专题 07 函数与导数常考压轴解答题

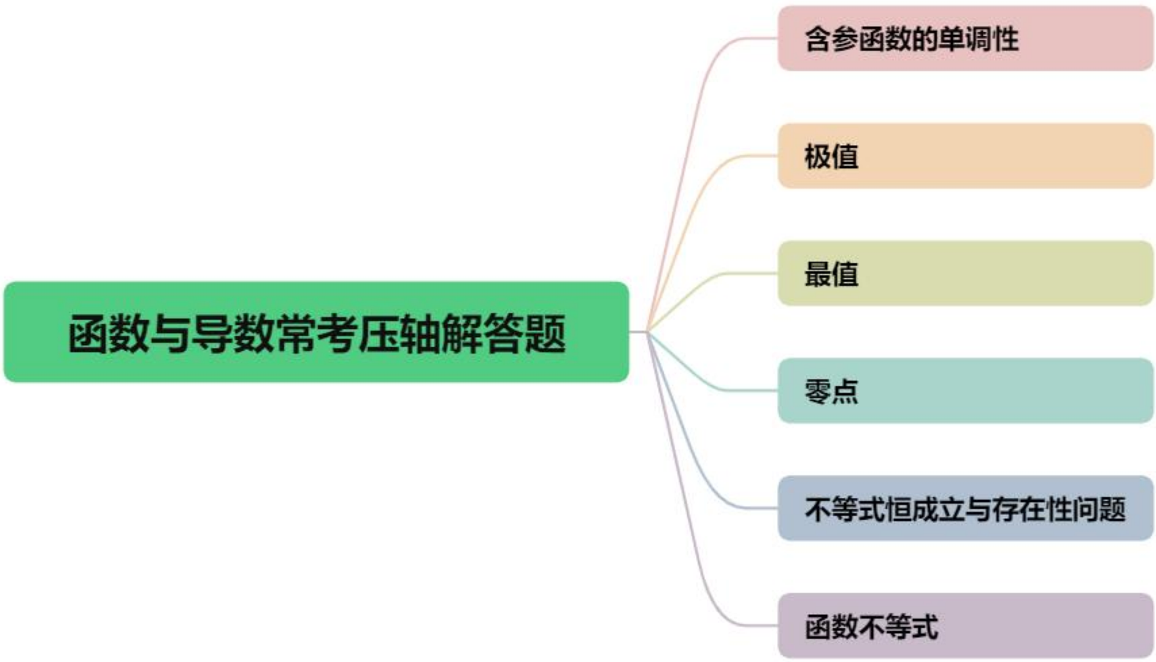
【目录】

考情分析

本节内容在高考中通常以压轴题形式出现，常见的有函数零点个数问题、不等式证明问题、不等式存在性问题等，综合性较强，难度较大.在求解导数综合问题时，通常要综合利用分类讨论、构造函数、等价转化、设而不求等思想方法，同时联系不等式、方程等知识，思维难度大，运算量不低.可以说，只要考生啃下本节这个硬骨头，就具有了强大的逻辑推理、数学运算、数据分析、直观想象等核心素养.

<table>
<tr><th>考点要求</th><th>考题统计</th><th>考情分析</th></tr>
<tr><td>不等式</td><td>2023 年 I 卷第 19 题，12 分
2023 年甲卷第 21 题，12 分
2023 年天津卷第 20 题，16 分
2022 年 II 卷第 22 题，12 分</td><td rowspan="4">【命题预测】
函数与导数是高中数学的重要考查内容，同时也是高等数学的基础，其试题的难度呈逐年上升趋势，通过对近十年的高考数学试题，分析并归纳出五大考点：
（1）含参函数的单调性、极值与最值；
（2）函数的零点问题；
（3）不等式恒成立与存在性问题；
（4）函数不等式的证明.
（5）导数中含三角函数形式的问题
其中，对于函数不等式证明中极值点偏移、隐零点问题、含三角函数形式的问题探究和不等式的放缩应用这四类问题是目前高考函数与导数压轴题的热点.</td></tr>
<tr><td>极最值</td><td>2023 年乙卷第 21 题，12 分
2023 年 II 卷第 22 题，12 分</td></tr>
<tr><td>恒成立与有解</td><td>2022 年 北京卷第 20 题，12 分
2021 年天津卷第 20 题，16 分
2020 年 I 卷第 21 题，12 分</td></tr>
<tr><td>零点问题</td><td>2022 年甲卷第 21 题，12 分
2022 年 I 卷第 22 题，12 分
2022 年乙卷第 20 题，12 分</td></tr>
</table>

