

第三章 函数的概念与性质（压轴题专练）

一、单选题

1. 设函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, $f(x+1)$ 为奇函数, $f(x+2)$ 为偶函数, 当 $x \in [1, 2]$ 时, $f(x) = ax^2 + b$. 若

$f(0) + f(3) = 6$, 则 $f\left(\frac{9}{2}\right) = (\quad)$

A. $-\frac{9}{4}$

B. $-\frac{3}{2}$

C. $\frac{7}{4}$

D. $\frac{5}{2}$

【答案】D

【分析】通过 $f(x+1)$ 是奇函数和 $f(x+2)$ 是偶函数条件, 可以确定出函数解析式 $f(x) = -2x^2 + 2$, 进而利用定义或周期性结论, 即可得到答案.

【详解】[方法一]:

因为 $f(x+1)$ 是奇函数, 所以 $f(-x+1) = -f(x+1)$ ①;

因为 $f(x+2)$ 是偶函数, 所以 $f(x+2) = f(-x+2)$ ②.

令 $x=1$, 由①得: $f(0) = -f(2) = -(4a+b)$, 由②得: $f(3) = f(1) = a+b$,

因为 $f(0) + f(3) = 6$, 所以 $-(4a+b) + a+b = 6 \Rightarrow a = -2$,

令 $x=0$, 由①得: $f(1) = -f(1) \Rightarrow f(1) = 0 \Rightarrow b = 2$, 所以 $f(x) = -2x^2 + 2$.

思路一: 从定义入手.

$$f\left(\frac{9}{2}\right) = f\left(\frac{5}{2} + 2\right) = f\left(-\frac{5}{2} + 2\right) = f\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = f\left(-\frac{3}{2} + 1\right) = -f\left(\frac{3}{2} + 1\right) = -f\left(\frac{5}{2}\right)$$

$$-f\left(\frac{5}{2}\right) = -f\left(\frac{1}{2} + 2\right) = -f\left(-\frac{1}{2} + 2\right) = -f\left(\frac{3}{2}\right)$$

$$\text{所以 } f\left(\frac{9}{2}\right) = -f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{5}{2}.$$

[方法二]:

因为 $f(x+1)$ 是奇函数, 所以 $f(-x+1) = -f(x+1)$ ①;

因为 $f(x+2)$ 是偶函数, 所以 $f(x+2) = f(-x+2)$ ②.

令 $x=1$, 由①得: $f(0) = -f(2) = -(4a+b)$, 由②得: $f(3) = f(1) = a+b$,

因为 $f(0)+f(3)=6$ ，所以 $-(4a+b)+a+b=6 \Rightarrow a=-2$ ，

令 $x=0$ ，由①得： $f(1)=-f(1) \Rightarrow f(1)=0 \Rightarrow b=2$ ，所以 $f(x)=-2x^2+2$ 。

思路二：从周期性入手

由两个对称性可知，函数 $f(x)$ 的周期 $T=4$ 。

所以 $f\left(\frac{9}{2}\right)=f\left(\frac{1}{2}\right)=-f\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{5}{2}$ 。

故选：D。

【点睛】在解决函数性质类问题的时候，我们通常可以借助一些二级结论，求出其周期性进而达到简便计算的效果。

2. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbb{R}$ ，且 $f(x+1)$ 为奇函数， $f(x+2)$ 为偶函数，且对任意的 $x_1, x_2 \in (1, 2)$ ，且

$x_1 \neq x_2$ ，都有 $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} > 0$ ，则下列结论错误的为（ ）

A. $f(x)$ 是偶函数

B. $f(2023)=0$

C. $f(x)$ 的图象关于 $(-1, 0)$ 对称

D. $f\left(-\frac{7}{4}\right) < f\left(\frac{19}{8}\right)$

【答案】D

【分析】由已知奇偶性得出函数 $f(x)$ 的图象关于点 $(1, 0)$ 对称且关于直线 $x=2$ 对称，再得出函数的单调性，然后由对称性变形判断 ABC，结合单调性判断 D。

【详解】 $f(x+1)$ 为奇函数， $f(x+2)$ 为偶函数， $f(x)$ 的图象关于点 $(1, 0)$ 对称且关于直线 $x=2$ 对称，

$f(1+x)=-f(1-x)$ ， $f(2+x)=f(2-x)$ ， $f(1)=0$ ，

$f(2+x)=f(2-x)=f(1+1-x)=-f[1-(1-x)]=-f(x)$

$f(x+4)=-f(2+x)=f(x)$ ，所以 $f(x)$ 是周期函数，4 是它的一个周期。

$f(-1)=f(3)=f(2+1)=f(2-1)=f(1)=0$ ，

$f(2023)=f(4 \times 506 - 1)=f(-1)=0$ ，B 正确；

$f(-x)=-f(2+x)=-f(2-x)=f[2-(2-x)]=f(x)$ ， $f(x)$ 是偶函数，A 正确；

因此 $f(x)$ 的图象也关于点 $(-1, 0)$ 对称，C 正确；

对任意的 $x_1, x_2 \in (1, 2)$ ，且 $x_1 \neq x_2$ ，都有 $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} > 0$ ，即 $1 < x_1 < x_2 < 2$ 时， $f(x_1) < f(x_2)$ ，所以 $f(x)$ 在 $(1, 2)$

是单调递增，

$$f(-\frac{7}{4})=f(\frac{7}{4}), f(\frac{19}{8})=f(-\frac{19}{8})=f(-\frac{19}{8}+4)=f(\frac{13}{8}), 2>\frac{7}{4}>\frac{13}{8}>1,$$

$$f(\frac{7}{4})>f(\frac{13}{8}), \therefore f(-\frac{7}{4})>f(\frac{19}{8}), \text{D 错.}$$

故选：D.

【点睛】结论点睛：（1） $f(x)$ 的图象关于点 $(a,0)$ 对称，也关于点 $(b,0)$ 对称，则 $f(x)$ 是周期函数， $2|a-b|$ 是 $f(x)$ 的一个周期；

（2） $f(x)$ 的图象关于直线 $x=a$ 对称，也关于直线 $x=b$ 对称，则 $f(x)$ 是周期函数， $2|a-b|$ 是 $f(x)$ 的一个周期；

（1） $f(x)$ 的图象关于点 $(a,0)$ 对称，也关于直线 $x=b$ 对称，则 $f(x)$ 是周期函数， $4|a-b|$ 是 $f(x)$ 的一个周期。

3. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$ ， $f(x-2)$ 为偶函数， $f(x-2)+f(-x)=0$ ，当 $x \in [-2,-1]$ 时，

$$f(x)=\frac{1}{a^x}-ax-4 \quad (a>0 \text{ 且 } a \neq 1), \text{ 且 } f(-2)=4. \text{ 则 } \sum_{k=1}^{13} |f(k)| = (\quad)$$

A. 16

B. 20

C. 24

D. 28

【答案】C

【分析】由条件可知 $f(x)$ 有对称轴 $x=-2$ ，对称中心 $(-1,0)$ ，推出具有周期性 $T=4$ ，由 $f(-2)=4$ 求得 a 的值，可分别计算 $f(1), f(2), f(3), f(4)$ ，结合周期性计算 $\sum_{k=1}^{13} |f(k)|$ 即可。

【详解】因为 $f(x-2)$ 是偶函数，所以 $f(-x-2)=f(x-2)$ ，所以 $f(x)=f(-x-4)$ ，
所以函数 $f(x)$ 关于直线 $x=-2$ 对称，

