

(2) 证明：直线 CD 过定点.

【解析】(1) 由题意 $A(-a,0)$，$B(a,0)$，$G(0,1)$，$\therefore \overrightarrow{AG}=(a,1)$，$\overrightarrow{GB}=(a,-1)$，$\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{GB}=a^2-1=8$，解得：$a=3$，故椭圆 E 的方程是 $\dfrac{x^2}{9}+y^2=1$.

(2) 证法 1：由 (1) 知 $A(-3,0)$，$B(3,0)$，设 $P(6,m)$，则直线 PA 的方程是 $y=\dfrac{m}{9}(x+3)$，联立

$\begin{cases}\frac{x^2}{9}+y^2=1\\ y=\frac{m}{9}(x+3)\end{cases}\Rightarrow(9+m^2)x^2+6m^2x+9m^2-81=0$，由韦达定理 $-3x_c=\dfrac{9m^2-81}{9+m^2}\Rightarrow x_c=\dfrac{-3m^2+27}{9+m^2}$，代入直线 PA 的方程为 $y=\dfrac{m}{9}(x+3)$ 得：$y_c=\dfrac{6m}{9+m^2}$，即 $C\left(\dfrac{-3m^2+27}{9+m^2},\dfrac{6m}{9+m^2}\right)$，

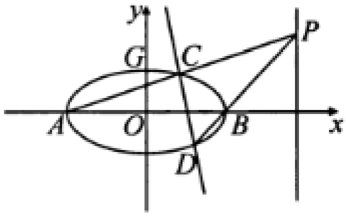
直线 PB 的方程是 $y=\dfrac{m}{3}(x-3)$，联立方程 $\begin{cases}\frac{x^2}{9}+y^2=1\\ y=\frac{m}{3}(x-3)\end{cases}\Rightarrow(1+m^2)x^2-6m^2x+9m^2-9=0$，

由韦达定理 $3x_D=\dfrac{9m^2-9}{1+m^2}\Rightarrow x_D=\dfrac{3m^2-3}{1+m^2}$，代入直线 PB 的方程为 $y=\dfrac{m}{3}(x-3)$ 得 $y_D=\dfrac{-2m}{1+m^2}$，即 $D\left(\dfrac{3m^2-3}{1+m^2},\dfrac{-2m}{1+m^2}\right)$，则①当 $x_c=x_D$ 即 $\dfrac{27-3m^2}{9+m^2}=\dfrac{3m^2-3}{m^2+1}$ 时，有 $m^2=3$，此时 $x_c=x_D=\dfrac{3}{2}$，即 CD 为直线 $x=\dfrac{3}{2}$.

② $x_C\neq x_D$ 时，直线 CD 的斜率 $K_{CD}=\dfrac{y_C-y_D}{x_C-x_D}=\dfrac{4m}{3(3-m^2)}$，

$\therefore$ 直线 CD 的方程是 $y-\dfrac{-2m}{1+m^2}=\dfrac{4m}{3(3-m^2)}\left(x-\dfrac{3m^2-3}{1+m^2}\right)$，整理得：

$y=\dfrac{4m}{3(3-m^2)}\left(x-\dfrac{3}{2}\right)$，直线 CD 过定点 $\left(\dfrac{3}{2},0\right)$. 综合①②故直线 CD 过定点 $\left(\dfrac{3}{2},0\right)$.



证法2：设 $P(6,t)$，$A(-3,0)$，$B(3,0)$，则 $k_{AC}=k_{AP}=\dfrac{t}{9}$，$k_{BD}=k_{BP}=\dfrac{t}{3}$，根据椭圆第三定义，$k_{AD}\cdot k_{BD}=\dfrac{b^2}{a^2}=-\dfrac{1}{9}$，$\therefore k_{AD}=-\dfrac{1}{3t}$，则 $k_{AC}\cdot k_{AD}=-\dfrac{1}{27}$，将图像向右移动3个单位，

则椭圆 E' 和直线 l'_{CD}：$\begin{cases}\frac{(x-3)^2}{9}+y^2=1\\ mx+ny=1\end{cases}$，联立得：$x^2-6x+9y^2=0$，$x^2-6x(mx+ny)+9y^2=0$，即 $9y^2-6nxy+(1-6m)x^2=0$，两边同时除以 x^2，得：$9\dfrac{y^2}{x^2}-6n\dfrac{y}{x}+1-6m=0$，

则 $k_{AC}\cdot k_{AD}=\dfrac{1-6m}{9}=-\dfrac{1}{27}$，解得 $m=\dfrac{2}{9}$，则直线过定点 $\left(\dfrac{9}{2},0\right)$，则平移前过 $\left(\dfrac{3}{2},0\right)$.

题型7 齐次化妙解之等角问题

划重点

等角问题的推广：

结论1：过抛物线线外一点 P 作抛物线的切线 PA，PB，则 $\angle AFP=\angle BFP$.