知识建构



方法技巧

1、对称变换

主要用来解决与两个极值点之和、积相关的不等式的证明问题．其解题要点如下：（1）定函数（极值点为x_0），即利用导函数符号的变化判断函数单调性，进而确定函数的极值点 x_0．

（2）构造函数，即根据极值点构造对称函数 $F(x)=f(x)-f(2x_0-x)$，若证 $x_1x_2>x_0^2$ ，则令 $F(x)=f(x)-f(\frac{2x_0}{x})$．

（3）判断单调性，即利用导数讨论 $F(x)$ 的单调性．

（4）比较大小，即判断函数 $F(x)$ 在某段区间上的正负，并得出 $f(x)$ 与 $f(2x_0-x)$ 的大小关系．

（5）转化，即利用函数 $f(x)$ 的单调性，将 $f(x)$ 与 $f(2x_0-x)$ 的大小关系转化为x与$2x_0-x$之间的关系，进而得到所证或所求．

【注意】若要证明 $f'\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$的符号问题，还需进一步讨论 $\frac{x_1+x_2}{2}$ 与 x_0 的大小，得出 $\frac{x_1+x_2}{2}$ 所在的单调区间，从而得出该处导数值的正负．

构造差函数是解决极值点偏移的一种有效方法，函数的单调性是函数的重要性质之一，它的应用贯穿于整个高中数学的教学之中．某些数学问题从表面上看似乎与函数的单调性无关，但如果我们能挖掘其内在联系，抓住其本质，那么运用函数的单调性解题，能起到化难为易、化繁为简的作用．因此对函数的单调性进行全面、准确的认识，并掌握好使用的技巧和方法，这是非常必要的．根据题目的特点，构造一个适当的函数，利用它的单调性进行解题，是一种常用技巧．许多问题，如果运用这种思想去解决，往往能获得简洁明快的思路，有着非凡的功效

2、应用对数平均不等式$\sqrt{x_1x_2}<\dfrac{x_1-x_2}{\ln x_1-\ln x_2}<\dfrac{x_1+x_2}{2}$证明极值点偏移：

①由题中等式中产生对数；

②将所得含对数的等式进行变形得到$\dfrac{x_1-x_2}{\ln x_1-\ln x_2}$；

③利用对数平均不等式来证明相应的问题．

3、 比值代换是一种将双变量问题化为单变量问题的有效途径，然后构造函数利用函数的单调性证明题中的不等式即可．

真题研析

1．（2023•新高考Ⅰ）已知函数$f(x)=a(e^x+a)-x$．

（1）讨论$f(x)$的单调性；

（2）证明：当$a>0$时，$f(x)>2lna+\dfrac{3}{2}$．

【解析】（1）$f(x)=a(e^x+a)-x$，

则$f'(x)=ae^x-1$，

①当$a\quad 0$时，$f'(x)<0$恒成立，$f(x)$在R上单调递减，

②当$a>0$时，令$f'(x)=0$得，$x=ln\dfrac{1}{a}$，

当$x\in(-\infty,ln\dfrac{1}{a})$时，$f'(x)<0$，$f(x)$单调递减；当$x\in(ln\dfrac{1}{a}$，$+\infty)$时，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增，

综上所述，当$a\quad 0$时，$f(x)$在R上单调递减；当$a>0$时，$f(x)$在$(-\infty,ln\dfrac{1}{a})$上单调递减，在$(ln\dfrac{1}{a}$，$+\infty)$上单调递增．

证明：（2）由（1）可知，当$a>0$时，$f(x)_{min}=f(ln\dfrac{1}{a})=a(\dfrac{1}{a}+a)-ln\dfrac{1}{a}=1+a^2+lna$，

要证$f(x)>2lna+\dfrac{3}{2}$，只需证$1+a^2+lna>2lna+\dfrac{3}{2}$，

只需证 $a^2-lna-\frac{1}{2}>0$，

设 g（a）$=a^2-lna-\frac{1}{2}$，$a>0$，

则 g'（a）$=2a-\frac{1}{a}=\frac{2a^2-1}{a}$，

令 g'（a）$=0$ 得，$a=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

当 $a\in(0,\frac{\sqrt{2}}{2})$ 时，g'（a）<0，g（a）单调递减，当 $a\in(\frac{\sqrt{2}}{2}$，$+\infty)$ 时，g'（a）>0，g（a）单调递增，