又因为 $f(x-2)+f(-x)=0$ ，所以 $-f(x-2)=f(-x)$ ，

所以 $f(x)=-f(-x-2)$ ，所以 $f(x)$ 关于点 $(-1,0)$ 中心对称，

由 $f(x)=f(-x-4)$ 及 $f(x)=-f(-x-2)$ 得 $f(-x-4)=-f(-x-2)$

所以 $f(-x-4)=-f(-x-2)=f(-x)$

所以函数 $f(x)$ 的周期为 4，

因为当 $x \in [-2,-1]$ 时， $f(x)=\frac{1}{a^x}-ax-4$ ($a>0$ 且 $a \neq 1$)，且 $f(-2)=4$ ，

所以 $4=\frac{1}{a^{-2}}+2a-4$ ，解得： $a=2$ 或 $a=-4$ ，因为 $a>0$ 且 $a \neq 1$ ，所以 $a=2$ 。

所以当 $x \in [-2,-1]$ 时， $f(x)=(\frac{1}{2})^x-2x-4$ ，

所以 $f(-2)=4, f(-1)=0, f(-3)=f(-1)=0, f(0)=-f(-2)=-4,$

$f(1)=f(1-4)=f(-3)=0, f(2)=f(-2)=4, f(3)=f(-1)=0,$

$f(4)=f(0)=-4,$ 所以 $|f(1)|+|f(2)|+|f(3)|+|f(4)|=8,$

所以 $\sum_{k=1}^{13}|f(k)|=|f(1)|+3\times 8=24,$

故选: C.

4. 已知 $f(x)=x^2-2x$. 若对于 $\forall x_1, x_2 \in [m, m+1]$, 均有 $f(x_1+1) \geq f(x_2)$ 成立, 则实数 m 的取值范围是 ()

- A. $(-\infty, 0]$ B. $\left[-\infty, \frac{1}{2}\right]$ C. $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$ D. $[1, +\infty)$

【答案】C

【分析】将 $f(x_1+1) \geq f(x_2)$ 成立转化成 $f(x+1)_{\min} \geq f(x)_{\max}$ 恒成立的问题, 构造函数 $h(x)=f(x+1)$, 然后分类讨论, 即可求出 m 的取值范围.

【详解】解: 由题意

在 $f(x)=x^2-2x$ 中, 对称轴 $x=-\frac{-2}{2\times 1}=1$

函数在 $(-\infty, 1)$ 上单调减, 在 $(1, +\infty)$ 上单调增

$$f(x+1)=(x+1)^2-2(x+1)=x^2-1,$$

$\therefore$ 对于 $\forall x_1, x_2 \in [m, m+1]$, 均有 $f(x_1+1) \geq f(x_2)$ 成立

即对于 $\forall x_1, x_2 \in [m, m+1]$, 均有 $f(x+1)_{\min} = (x^2-1)_{\min} \geq f(x)_{\max} = (x^2-2x)_{\max}$ 恒成立

在 $h(x)=f(x+1)=x^2-1$ 中, 对称轴 $x=-\frac{0}{2\times 1}=0,$

函数在 $(-\infty, 0)$ 上单调减, 在 $(0, +\infty)$ 上单调增

当 $m+1 \leq 0$ 即 $m \leq -1$ 时,

函数 $h(x)$ 在 $[m, m+1]$ 上单调减

函数 $f(x)$ 在 $[m, m+1]$ 上单调减

$$h(x)_{\min} = (m+1)^2 - 1 = m^2 + 2m$$

$$f(x)_{\max} = m^2 - 2m$$

$$\therefore \begin{cases} m^2 + 2m \geq m^2 - 2m \\ m \leq -1 \end{cases}$$

解得 $m = \emptyset$

$$\text{当} \begin{cases} m+1 > 0 \\ m < 0 \end{cases}, \text{即 } -1 < m < 0 \text{ 时,}$$

函数 $h(x)$ 在 $[m, 0)$ 上单调减, 在 $(0, m+1]$ 上单调增

函数 $f(x)$ 在 $[m, m+1]$ 上单调减

$$\therefore h(x)_{\min} = 0^2 - 1 = -1$$

$$f(x)_{\max} = m^2 - 2m$$

$$\therefore \begin{cases} -1 \geq m^2 - 2m \\ -1 < m < 0 \end{cases}$$

解得 $m = \emptyset$

$$\text{当} \begin{cases} m \geq 0 \\ m+1 \leq 1 \end{cases}, \text{即 } m = 0 \text{ 时, } [m, m+1] = [0, 1]$$

函数 $h(x)$ 在 $[0, 1]$ 上单调增

函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上单调减

$$\therefore h(x)_{\min} = 0^2 - 1 = -1$$

$$f(x)_{\max} = f(0) = 0^2 - 0 = 0$$

$$\therefore h(x)_{\min} = -1 < f(x)_{\max} = 0$$

故不符题意, 舍去.

$$\text{当} \begin{cases} \frac{m+m+1}{2} < 1 \\ m > 0 \end{cases} \text{即 } 0 < m < \frac{1}{2} \text{ 时}$$

函数 $h(x)$ 在 $[m, m+1]$ 上单调增, $h(x)_{\min} = m^2 - 1$

函数 $f(x)$ 在 $[m, 1)$ 上单调减, 在 $(1, m+1]$ 上单调增, $f(x)_{\max} = f(m) = m^2 - 2m$

$$\therefore \begin{cases} m^2 - 1 \geq m^2 - 2m \\ 0 < m < \frac{1}{2} \end{cases}$$

解得 $m = \emptyset$

$$\text{当} \begin{cases} \frac{m+m+1}{2} \geq 1 \\ m < 1 \end{cases} \text{即} \frac{1}{2} \leq m < 1 \text{时}$$

函数 $h(x)$ 在 $[m, m+1]$ 上单调增, $h(x)_{\min} = m^2 - 1$

函数 $f(x)$ 在 $[m, 1]$ 上单调减, 在 $(1, m+1]$ 上单调增, $f(x)_{\max} = f(m+1) = m^2 - 1$

此时, $h(x)_{\min} = m^2 - 1 = f(x)_{\max}$

$$\therefore \frac{1}{2} \leq m < 1 \text{ 符合题意}$$

当 $m \geq 1$ 时,

函数 $h(x)$ 在 $[m, m+1]$ 上单调增

函数 $f(x)$ 在 $[m, m+1]$ 上单调增

$$\therefore h(x)_{\min} = m^2 - 1$$

$$f(x)_{\max} = f(m+1) = (m+1)^2 - 2(m+1) = m^2 - 1$$

此时 $h(x)_{\min} = m^2 - 1 = f(x)_{\max}$

$$\therefore m \geq 1 \text{ 符合题意}$$

综上, 实数 m 的取值范围是 $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$

故选: C.

【点睛】本题考查恒成立问题, 二次函数不同区间的单调性, 以及分类讨论的思想, 具有很强的综合性.

5. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 D , 若 $\forall x_1 \in D, \exists x_2 \in D$, 满足 $\frac{x_1 + f(x_2)}{2} = a$, 则称函数 $f(x)$ 具有性质

$P(a)$. 已知定义在 $(0, +\infty)$ 上的函数 $f(x) = -x^2 + mx - 3$ 具有性质 $P\left(\frac{1}{2}\right)$, 则实数 m 的取值范围是 ()

- A. $(-\infty, 2]$ B. $(-\infty, 4]$ C. $[2, +\infty)$ D. $[4, +\infty)$

【答案】D

【分析】根据函数新定义可推得 $\forall x_1 \in (0, +\infty), \exists x_2 \in (0, +\infty)$, $f(x_2) = 1 - x_1$ 恒成立, 即 $f(x) = -x^2 + mx - 3$,

$x \in (0, +\infty)$ 的值域 M , 满足 $(-\infty, 1) \subseteq M$, 求出 M , 列出不等式, 即可求得答案.

【详解】由题意得定义在 $(0, +\infty)$ 上的函数 $f(x) = -x^2 + mx - 3$ 具有性质 $P\left(\frac{1}{2}\right)$,

即 $\forall x_1 \in (0, +\infty), \exists x_2 \in (0, +\infty)$, 满足 $\frac{x_1 + f(x_2)}{2} = \frac{1}{2}$,

即 $\forall x_1 \in (0, +\infty), \exists x_2 \in (0, +\infty)$, $f(x_2) = 1 - x_1$ 恒成立;

记函数 $f(x) = -x^2 + mx - 3$, $x \in (0, +\infty)$ 的值域为 M , $1 - x_1 \in (-\infty, 1)$,

则由题意得 $(-\infty, 1) \subseteq M$,

当 $\frac{m}{2} \leq 0$, 即 $m \leq 0$ 时, $f(x) = -x^2 + mx - 3$ 在 $x \in (0, +\infty)$ 单调递减,

则 $f(x) < f(0) = -3$, 即 $M = (-\infty, -3)$, 此时不满足 $(-\infty, 1) \subseteq M$, 舍去;

当 $\frac{m}{2} > 0$, 即 $m > 0$ 时, $f(x) = -x^2 + mx - 3, x \in (0, +\infty)$ 在 $x = \frac{m}{2}$ 时取得最大值,

即 $f(x)_{\max} = -(\frac{m}{2})^2 + \frac{m^2}{2} - 3 = \frac{m^2}{4} - 3$, 即 $M = (-\infty, \frac{m^2}{4} - 3]$,

要满足 $(-\infty, 1) \subseteq M$, 需 $\frac{m^2}{4} - 3 \geq 1$, 解得 $m \geq 4$ 或 $m \leq -4$,

而 $m > 0$, 故 $m \geq 4$, 即 m 的取值范围为 $[4, +\infty)$,

故选: D

【点睛】方法点睛: 根据函数新定义, 要能推出 $\forall x_1 \in (0, +\infty), \exists x_2 \in (0, +\infty)$, $f(x_2) = 1 - x_1$ 恒成立, 继而将问题转化为集合之间的包含问题, 因此要求出函数 $f(x) = -x^2 + mx - 3$ 的值域, 根据集合的包含关系列不等式求解即可.

6. 已知函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数, 若 $\forall a, b \in [0, +\infty)$, 且 $a < b$, 都有 $\frac{af(a) - bf(b)}{a - b} < 0$ 成立, 则

不等式 $f\left(\frac{1}{t}\right) - (2t^2 - t)f(2t - 1) > 0$ 的解集为 ()

A. $(-1, 0) \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$

B. $\left(-\frac{1}{2}, 0\right) \cup (1, +\infty)$

C. $(-\infty, -1) \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$

D. $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup (1, +\infty)$

【答案】D

【分析】根据题意, 构造函数 $g(x) = xf(x)$, 求出函数 $g(x)$ 的单调性和奇偶性, 即可求出不等式的解集.

【详解】令 $g(x) = xf(x)$, 由题意知 $g(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上为减函数,

又 $f(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的偶函数, 所以 $g(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的奇函数,

又 $g(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上为减函数, $g(0) = 0$,

所以 $g(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上为减函数,

①当 $t > 0$ 时, $\frac{1}{t}f\left(\frac{1}{t}\right) > (2t-1)f(2t-1)$, 即 $g\left(\frac{1}{t}\right) > g(2t-1)$,

所以 $\frac{1}{t} < 2t-1$, 所以 $1 < 2t^2 - t$, 解得 $t > 1$;

②当 $t < 0$ 时, $\frac{1}{t}f\left(\frac{1}{t}\right) < (2t-1)f(2t-1)$, 即 $g\left(\frac{1}{t}\right) < g(2t-1)$,

所以 $\frac{1}{t} > 2t-1$, 所以 $1 < 2t^2 - t$, 解得 $t < -\frac{1}{2}$. 所以 $t < -\frac{1}{2}$ 或 $t > 1$.

故选: D.

7. 已知函数 $f(x)$ 的定义域是 $\mathbf{R}$, 函数 $f(x+1)$ 的图象的对称中心是 $(-1, 0)$, 若对任意的 $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$,

且 $x_1 \neq x_2$, 都有 $\frac{x_2 f(x_1) - x_1 f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0$ 成立, $f(1) = 1$, 则不等式 $f(x) - x > 0$ 的解集为 ()

A. $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

B. $(-1, 1)$

C. $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$

D. $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$

【答案】D

【分析】利用函数 $f(x+1)$ 的图象的对称中心是 $(-1, 0)$ 可得 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的奇函数, 由 $\frac{x_2 f(x_1) - x_1 f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0$

可得 $\frac{f(x_1)}{x_1} - \frac{f(x_2)}{x_2} > 0$, 故可得 $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 然后分 $x = 0$, $x > 0$ 和 $x < 0$ 三种情况

进行求范围即可

【详解】因为 $f(x+1)$ 是 $f(x)$ 向左平移 1 个单位长度得到, 且函数 $f(x+1)$ 的图象的对称中心是 $(-1, 0)$,

所以 $f(x)$ 的图象的对称中心是 $(0, 0)$, 故 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的奇函数, 所以 $f(-1) = -f(1) = -1$,

对任意的 $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$, 且 $x_1 \neq x_2$, 都有 $\frac{x_2 f(x_1) - x_1 f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0$ 成立,

所以 $\frac{x_2 f(x_1) - x_1 f(x_2)}{x_1 x_2 (x_1 - x_2)} = \frac{\frac{f(x_1)}{x_1} - \frac{f(x_2)}{x_2}}{x_1 - x_2} > 0$,

令 $g(x) = \frac{f(x)}{x}$, 所以根据单调性的定义可得 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增,

由 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的奇函数可得 $g(x)$ 是 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ 上的偶函数

所以 $g(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减,

当 $x=0$ 时, 不等式 $f(x)-x>0$ 得到 $0-0>0$, 矛盾;

当 $x>0$ 时, $f(x)-x>0$ 转化成 $\frac{f(x)}{x}>1=\frac{f(1)}{1}$ 即 $g(x)>g(1)$, 所以 $x>1$;

当 $x<0$ 时, $f(x)-x>0$ 转化成 $\frac{f(x)}{x}<1=\frac{f(-1)}{-1}$, $g(x)<g(-1)$, 所以 $-1<x<0$,

综上所述, 不等式 $f(x)-x>0$ 的解集为 $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$

故选: D

8. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, $f(2x+2)$ 为偶函数, $f(x+1)$ 为奇函数, 且当 $x \in [0, 1]$ 时, $f(x) = ax + b$.

