解三角形

目录索引

基础回扣·考教衔接

1.(人A必二6.4.3节例题改编)在$\triangle ABC$中,$c=1,a=2,C=30°$,则$A=$(B)

A.60°　B.90°　C.45°　D.120°

解析　由正弦定理得,$\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$,所以$\frac{2}{\sin A}=\frac{1}{\sin 30°}$,解得 $\sin A=1$.

因为 $0°<A<180°$,所以 $A=90°$,故选 B.

2.(人A必二6.4.3节习题改编)已知$\triangle ABC$中,$AB=3,BC=4,AC=\sqrt{5}$,则$\triangle ABC$的面积等于(B)

A.3　　B.$\sqrt{11}$　　C.5　　D.$2\sqrt{5}$

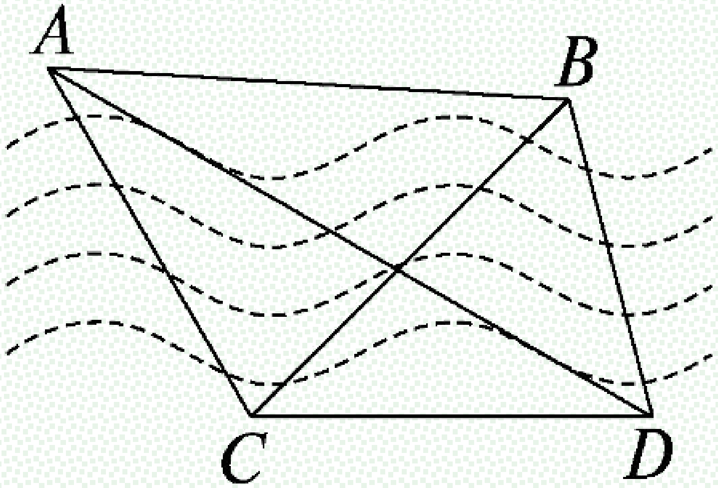
解析 由余弦定理推论得,$\cos B=\frac{AB^2+BC^2-AC^2}{2AB\cdot BC}=\frac{3^2+4^2-(\sqrt{5})^2}{2\times3\times4}=\frac{5}{6}$.

因为 $0°<B<180°$,则 $\sin B=\sqrt{1-\cos^2 B}=\frac{\sqrt{11}}{6}$,所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot BC\cdot\sin B$

$=\frac{1}{2}\times3\times4\times\frac{\sqrt{11}}{6}=\sqrt{11}$.

故选 B.

3.(人A必二6.4.3节例题改编)如图,某市区域地面有四个5G基站A,B,C,D.已知C,D两个基站建在江的南岸,距离为$20\sqrt{3}$ km,基站A,B在江的北岸,测得$\angle ACB=75°,\angle ACD=120°,\angle ADC=30°,\angle ADB=45°$,则$A,B$两个基站的距离为(　D　)



A.$15\sqrt{6}$ km　　B.$20\sqrt{3}$ km

C.40 km　　D.$20\sqrt{5}$ km

解析 在$\triangle ACD$中,$\angle ADC=30°$,$\angle ACD=120°$,所以$\angle CAD=30°$,

即$\angle CAD=\angle ADC$,故$AC=CD=20\sqrt{3}$.

在$\triangle BDC$中,$\angle CBD=180°-(\angle BCD+\angle BDC)=180°-(45°+75°)=60°$.

由正弦定理得,$\frac{BC}{\sin\angle BDC}=\frac{CD}{\sin\angle CBD}$,

解得$BC=\frac{20\sqrt{3}\times\sin 75°}{\sin 60°}=\frac{20\sqrt{3}\times\sin(30°+45°)}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$

$=40(\sin 30°\cos 45°+\cos 30°\sin 45°)=10(\sqrt{6}+\sqrt{2})$.

由题知,$\cos\angle ACB=\cos 75°=\cos 30°\cos 45°-\sin 30°\sin 45°=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.在$\triangle ABC$中,由余弦定理得,$AB^2=AC^2+BC^2-2AC\cdot BC\cdot\cos\angle ACB=(20\sqrt{3})^2+[10(\sqrt{6}+\sqrt{2})]^2-2\times 20\sqrt{3}\times 10(\sqrt{6}+\sqrt{2})\times\cos 75°=2\ 000$,解得$AB=20\sqrt{5}$,即两个基站$A$,$B$之间的距离为$20\sqrt{5}$ km.故选D.

4.(人A必二6.4.3节习题改编)在$\triangle ABC$中,已知$b=2,A=45°,C=75°$,则$c=$______.

$\sqrt{2}+\frac{\sqrt{6}}{3}$

解析 由题得,$B=180°-45°-75°=60°$.

由正弦定理,得$\frac{2}{\sin 60°}=\frac{c}{\sin 75°}$,得 $c=\sqrt{2}+\frac{\sqrt{6}}{3}$.

真题体验

1.(2023·全国乙,文4)记$\triangle ABC$的内角A,B,C的对边分别为a,b,c,若$a\cos B-b\cos A=c$,且$C=\frac{\pi}{5}$,则B=(　C　)

A.$\frac{\pi}{10}$　　B.$\frac{\pi}{5}$　　C.$\frac{3\pi}{10}$　　D.$\frac{2\pi}{5}$

解析 由$a\cos B-b\cos A=c$及正弦定理,得$\sin A\cos B-\sin B\cos A=\sin C$,

即$\sin(A-B)=\sin C$.

