第四章

乘法公式与全概率公式

目录索引

课程标准	**1**.结合古典概型,会利用乘法公式计算概率. **2**.结合古典概型,会利用全概率公式计算概率. ***3**.了解贝叶斯公式.

基础落实·必备知识一遍过

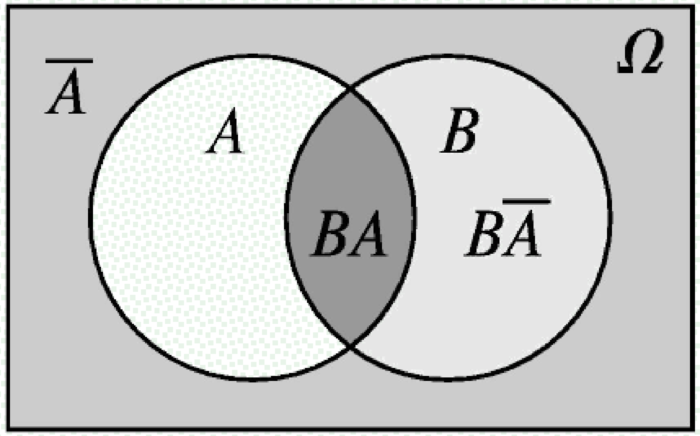
知识点　乘法公式与全概率公式

1.乘法公式:由条件概率的计算公式$P(B|A)=\dfrac{P(BA)}{P(A)}$可知,$P(BA)=$$\underline{P(A)P(B|A)}$,这就是说,根据事件$A$发生的概率,以及已知事件$A$发生的条件下事件$B$发生的概率,可以求出$A$与$B$同时发生的概率.一般地,这个结论称为乘法公式.

2.全概率公式: 全概率可理解为事件的和与乘法公式的综合应用

一般地,如果样本空间为 Ω,而 A,B 为事件,则 BA 与 $B\overline{A}$是互斥的,且

$B=B\Omega=B(A+\overline{A})=BA+B\overline{A}$,如图所示,从而 $P(B)=P(BA+B\overline{A})=P(BA)+P(B\overline{A})$.



更进一步,当 $P(A)>0$ 且 $P(\overline{A})>0$ 时,因为由乘法公式有

$P(BA)=\underline{P(A)P(B|A)}$,$P(B\overline{A})=P(\overline{A})P(B|\overline{A})$,所以 $P(B)=\underline{P(A)P(B|A)+P(\overline{A})P(B|\overline{A})}$.

这称为全概率公式.

定理1　若样本空间Ω中的事件$A_1,A_2,\ldots,A_n$满足:

(1)任意两个事件均互斥,即$A_iA_j=\varnothing,i,j=1,2,\ldots,n,i\neq j$;

(2)$A_1+A_2+\ldots+A_n=\Omega$;

(3)$P(A_i)>0,i=1,2,3,\ldots,n$.

则对Ω中的任意事件B,都有$B=BA_1+BA_2+\ldots+BA_n$,且

$$P(B)=\sum_{i=1}^{n}P(BA_i)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B|A_i).$$

上述公式也称为全概率公式.

*3. 贝叶斯公式:一般地,当$1>P(A)>0$且$P(B)>0$时,有

$$P(A|B)=\frac{P(A)P(B|A)}{P(B)}=\frac{P(A)P(B|A)}{P(A)P(B|A)+P(\overline{A})P(B|\overline{A})}.$$

这称为贝叶斯公式.

定理2　若样本空间Ω中的事件$A_1,A_2,\ldots,A_n$满足:

(1)任意两个事件均互斥,即$A_iA_j=\varnothing,i,j=1,2,\ldots,n,i\neq j$;

(2)$A_1+A_2+\ldots+A_n=\Omega$;

(3)$1>P(A_i)>0,i=1,2,\ldots,n$.

则对Ω中的任意概率非零的事件B,有$P(A_j|B)=\frac{P(A_j)P(B|A_j)}{P(B)}=\frac{P(A_j)P(B|A_j)}{\sum\limits_{i=1}^{n}P(A_i)P(B|A_i)}$.