若 $f(4)=1$, 则 $\sum_{i=1}^3 f\left(i+\frac{1}{2}\right) = (\quad)$

A. $\frac{1}{2}$

B. 0

C. $-\frac{1}{2}$

D. -1

【答案】C

【分析】由 $f(2x+2)$ 为偶函数, $f(x+1)$ 为奇函数得到 $f(x+5)=f(x+1)$, 故函数 $f(x)$ 的周期 $T=4$, 结

合 $f(4)=1$ 得到 $b=1$, 由 $f(-x+1)=-f(x+1)$ 得 $f(1)=0$, 从而求出 $a=-1$, 采用赋值法求出 $f\left(\frac{3}{2}\right)=-\frac{1}{2}$,

$f\left(\frac{3}{2}\right)=f\left(\frac{5}{2}\right)=-\frac{1}{2}$, 再使用求出的 $f(x)$ 的周期 $T=4$, 赋值法得到 $f\left(\frac{7}{2}\right)=\frac{1}{2}$.

【详解】因为 $f(2x+2)$ 为偶函数, 所以 $f(-2x+2)=f(2x+2)$,

用 $\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$ 代替 x 得: $f(-x+1)=f(x+3)$,

因为 $f(x+1)$ 为奇函数, 所以 $f(-x+1)=-f(x+1)$,

故 $f(x+3)=-f(x+1)$ ①,

用 $x+2$ 代替 x 得: $f(x+5)=-f(x+3)$ ②,

由 ①② 得: $f(x+5)=f(x+1)$,

所以函数 $f(x)$ 的周期 $T=4$,

所以 $f(4)=f(0)=1$, 即 $b=1$,

因为 $f(-x+1)=-f(x+1)$, 令 $x=0$ 得: $f(1)=-f(1)$, 故 $f(1)=0$,

$f(1)=a+b=0$, 解得: $a=-1$,

所以 $x \in [0, 1]$ 时, $f(x) = -x + 1$,

因为 $f(-x+1) = -f(x+1)$,

令 $x = \frac{1}{2}$, 得 $f\left(\frac{1}{2}\right) = -f\left(\frac{3}{2}\right)$,

其中 $f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$, 所以 $f\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{1}{2}$,

因为 $f(-2x+2) = f(2x+2)$,

令 $x = \frac{1}{4}$ 得: $f\left(-2 \times \frac{1}{4} + 2\right) = f\left(2 \times \frac{1}{4} + 2\right)$, 即 $f\left(\frac{3}{2}\right) = f\left(\frac{5}{2}\right) = -\frac{1}{2}$,

因为 $T = 4$, 所以 $f\left(\frac{7}{2}\right) = f\left(\frac{7}{2} - 4\right) = f\left(-\frac{1}{2}\right)$,

因为 $f(-x+1) = -f(x+1)$,

令 $x = \frac{3}{2}$ 得: $f\left(-\frac{1}{2}\right) = -f\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{1}{2}$,

故 $f\left(\frac{7}{2}\right) = \frac{1}{2}$,

$\sum_{i=1}^3 f\left(i + \frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{3}{2}\right) + f\left(\frac{5}{2}\right) + f\left(\frac{7}{2}\right) = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$.

故选: C

【点睛】方法点睛: 抽象函数的对称性和周期性:

若 $f(x+a) + f(-x+b) = c$, 则函数 $f(x)$ 关于 $\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c}{2}\right)$ 中心对称,

若 $f(x+a) = f(-x+b)$, 则函数 $f(x)$ 关于 $x = \frac{a+b}{2}$ 对称,

若函数 $f(x)$ 关于 $x=a$ 轴对称, 关于 $(b, 0)$ 中心对称, 则函数 $f(x)$ 的周期为 $4|a-b|$,

若函数 $f(x)$ 关于 $x=a$ 轴对称, 关于 $x=b$ 轴对称, 则函数 $f(x)$ 的周期为 $2|a-b|$,

若函数 $f(x)$ 关于 $(a, 0)$ 中心对称, 关于 $(b, 0)$ 中心对称, 则函数 $f(x)$ 的周期为 $2|a-b|$.

二、多选题

9. 已知 $y = f(x)$ 奇函数, $f(x) = f(2-x)$ 恒成立, 且当 $0 \leq x \leq 1$ 时, $f(x) = x$, 设 $g(x) = f(x) + f(x+1)$, 则

()

A. $g(2022) = 1$

B. 函数 $y = g(x)$ 为周期函数

C. 函数 $y = g(x)$ 在区间 $(2021, 2022)$ 上单调递减

D. 函数 $y = g(x)$ 的图像既有对称轴又有对称中心

【答案】BCD

【分析】由 $g(x)$ 与 $f(x)$ 的关系式及 $f(x)$ 的周期性、奇偶性，即可求 $g(2022)$ 和判断 $g(x)$ 的周期，进而判断 A 和 B；利用奇函数性质求 $f(x)$ 在 $-2 \leq x \leq 2$ 上的解析式，结合 $g(x)$ 的周期性及 $g(x) = f(x) + f(x+1)$ 求 $(2021, 2022)$ 上的解析式判断 C，利用对称性判断 $g(1-x) = g(x)$ 、 $g(x) + g(3-x) = 0$ 是否成立判断 D.

【详解】因为 $f(x) = f(2-x)$ ，所以， $f(-x) = f(2+x)$ ，又 $f(x)$ 为奇函数，故

$f(-x) = -f(x) = -f(2-x) = f(x-2) = f(2+x)$ ，利用 $f(x-2) = f(x+2)$ ，可得

$f(x) = f(x+4)$ ，故 $f(x)$ 的周期为 4；

因为 $f(x)$ 周期为 4，则 $g(x)$ 的周期为 4，又 $f(x)$ 是奇函数，

所以 $g(2022) = g(505 \times 4 + 2) = g(2) = f(2) + f(3) = f(2) + f(-1) = -f(1) = -1$ ，A 错误，B 正确；

当 $0 \leq x \leq 1$ 时， $f(x) = x$ ，因为 $f(x)$ 为奇函数，故 $-1 \leq x < 0$ 时， $f(x) = x$ ，因为 $f(x) = f(2-x)$ 恒成立，令 $0 \leq 2-x \leq 1$ ，此时， $f(2-x) = 2-x$ ，则 $2 \geq x \geq 1$ ， $f(x) = f(2-x) = 2-x$ ，故 $0 \leq x \leq 2$ 时，

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1 \\ 2-x, & 1 < x \leq 2 \end{cases},$$

令 $-2 \leq x < -1$ ，即 $1 < -x \leq 2$ ，则 $f(-x) = 2+x = -f(x)$ ，即 $f(x) = -x-2$ ；

令 $-1 \leq x < 0$ ，即 $0 < -x \leq 1$ ，则 $f(-x) = -x = -f(x)$ ，即 $f(x) = x$ ；

令 $2 < x < 3$ ，即 $-3 < -x < -2$ ， $-1 < 2-x < 0$ ， $f(2-x) = 2-x = f(x)$

$$\text{所以 } f(x) = \begin{cases} -x-2, & -2 \leq x < -1 \\ x, & -1 \leq x \leq 1 \\ 2-x, & 1 < x \leq 3 \end{cases},$$

根据周期性 $y = g(x)$ 在 $x \in (2021, 2022)$ 上的图像与在 $x \in (1, 2)$ 相同，

所以，当 $1 \leq x < 2$ ，即 $2 \leq x+1 < 3$ 时， $g(x) = f(x) + f(x+1) = 2-x + 2-(x+1) = 3-2x$ ，故 $g(x)$ 在 $x \in (1, 2)$ 上单调递减，C 正确；

由 $f(x)$ 是周期为 4 的奇函数，则 $f(x+2) = -f(x) = f(x-2)$ 且 $f(x-1) = -f(x+1)$ ，

所以 $g(1-x) = f(1-x) + f(2-x) = -f(x-1) - f(x-2) = f(x) + f(x+1) = g(x)$ ，故 $g(x)$ 关于 $x = \frac{1}{2}$ 对称，

$g(x) + g(3-x) = f(x) + f(x+1) + f(3-x) + f(4-x) = f(x) + f(x+1) - f(1+x) - f(x) = 0$ ，所以 $g(x)$ 关于 $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$

对称，D 正确.