又因为A,B,C是$\triangle ABC$的内角,

所以 $A-B=C$,所以 $A-B=\frac{\pi}{5}$.①

又因为 $A+B=\pi-C=\frac{4\pi}{5}$,②

结合①②解得 $B=\frac{3\pi}{10}$.故选 C.

2.(2023·北京,7)在$\triangle ABC$中,$(a+b)(\sin A-\sin C)=b(\sin A-\sin B)$,则$C$=(　B　)

A.$\frac{\pi}{6}$　　B.$\frac{\pi}{3}$　　C.$\frac{2\pi}{3}$　　D.$\frac{5\pi}{6}$

解析　因为$(a+c)(\sin A-\sin C)=b(\sin A-\sin B)$,所以由正弦定理得

$(a+c)(a-c)=b(a-b)$,即 $a^2-c^2=ab-b^2$,故 $a^2+b^2-c^2=ab$,故 $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{ab}{2ab}=\frac{1}{2}$.

因为 $0<C<\pi$,所以 $C=\frac{\pi}{3}$.故选 B.

3.(2024·全国甲,理 11)记$\triangle ABC$的内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c,已知 $B=60°,b^2=\frac{9}{4}ac$,则 $\sin A+\sin C$=(　C　)

A.$\frac{3}{2}$　　　B.$\sqrt{2}$　　　C.$\frac{\sqrt{7}}{2}$　　　D.$\frac{\sqrt{3}}{2}$

解析　由 $b^2=\frac{9}{4}ac$,得 $\sin A\sin C=\frac{4}{9}\sin^2 B=\frac{1}{3}$,又 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B=a^2+c^2-ac=\frac{9}{4}ac$,

所以 $a^2+c^2=\frac{13}{4}ac$,即 $\sin^2 A+\sin^2 C=\frac{13}{4}\sin A\sin C=\frac{13}{12}$,

则$(\sin A+\sin C)^2=\sin^2 A+\sin^2 C+2\sin A\sin C=\frac{7}{4}$,

所以 $\sin A+\sin C=\frac{\sqrt{7}}{2}$.故选 C.

4.(2021·全国乙,理15)记$\triangle ABC$的内角A,B,C的对边分别为a,b,c,面积为$\sqrt{3}$,$B=60°$,$a^2+c^2=3ac$,则$b=$__________ $2\sqrt{2}$.

解析 由题意可知$\triangle ABC$的面积

$S=\frac{1}{2}ac\sin 60°=\sqrt{3}$,

整理得 $ac=4$.结合已知得 $a^2+c^2=3ac=12$.

因为 $B=60°$,由余弦定理可得 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B=12-2\times4\times\cos 60°=8$,

所以 $b=2\sqrt{2}$.

以题梳点•核心突破

考点一　正弦定理、余弦定理的直接应用

例 1(1)(2024·湖北黄石三模)若$\triangle ABC$的三个内角A,B,C所对的边分别为a,b,c,$B+C=60°$,$a=3$,则$\dfrac{\sin A+\sin B-\sin C}{a+b-c}=$(　B　)

A.$2\sqrt{3}$　　B.$\dfrac{\sqrt{3}}{6}$　　C.$\dfrac{1}{6}$　　D.6

解析　在$\triangle ABC$中,$B+C=60°$,所以$A=120°$,所以$\dfrac{\sin A}{a}=\dfrac{\sin 120°}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{6}$.由正弦定理可得,$b=\dfrac{a\sin B}{\sin A}$,$c=\dfrac{a\sin C}{\sin A}$,则$\dfrac{\sin A+\sin B-\sin C}{a+b-c}=\dfrac{\sin A+\sin B-\sin C}{a+\dfrac{a\sin B}{\sin A}-\dfrac{a\sin C}{\sin A}}=\dfrac{\sin A+\sin B-\sin C}{a\ 1+\dfrac{\sin B}{\sin A}-\dfrac{\sin C}{\sin A}}=\dfrac{\sin A+\sin B-\sin C}{a\cdot\dfrac{\sin A+\sin B-\sin C}{\sin A}}=\dfrac{\sin A}{a}=\dfrac{\sqrt{3}}{6}$.故选 B.

(2)(2024·福建厦门模拟)在△ABC中,内角A,B,C所对的边分别是a,b,c,已知$b-c=\frac{1}{4}a$,$2\sin B=3\sin C$,则$\cos A=$(A)

A.$-\frac{1}{4}$　　B.$\frac{1}{4}$　　C.$-\frac{1}{3}$　　D.$\frac{1}{3}$

解析　由 $2\sin B=3\sin C$,则 $2b=3c$,则 $b-c=b-\frac{2}{3}b=\frac{1}{4}a$,即 $b=\frac{3}{4}a$,则 $c=\frac{2}{3}b=\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}a=\frac{1}{2}a$

故 $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{\left(\frac{3}{4}a\right)^2+\left(\frac{1}{2}a\right)^2-a^2}{2\times\frac{3}{4}a\times\frac{1}{2}a}=\frac{-\frac{3}{16}}{\frac{3}{4}}=-\frac{1}{4}$.故选 A.

知识提炼

1. 正弦定理和余弦定理

定理	正弦定理	余弦定理
内容	$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$	$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$； $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$； $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$

变形形式	① $a=2R\sin A$，$b=2R\sin B$，$c=2R\sin C$； ② $\sin A=\frac{a}{2R}$，$\sin B=\frac{b}{2R}$，$\sin C=\frac{c}{2R}$（其中 R 是$\triangle ABC$外接圆的半径）； ③ $a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C$； ④ $a\sin B=b\sin A$，$b\sin C=c\sin B$，$a\sin C=c\sin A$	$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$； $\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$； $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$