所以 g（a）　$g(\frac{\sqrt{2}}{2})=\frac{1}{2}-ln\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}=-ln\frac{\sqrt{2}}{2}>0$，

即 g（a）>0，

所以 $a^2-lna-\frac{1}{2}>0$ 得证，

即 $f(x)>2lna+\frac{3}{2}$ 得证．

2．（2023•乙卷）已知函数 $f(x)=(\frac{1}{x}+a)ln(1+x)$．

（1）当 $a=-1$ 时，求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1$，f（1））处的切线方程；

（2）是否存在 a，b，使得曲线 $y=f(\frac{1}{x})$ 关于直线 $x=b$ 对称，若存在，求 a，b 的值，若不存在，说明理由；

（3）若 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 存在极值，求 a 的取值范围．

【解析】（1）$a=-1$ 时，f（1）$=0$，

$f'(x)=-\frac{1}{x^2}ln(x+1)+(\frac{1}{x}-1)(\frac{1}{x+1})$，$f'$（1）$=-ln2$，

$\therefore$ 曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1$，f（1））处的切线方程为 $y=-ln2(x-1)$．

（2）$f(\frac{1}{x})=(x+a)ln(\frac{x+1}{x})$，定义域为 $(-\infty$，$-1)\cup(0$，$+\infty)$，

要使函数 $f(\frac{1}{x})$ 的图像关于 $x=b$ 对称，则由 $x\neq0$，且 $x\neq-1$，可知 $b=-\frac{1}{2}$，

即 $f(\frac{1}{x})=(x+a)ln(\frac{x+1}{x})$ 的图像关于 $x=-\frac{1}{2}$ 对称，

则 f（1）$=(1+a)ln2$，$f(-2)=(-2+a)ln\frac{1}{2}=(2-a)ln2$，

得 $1+a=2-a$，解得 $a=\frac{1}{2}$．

综上，$a=\frac{1}{2}$，$b=-\frac{1}{2}$；

（3）由函数的解析式可得 $f'(x)=(-\frac{1}{x^2})ln(x+1)+(\frac{1}{x}+a)\frac{1}{x+1}$，

由 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 存在极值点，则 $f'(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上存在变号零点，

令 $(-\frac{1}{x^2})ln(x+1)+(\frac{1}{x}+a)\frac{1}{x+1}=0$，

则 $-(x+1)ln(x+1)+(x+ax^2)=0$，

令 $g(x)=ax^2+x-(x+1)ln(x+1)$，

$f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 存在极值点，等价于 $g(x)$ 在区间上存在变号零点，

$g'(x)=2ax-ln(x+1)$，$g''(x)=2a-\frac{1}{x+1}$，

当 $a\quad 0$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递减，

此时 $g(x)<g(0)=0$，$g(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上无零点，不合题意，

当 $a\quad \frac{1}{2}$，$2a\quad 1$ 时，由于 $\frac{1}{x+1}<1$，

$\therefore g$ “ $(x)>0$，$g'(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

$\therefore g'(x)>g'(0)=0$，$g(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增，$g(x)>g(0)=0$，