故选：BCD

10. 已知函数 $f(x) = \frac{ax^2 + bx + 2}{x^2 + 1} (a, b \in \mathbb{R})$, 则下列说法正确的是 ()

- A. $\exists a, b \in \mathbb{R}$, $f(x)$ 为奇函数
- B. $\exists b \in \mathbb{R}, \forall a \in \mathbb{R}$, $f(x)$ 为偶函数
- C. $\exists a, b \in \mathbb{R}$, $f(x)$ 的值为常数
- D. $\exists b \in \mathbb{R}, \forall a \in \mathbb{R}$, $f(x)$ 有最小值

【答案】BCD

【分析】对于 A、B, 假设成立, 根据奇偶性的性质得到方程, 即可判断; 利用特殊值判断 C; 对于 D, 将函数解析式变形为 $[a - f(x)]x^2 + bx + 2 - f(x) = 0$, 分 $a - f(x) = 0$ 和 $a - f(x) \neq 0$ 两种情况讨论, 即可判断.

【详解】解: 因为 $f(x) = \frac{ax^2 + bx + 2}{x^2 + 1} (a, b \in \mathbb{R})$, $x \in \mathbb{R}$,

对于 A: 若 $f(x)$ 为奇函数, 则 $f(-x) = -f(x)$, 即 $\frac{ax^2 - bx + 2}{x^2 + 1} = -\frac{ax^2 + bx + 2}{x^2 + 1}$,

即 $ax^2 + 2 = 0$, 显然方程 $ax^2 + 2 = 0$ 不恒成立, 故不存在 $a, b \in \mathbb{R}$, 使得 $f(x)$ 为奇函数, 故 A 错误;

对于 B: 若 $f(x)$ 为偶函数, 则 $f(-x) = f(x)$, 即 $\frac{ax^2 - bx + 2}{x^2 + 1} = \frac{ax^2 + bx + 2}{x^2 + 1}$,

即 $bx = 0$, 当 $b = 0$ 时方程 $bx = 0$ 恒成立, 故当 $b = 0$ 时, 对 $\forall a \in \mathbb{R}$, $f(x)$ 为偶函数, 故 B 正确;

对于 C: 当 $a = 2$, $b = 0$ 时 $f(x) = \frac{2x^2 + 2}{x^2 + 1} = 2$ 为常数函数, 故 C 正确;

对于 D: $f(x)$ 的定义域为 $\mathbb{R}$, $f(x) = \frac{ax^2 + bx + 2}{x^2 + 1}$,

所以 $[a - f(x)]x^2 + bx + 2 - f(x) = 0$,

当 $a - f(x) = 0$, 即 $f(x) = a$ 时 $[a - f(x)]x^2 + bx + 2 - f(x) = 0$ 变形为 $bx + 2 - a = 0$,

当 $b \neq 0$ 时方程 $bx + 2 - a = 0$ 有解,

当 $b = 0$ 、 $a = 2$ 时方程 $bx + 2 - a = 0$ 在 $\mathbb{R}$ 上恒成立,

当 $a - f(x) \neq 0$, 即 $f(x) \neq a$ 时,

方程 $[a - f(x)]x^2 + bx + 2 - f(x) = 0$ 在 $\mathbb{R}$ 上有解, 所以 $\Delta = b^2 - 4[a - f(x)][2 - f(x)] \geq 0$,

即 $4f^2(x) - 4(a + 2)f(x) + 8a - b^2 \leq 0$,

因为 $16(a + 2)^2 - 16(8a - b^2) = 16[(a - 2)^2 + b^2] \geq 0$,

当 $b=0$ 、 $a=2$ 时 $4f^2(x)-4(a+2)f(x)+8a-b^2 \leq 0$ 变形为 $4f^2(x)-16f(x)+16 \leq 0$ ，解得 $f(x)=2$ ，

当 $b \neq 0$ 或 $a \neq 2$ 时， $4f^2(x)-4(a+2)f(x)+8a-b^2=0$ 可以求得 $f(x)$ 的两个值，

不妨设为 m 和 n ($m < n$)，则
$$\begin{cases} m+n=a+2 \\ mn=\frac{8a-b^2}{4} \end{cases}$$

所以 $4f^2(x)-4(a+2)f(x)+8a-b^2 \leq 0$ 解得 $m \leq f(x) \leq n$ ，

所以当 $b \neq 0$ 时， $\forall a \in \mathbb{R}$ ， $f(x)$ 有最小值，故 D 正确；

故选：BCD

11. 已知定义域为 $(0, +\infty)$ 的函数 $f(x)$ 满足：(1) 对任意 $x \in (0, +\infty)$ ， $f(2x)=2f(x)$ 恒成立；(2) 当 $x \in (1, 2]$

时， $f(x)=2-x$ ，则下列选项正确的有 ()

A. 对任意 $m \in \mathbb{Z}$ ，有 $f(2^m)=0$

B. 函数 $f(x)$ 的值域为 $[0, +\infty)$

C. 存在 $n \in \mathbb{Z}$ ，使得 $f(2^n+1)=9$

D. 函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 上单调递减的充要条件是：存在 $k \in \mathbb{Z}$ ，使得 $(a, b) \subseteq (2^k, 2^{k+1})$ 。

【答案】ABD

【分析】利用条件(1)判断 A；利用条件(2)判断 B；利用反证法判断 C；结合以上推导判断 D。

【详解】对于选项 A， $f(2^m)=f(2 \cdot 2^{m-1})=2f(2^{m-1})=\dots=2^{m-1}f(2)=0$ ，A 正确；

对于选项 B，当 $x \in (2^m, 2^{m+1}]$ 时， $\frac{x}{2^m} \in (1, 2]$ ， $f\left(\frac{x}{2^m}\right)=2-\frac{x}{2^m} \in [0, 1)$ ，从而

$f(x)=2f\left(\frac{x}{2^m}\right)=\dots=2^mf\left(\frac{x}{2^m}\right)=2^{m+1}-x \in [0, 2^m)$ ，所以函数 $f(x)$ 的值域为 $[0, +\infty)$ ，B 正确；

对于选项 C，因为 $2^n+1 \in (2^n, 2^{n+1}]$ ，所以 $f(2^n+1)=2^{n+1}-2^n-1=2^n-1$ ，

假设存在 n 使 $f(2^n+1)=9$ ，则 $2^{n+1}-2^n=10$ ，所以 $2^n=10$ ，满足条件的整数不存在，C 错误；

对于选项 D，若 $(a, b) \subseteq (2^k, 2^{k+1})$ ，当 $x \in (a, b)$ 时， $f(x)=2^{k+1}-x$ ，函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 上单调递减，

若函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 上单调递减，不妨设 $2^k \leq a < 2^{k+1}$ ， $k \in \mathbb{Z}$ ，

若 $b > 2^{k+2}$ ，则 $2^{k+1}, 2^{k+2} \in (a, b)$ ， $2^{k+1} < 2^{k+2}$ ， $f(2^{k+1})=f(2^{k+2})=0$ ，与已知矛盾，

若 $2^{k+1} < b \leq 2^{k+2}$ ，则 $2^{k+1} \in (a, b)$ ，当 $x_0 \in (2^{k+1}, b)$ ， $x_0 > 2^{k+1}$ ，

但 $f(x_0) = 2^{k+2} - x_0 < f(2^{k+1}) = 0$ ，与已知矛盾，

故 $b \leq 2^{k+1}$ ，故 $(a, b) \subseteq (2^k, 2^{k+1})$ ，故函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 上单调递减的充要条件是：存在 $k \in \mathbb{Z}$ ，使得

$(a, b) \subseteq (2^k, 2^{k+1})$ ，D 正确，

故选：ABD.