上述公式也称为贝叶斯公式.

过关自诊

1.已知$P(A)=0.3$,$P(B|A)=0.2$,则$P(BA)=$__0.06__.

解析 $P(BA)=P(A)\cdot P(B|A)=0.3\times0.2=0.06$.

2.已知$P(A)=0.5$,$P(B|A)=0.3$,$P(B|\overline{A})=0.4$,则$P(B)=$__0.35__.

解析 $P(B)=P(A)\cdot P(B|A)+P(\overline{A})\cdot P(B|\overline{A})=0.5\times0.3+0.5\times0.4=0.35$.

3.袋子中有除颜色外完全相同的三个红球、一个黑球,从中不放回地摸球,每次摸一个球,则第二次摸到红球的概率是__$\frac{3}{4}$__.

解析 用A_1表示“第一次摸到红球”,A_2表示“第二次摸到红球”,B_1表示“第一次摸到黑球”,由全概率公式,$P(A_2)=P(A_1)P(A_2|A_1)+P(B_1)P(A_2|B_1)$

$=\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}+\frac{1}{4}\times1=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$.

重难探究·能力素养速提升

探究点一　乘法公式

【例1】 [北师大版教材例题]已知口袋中有3个黑球和7个白球,这10个球除颜色外完全相同.

(1)先后两次从中不放回地各摸出一球,求两次摸到的均为黑球的概率;

(2)从中不放回地摸球,每次各摸一球,求第三次才摸到黑球的概率.

解 设事件A_i表示“第i次摸到的是黑球”(i=1,2,3),则事件A_1A_2表示“两次摸到的均为黑球”.

(1)由题意知 $P(A_1)=\frac{3}{10}$,$P(A_2|A_1)=\frac{2}{9}$.

于是,根据乘法公式,有 $P(A_1A_2)=P(A_1)P(A_2|A_1)=\frac{3}{10}\times\frac{2}{9}=\frac{1}{15}$.

所以先后两次从中不放回地各摸出一球,两次摸到的均为黑球的概率为$\frac{1}{15}$.

(2)设事件 A 表示“第三次才摸到黑球”,则 $A=\overline{A}_1\overline{A}_2A_3$.

由题意知 $P(\overline{A}_1)=\frac{7}{10}$,$P(\overline{A}_2|\overline{A}_1)=\frac{6}{9}$,$P(A_3|\overline{A}_1\overline{A}_2)=\frac{3}{8}$.

于是,根据乘法公式,有 $P(\overline{A}_1\overline{A}_2A_3)=P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2|\overline{A}_1)\cdot P(A_3|\overline{A}_1\overline{A}_2)$

$=\frac{7}{10}\times\frac{6}{9}\times\frac{3}{8}=\frac{7}{40}$.

所以从中不放回地摸球,每次各摸一球,第三次才摸到黑球的概率为$\frac{7}{40}$.

变式探究 本例中条件不变,求先后两次从中不放回地各摸出一球,第一次取得黑球、第二次取得白球的概率.

解 设事件 B 表示"第二次取得白球",则 $P(B|A_1)=\frac{7}{9}$,所以

$P(A_1B)=P(A_1)P(B|A_1)=\frac{3}{10}\times\frac{7}{9}=\frac{7}{30}$.

规律方法　乘法公式求概率的关注点

(1)来源:乘法公式是条件概率公式的变形式.

(2)适用情境:求$P(AB)$时可用乘法公式.

变式训练1[北师大版教材习题]甲、乙两人参加面试,每人的试题通过不放回抽签的方式确定.假设被抽的10个试题签中有4个是难题签,按甲先乙后的次序抽签.

(1)求甲抽到难题签的概率;

(2)若甲抽到难题签,求乙也抽到难题签的概率;

(3)求甲和乙都抽到难题签的概率.

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：
https://d.book118.com/438002000055006126