【点睛】本题解决的关键在于分区间求出函数的解析式，再结合函数的性质判断.

12. 已知定义在 $\mathbb{R}$ 上的函数 $f(x)$ ， $\forall x, y \in \mathbb{R}$ ， $f(x)f(y) = \frac{f(x+y)+2f(x-y)}{3}$ ，且 $f(x) \neq 0$ ，则下述结论中正确的是 ()

A. $f(0)=1$

B. 若 $f(1)=1$ ，则 $f(2048)=2048$

C. $f(x)$ 是偶函数

D. $\exists x \in \mathbb{R}$ ， $f(x) = -2$

【答案】AC

【分析】结合赋值法、奇偶性、最值等知识确定正确答案.

【详解】令 $x=0$ ， $y=0$ ，则 $f^2(0) = \frac{f(0)+2f(0)}{3} = f(0)$ ，因为 $f(x) \neq 0$ ，所以 $f(0)=1$ ，A 正确；

令 $y=x$ ，则 $f^2(x) = \frac{f(2x)+2f(0)}{3}$ ，所以 $f(2x) = 3f^2(x) - 2f(0) = 3f^2(x) - 2$ ，

所以 $f(2x)-1 = 3[f^2(x)-1] = 3[f(x)-1][f(x)+1]$ ，

所以 $f(2x) = 3[f(x)-1][f(x)+1] + 1$ ，

所以 $f(2) = 3(1-1)(1+1) + 1 = 1$ ， $f(4) = 3(1-1)(1+1) + 1 = 1$ ，

$f(8) = 3(1-1)(1+1) + 1 = 1$ ， $\dots$ ， $f(2048) = 1$ ，B 错误；

令 $x=0$ ，则 $f(0)f(y) = \frac{f(y)+2f(-y)}{3}$ ，即 $3f(y) = f(y) + 2f(-y)$ ，

所以 $f(y) = f(-y)$ ， $f(x)$ 是偶函数，C 正确；

因为 $f(x) \neq 0$ ，所以 $f(2x) = 3f^2(x) - 2 > -2$ ，

所以 $\forall x \in \mathbb{R}$ ， $f(x) > -2$ ，D 错误.

故选：AC.

13. 已知函数 $f(x)$ 的定义域是 $(0, +\infty)$ ，且 $f(xy) = f(x) + f(y)$ ，当 $x > 1$ 时， $f(x) < 0$ ， $f(2) = -1$

，则下列说法正确的是（ ）

A. $f(1)=0$

B. 函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上是减函数

C. $f\left(\frac{1}{2022}\right)+f\left(\frac{1}{2021}\right)+\cdots+f\left(\frac{1}{3}\right)+f\left(\frac{1}{2}\right)+f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(2021)+f(2022)=2022$

D. 不等式 $f(x-3)-f\left(\frac{1}{x}\right)+2\leq 0$ 的解集为 $[4, +\infty)$

【答案】ABD

【分析】对于 A，利用赋值法求得 $f(1)=0$ ，从而得以判断；对于 B，根据函数的单调性定义结合抽象函数的性质，从而判断函数的单调性；对于 C，利用抽象函数的性质求得式子的值，由此得以判断；对于 D，先求得 $f(4)=-2$ ，再将不等式转化为 $f[x(x-3)]\leq f(4)$ ，从而得到关于 x 的不等式，解之即可判断。

【详解】对于 A，因为 $f(xy)=f(x)+f(y)$ ，

令 $x=y=1$ ，得 $f(1)=f(1)+f(1)=2f(1)$ ，所以 $f(1)=0$ ，故 A 正确；

对于 B，令 $y=\frac{1}{x}>0$ ，得 $f(1)=f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=0$ ，所以 $f\left(\frac{1}{x}\right)=-f(x)$ ，

任取 $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$ ，且 $x_1 < x_2$ ，则 $f(x_2)-f(x_1)=f(x_2)+f\left(\frac{1}{x_1}\right)=f\left(\frac{x_2}{x_1}\right)$ ，

因为 $\frac{x_2}{x_1}>1$ ，所以 $f\left(\frac{x_2}{x_1}\right)<0$ ，即 $f(x_2)-f(x_1)<0$ ，所以 $f(x_1)>f(x_2)$ ，

所以 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上是减函数，故 B 正确；

对于 C， $f\left(\frac{1}{2022}\right)+f\left(\frac{1}{2021}\right)+\cdots+f\left(\frac{1}{3}\right)+f\left(\frac{1}{2}\right)+f(2)+f(3)+\cdots+f(2021)+f(2022)$
 $=f\left(\frac{1}{2022}\times 2022\right)+f\left(\frac{1}{2021}\times 2021\right)+\cdots+f\left(\frac{1}{3}\times 3\right)+f\left(\frac{1}{2}\times 2\right)=f(1)+f(1)+\cdots+f(1)+f(1)=0$ ，故 C 错误；

对于 D，因为 $f(2)=-1$ ， $f(xy)=f(x)+f(y)$ ，所以 $f(4)=f(2)+f(2)=-2$ ，

又因为 $f\left(\frac{1}{x}\right)=-f(x)$ ，

所以由 $f(x-3)-f\left(\frac{1}{x}\right)+2\leq 0$ 得 $f(x-3)+f(x)\leq -2$ ，故 $f[x(x-3)]\leq f(4)$ ，

因为 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上是减函数，

$$\text{所以} \begin{cases} x(x-3) \geq 4 \\ x-3 > 0 \\ \frac{1}{x} > 0 \end{cases}, \text{解得 } x \geq 4,$$

所以不等式 $f(x-3) - f\left(\frac{1}{x}\right) + 2 \leq 0$ 的解集为 $[4, +\infty)$ ，故 D 正确。

故选：ABD。

【点睛】关键点睛：对于解含抽象函数的不等式问题，一般先利用抽象函数的性质求得其在定义域上的单调性，再利用其单调性脱去函数的符号“ f ”，转化为解不等式(组)的问题。

14. 已知 $f(x)$ 为非常值函数，若对任意实数 x, y 均有 $f(x+y) = \frac{f(x)+f(y)}{1+f(x) \cdot f(y)}$ ，且当 $x > 0$ 时， $f(x) > 0$ ，

则下列说法正确的有 ()

A. $f(x)$ 为奇函数

B. $f(x)$ 是 $(0, +\infty)$ 上的增函数

C. $|f(x)| < 1$

D. $f(x)$ 是周期函数

【答案】ABC

【分析】令 $x = y = 0$ ，代入 $f(x+y) = \frac{f(x)+f(y)}{1+f(x) \cdot f(y)}$ ，即可得到 $f(0)$ 再由 $f(0) = 0$ ，分别应用函数的奇偶

性，单调性，值域和周期性判断 A,B,C,D 选项即可

【详解】对于 A: 由题意 $f(x+y) = \frac{f(x)+f(y)}{1+f(x) \cdot f(y)}$ ，令 $x = y = 0$ ， $f(0) = \frac{2f(0)}{1+f(0)^2}$ ，解得： $f(0) = 0$ 或

$$f(0) = \pm 1$$

当 $f(0) = 1$ 时，令 $y = 0$ ，则 $f(x) = \frac{f(x)+f(0)}{1+f(x) \cdot f(0)} = \frac{f(x)+1}{1+f(x)} = 1$ 恒成立，又已知 $f(x)$ 为非常值函数故舍去，

当 $f(0) = -1$ 时，令 $y = 0$ ，则 $f(x) = \frac{f(x)+f(0)}{1+f(x) \cdot f(0)} = \frac{f(x)-1}{1-f(x)} = -1$ 恒成立，又已知 $f(x)$ 为非常值函数故舍去，

$\therefore f(0) = 0$ ，令 $y = -x$ ，则 $f(0) = \frac{f(x)+f(-x)}{1+f(x) \cdot f(-x)} = 0$ ，所以 $f(x) + f(-x) = 0$ ，即 $f(-x) = -f(x)$ ，

所以 $f(x)$ 为奇函数，故 A 正确；

对于 C: 令 $x=y=\frac{x}{2}$, $|f(x)| = \left| \frac{f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x}{2}\right)}{1 + f\left(\frac{x}{2}\right) \cdot f\left(\frac{x}{2}\right)} \right| = \frac{2\left|f\left(\frac{x}{2}\right)\right|}{1 + f\left(\frac{x}{2}\right)^2}$, 因为 $1 + f\left(\frac{x}{2}\right)^2 \geq 2\left|f\left(\frac{x}{2}\right)\right|$,

若 $f\left(\frac{x}{2}\right)=1$, 则 $f(x) = \frac{2f\left(\frac{x}{2}\right)}{1 + f\left(\frac{x}{2}\right)^2} = 1$, 又 $f(x)$ 为非常值函数故舍去,

所以 $f\left(\frac{x}{2}\right) \neq 1$, 所以 $1 + f\left(\frac{x}{2}\right)^2 > 2\left|f\left(\frac{x}{2}\right)\right|$, 所以 $|f(x)| = \frac{2\left|f\left(\frac{x}{2}\right)\right|}{1 + f\left(\frac{x}{2}\right)^2} < 1$, 故 C 正确:

对于 B: 设任意的 $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$ 且 $0 < x_1 < x_2$

令 $x=x_2, y=-x_1$ 所以 $f(x_2-x_1) = \frac{f(x_2)+f(-x_1)}{1+f(x_2) \cdot f(-x_1)}$, 又因为 $f(x)$ 为奇函数,

所以 $f(x_2-x_1) = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{1-f(x_2) \cdot f(x_1)}$, $|f(x_1)| < 1, |f(x_2)| < 1, f(x_2) \cdot f(x_1) < 1, 1-f(x_2) \cdot f(x_1) > 0$

又因为当 $x > 0$ 时, $f(x) > 0$, 所以 $f(x_2) > 0, f(x_1) > 0, x_2 - x_1 > 0, f(x_2-x_1) = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{1-f(x_2) \cdot f(x_1)} > 0$,

即 $f(x_2) > f(x_1)$, 所以 $f(x)$ 是 $(0, +\infty)$ 上的增函数, 故 B 正确;

对于 D: 因为 $f(x)$ 是 $(0, +\infty)$ 上的增函数, 又因为 $f(x)$ 为奇函数且 $f(0)=0$,

所以 $f(x)$ 是 $(-\infty, +\infty)$ 上的增函数, 故 $f(x)$ 不是周期函数, 故 D 错误.

故选: ABC.

15. 已知定义在 $(0, +\infty)$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $\forall x_1, x_2 \in (0, +\infty)$, 当 $x_1 \neq x_2$ 时, 有 $\frac{x_1 f(x_1) - x_2 f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0$, 则称

函数 $f(x)$ 为“理想函数”. 根据此定义, 下列函数为“理想函数”的是 ()

A. $f(x)=1$ B. $f(x)=\frac{1}{x^2}$ C. $f(x)=\sqrt{x}$ D. $f(x)=x-\frac{1}{x}$

【答案】ACD

【分析】利用定义判断和证明函数 $f(x)$ 是否为“理想函数”.

【详解】 $f(x)=1$ 时, $\forall x_1, x_2 \in (0, +\infty)$, 当 $x_1 \neq x_2$ 时, 有 $\frac{x_1 f(x_1) - x_2 f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{x_1 - x_2}{x_1 - x_2} = 1 > 0$, $f(x)=1$ 为“

理想函数”，A 选项正确；

$f(x) = \frac{1}{x^2}$ 时， $\forall x_1, x_2 \in (0, +\infty)$ ，当 $x_1 \neq x_2$ 时，有 $\frac{x_1 f(x_1) - x_2 f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{\frac{1}{x_1^2} - \frac{1}{x_2^2}}{x_1 - x_2} = -\frac{1}{x_1 x_2} < 0$ ， $f(x) = \frac{1}{x^2}$ 不是理想函数”，B 选项错误；

想函数”，B 选项错误；

$f(x) = \sqrt{x}$ 时， $\forall x_1, x_2 \in (0, +\infty)$ ，当 $x_1 \neq x_2$ 时，有 $\frac{x_1 f(x_1) - x_2 f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{(\sqrt{x_1})^3 - (\sqrt{x_2})^3}{(\sqrt{x_1})^2 - (\sqrt{x_2})^2} = \frac{x_1 + \sqrt{x_1 x_2} + x_2}{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}} > 0$ ，

$f(x) = \sqrt{x}$ 为“理想函数”，C 选项正确；

$f(x) = x - \frac{1}{x}$ 时， $\forall x_1, x_2 \in (0, +\infty)$ ，当 $x_1 \neq x_2$ 时，有 $\frac{x_1 f(x_1) - x_2 f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{x_1^2 - x_2^2}{x_1 - x_2} = x_1 + x_2 > 0$ ， $f(x) = x - \frac{1}{x}$

为“理想函数”，D 选项正确；

故选：ACD.

【点睛】思路点睛：定义型函数，是指给出阅读材料，设计一个陌生的数学情景，定义一个新函数，并给出新函数所满足的条件或具备的性质；或者给出已知函数，再定义一个新概念.

解答这类问题的关键在于阅读理解时，要准确把握新定义、新信息，并把它纳入已有的知识体系之中，用原来的知识和方法来解决新情景下的问题。

16. 已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 不恒等于零， $f(\pi) = 0$ ，且对任意的 $x, y \in \mathbf{R}$ ，有

$f(2x) + f(2y) = f(x+y)f(x-y)$ ，则 ()

A. $f(0) = 2$

B. $f(x)$ 是偶函数

C. $f(x)$ 的图象关于点 $(\pi, 0)$ 中心对称

D. 2π 是 $f(x)$ 的一个周期

【答案】ABC

【分析】分别给 x, y 取适当值代入条件，通过代数表达式判断函数性质.

【详解】对于 A，令 $y = x$ 得 $f(2x) + f(2x) = f(2x)f(0)$ ，又函数 $f(x)$ 不恒等于零，所以 $f(0) = 2$ ，选项 A 正确；

对于 B，令 $y = -x$ 得 $f(2x) + f(-2x) = f(0)f(2x) = 2f(2x)$ ，所以 $f(-2x) = f(2x)$ ，故函数 $f(x)$ 是偶函数，选项 B 正确；

对于 C, D，令 $x = \frac{t+\pi}{2}$ ， $y = \frac{t-\pi}{2}$ 得 $f(t+\pi) + f(t-\pi) = f(t)f(\pi) = 0$ ，即 $f(t+\pi) = -f(t-\pi)$ ，

$f(t+4\pi) = -f(t+2\pi) = f(t)$ ，所以函数 $f(x)$ 是周期函数，且周期为 4π ，选项 D 错误；又 $f(x)$ 是偶函数，

即 $f(t-\pi) = f(\pi-t)$ ，所以 $f(t+\pi) + f(t-\pi) = f(t+\pi) + f(\pi-t) = 0$ ，即 $f(t+\pi) = -f(\pi-t)$ ，所以 $f(x)$ 的图象关于点 $(\pi, 0)$ 对称，选项 C 正确.

故选：ABC.

17. 函数 $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$ ($x \in \mathbf{R}$), 以下四个结论正确的是 ()

A. $f(x)$ 的值域是 $(-1, 1)$

B. 对任意 $x \in \mathbf{R}$, 都有 $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < 1$

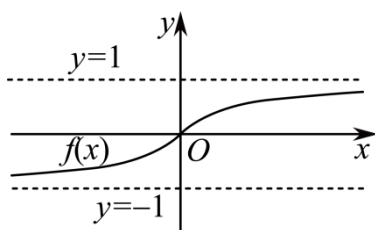
C. 若规定 $f_1(x) = f(x), f_{n+1}(x) = f(f_n(x))$, 则对任意的 $n \in \mathbf{N}^*, f_n(x) = \frac{x}{1+n|x|}$

D. 对任意的 $x \in [-1, 1]$, 若函数 $f(x) \leq t^2 - 2at + \frac{1}{2}$ 恒成立, 则当 $a \in [-1, 1]$ 时, $t \leq -2$ 或 $t \geq 2$

【答案】ABC

【分析】由函数解析式可得函数图象即可知其值域；构造函数判断函数的奇偶性和单调性即可判断选项 B；根据 C 中的描述结合归纳法可推得结论成立；由函数不等式恒成立，利用变换主元法、一元二次不等式的解法即可求参数范围.

【详解】由函数解析式可得 $f(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{x+1}, & x \geq 0 \\ \frac{1}{1-x} - 1, & x < 0 \end{cases}$, 有如下函数图象：



$\therefore f(x)$ 的值域是 $(-1, 1)$, 故该选项正确;

对于 B, 由题得 $f(-x) = \frac{-x}{1+|x|} = -f(x)$, 所以函数 $f(x)$ 是奇函数.

因为 $x_1 \neq x_2$, 不妨设 $x_1 > x_2$, 只需证明 $f(x_1) - f(x_2) < x_1 - x_2$, 只需证明 $f(x_1) - x_1 < f(x_2) - x_2$, 设

$g(x) = f(x) - x$, 只需证明函数 $g(x)$ 单调递减.

所以 $g(-x) = f(-x) + x = -f(x) + x = -g(x)$, 所以函数 $g(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的奇函数.

所以只要证明函数 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减. $g(x) = \frac{x}{1+|x|} - x = \frac{x}{1+x} - x = \frac{-x^2}{1+x} = -\frac{1}{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}} = -\frac{1}{(\frac{1}{x} + \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}}$,

由复合函数的单调性原理得函数 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减. 所以该选项正确.

对于 C, 有 $f_1(x) = \frac{x}{1+|x|}$, 若 $n \in \mathbf{N}^*, f_{n-1}(x) = \frac{x}{1+(n-1)|x|}$,

$\therefore$ 当 $n \geq 2$ 时, $f_n(x) = f(f_{n-1}(x)) = \frac{\frac{x}{1+(n-1)|x|}}{1+\frac{x}{1+(n-1)|x|}} = \frac{x}{1+n|x|}$, 故有 $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(x) = \frac{x}{1+n|x|}$. 所以该选项正确.

对于 D, $x \in [-1, 1]$ 上 $f(x)_{\max} = f(1) = \frac{1}{2}$, 若函数 $f(x) \leq t^2 - 2at + \frac{1}{2}$ 恒成立, 即有 $t^2 - 2at + \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2}$, $t^2 - 2at \geq 0$

恒成立, 令 $h(a) = -2at + t^2$, 即 $a \in [-1, 1]$ 上 $h(a) \geq 0$,

$\therefore t > 0$ 时, $h(1) = -2t + t^2 \geq 0$, 有 $t \geq 2$ 或 $t \leq 0$ (舍去);

$t = 0$ 时, $h(a) = 0$, 故恒成立;

$t < 0$ 时, $h(-1) = 2t + t^2 \geq 0$, 有 $t \leq -2$ 或 $t \geq 0$ (舍去);

综上, 有 $t \geq 2$ 或 $t = 0$ 或 $t \leq -2$; 所以该选项错误.

故选: ABC

【点睛】方法点睛: 1、对于简单的分式型函数式画出函数图象草图判断其值域、单调性; 2、利用函数不等式恒成立, 综合变换主元法、一次函数性质、一元二次不等式解法求参数范围.

18. 已知函数 $f(x)$ 、 $g(x)$ 定义域均为 $\mathbf{R}$, 且 $f(x+4) + f(-x) = 2$, $f(2x+1)$ 为偶函数, 若 $g(x) = -f(2-x)$, 则下面一定成立的是 ()

A. $f(0) = 1$

B. $g(3) = 0$

C. $f(2023) = f(3) = 1$

D. $g(2024) = g(0) = -1$

【答案】AD

【分析】根据条件判断 $f(x)$ 关于 $(2, 1)$ 中心对称和 $x = 1$ 轴对称, 可求出 $T = 4$ 是函数 $y = f(x)$ 的周期, 利用函数的对称性和周期性进行转化求解即可.

【详解】由 $f(x+4) + f(-x) = 2$ 可得函数 $f(x)$ 关于 $(2, 1)$ 中心对称,

且 $f(2) = 1$, 又因为 $f(2x+1)$ 为偶函数,

所以 $f(-2x+1) = f(2x+1)$, 令 $2x$ 等价于 x , 所以 $f(-x+1) = f(x+1)$

可知函数 $y = f(x)$ 关于 $x = 1$ 轴对称, 再令 $-x-1$ 替换 $-x$, 所以 $f(-x) = f(x+2)$,

所以 $f(x+4) + f(-x) = 2$ 知, $f(x+4) + f(x+2) = 2$,

$f(x+2) + f(x) = 2$, 所以 $f(x+4) = f(x)$, 即 $T = 4$ 是函数 $y = f(x)$ 的周期,

由 $f(-x+1) = f(x+1)$, 令 $x = 1$, 则 $f(2) = f(0) = 1$, 故 A 正确;

因为 $f(2023) = f(3)$, 由已知条件无法求出 $f(3) = 1$, 故 C 不正确;

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/437114036032006055>