$\therefore g(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上无零点，不符合题意，

当 $0<a<\frac{1}{2}$ 时，由 $g''(x)=2a-\frac{1}{x+1}=0$，可得 $x=\frac{1}{2a}-1$，

当 $x\in(0,\frac{1}{2a}-1)$ 时，g “ $(x)<0$，$g'(x)$ 单调递减，

当 $x\in(\frac{1}{2a}-1$，$+\infty)$ 时，g “ $(x)>0$，$g'(x)$ 单调递增，

$\therefore g'(x)$ 的最小值为 $g'(\frac{1}{2a}-1)=1-2a+ln2a$，

令 $m(x)=1-x+lnx(0<x<1)$，则 $m'(x)=\frac{-x+1}{x}>0$，

函数 $m(x)$ 在定义域内单调递增，$m(x)<m$（1）$=0$，

$\therefore 1-x+lnx<0$ 恒成立，

$\therefore g'(\frac{1}{2a}-1)=1-2a+ln2a<0$，

令 $h(x)=lnx-x^2+x(x>0)$，则 $h'(x)=\frac{-2x^2+x+1}{x}$，

当 $x\in(0,1)$ 时，$h'(x)>0$，$h(x)$ 单调递增，

当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$h'(x)<0$，$h(x)$ 单调递减，

$\therefore h(x)$ h（1）$=0$，即 lnx x^2-x，当且仅当 $x=1$ 时，取等号，

$\therefore g'(x)=2ax-ln(x+1)>2ax-[(x+1)^2-(x+1)]=2ax-(x^2+x)$，

$g'(2a-1)>2a(2a-1)-[(2a-1)^2+(2a-1)]=0$，

$\because g'(0)=0$，$\therefore$ 根据零点存在定理得：

$g'(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上存在唯一零点 x_0，

当 $x\in(0,x_0)$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 单调递减，

当 $x\in(x_0$，$+\infty)$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增，

$\therefore g(x_0)<g(0)=0$，

令 $n(x)=lnx-\sqrt{x}$，则 $n'(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}=\dfrac{2-\sqrt{x}}{2x}$，

则函数 $n(x)=lnx-\sqrt{x}$ 在 $(0,4)$ 上单调递增，在 $(4,+\infty)$ 上单调递减，

$\therefore n(x)$ n（4）$=ln4-2<0$，$\therefore lnx<\sqrt{x}$，

$$\therefore g(\frac{4}{a^2})=(\frac{4}{a^2}+1)[a(\frac{4}{a^2}+1)-ln(\frac{4}{a^2}+1)-\frac{1-a}{\frac{4}{a^2}+1}-2a+1]$$

$$>(\frac{4}{a^2}+1)[\frac{4}{a}+a-ln(\frac{4}{a^2}+1)+a-1-2a+1]$$

$$=(\frac{4}{a^2}+1)[\frac{4}{a}-ln(\frac{4}{a^2}+1)]>(\frac{4}{a^2}+1)(\frac{4}{a}-\sqrt{\frac{4}{a^2}+1})$$

$$>(\frac{4}{a^2}+1)\frac{\frac{16}{a^2}-\frac{4}{a^2}-1}{\frac{4}{a}+\sqrt{\frac{4}{a^2}+1}}=(\frac{4}{a^2}+1)\frac{\frac{12}{a^2}-1}{\frac{4}{a}+\sqrt{\frac{4}{a^2}+1}}>0$$，

$\therefore$ 函数 $g(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上存在变号零点，符合题意．

综上，实数 a 得取值范围是 $(0,\dfrac{1}{2})$．

3．（2023•甲卷）已知 $f(x)=ax-\dfrac{\sin x}{cos^3x}$，$x\in(0,\dfrac{\pi}{2})$．

（1）若 $a=8$，讨论 $f(x)$ 的单调性；

（2）若 $f(x)<\sin 2x$ 恒成立，求 a 的取值范围．

【解析】（1）已知 $f(x)=ax-\dfrac{\sin x}{cos^3x}$，函数定义域为 $(0,\dfrac{\pi}{2})$，

若 $a=8$，此时 $f(x)=8x-\dfrac{\sin x}{cos^3x}$，

可得 $f'(x)=8-\dfrac{\cos x\cdot\cos^3 x+\sin x\cdot 3\cos^2 x\cdot\sin x}{cos^6 x}$

$=\dfrac{(4\cos^2 x+3)(2\cos^2 x-1)}{cos^4 x}$，

因为 $4\cos 2x+3>0$， $\cos^4 x>0$，

所以当 $\cos x>\dfrac{\sqrt{2}}{2}$， 即 $0<x<\dfrac{\pi}{4}$ 时， $f'(x)>0$， $f(x)$ 单调递增；

当 $\cos x<\dfrac{\sqrt{2}}{2}$， 即 $\dfrac{\pi}{4}<x<\dfrac{\pi}{2}$ 时， $f'(x)<0$， $f(x)$ 单调递减；

（2）不妨设 $g(x)=ax-\dfrac{\sin x}{cos^3 x}-\sin 2x$， 函数定义域为 $(0,\dfrac{\pi}{2})$，

$g'(x)=a-\dfrac{3-2\cos^2 x}{cos^4 x}-2\cos 2x=a-\dfrac{3-2\cos^2 x}{cos^4 x}-2(2\cos 2x-1)$，

令 $\cos 2x=t$， $0<t<1$，

此时 $g'(t)=a+2-4t+\dfrac{2}{t}-\dfrac{3}{t^2}$，

不妨令 $k(t)=a+2-4t+\dfrac{2}{t}-\dfrac{3}{t^2}$，

可得 $k'(t)=-4-\dfrac{2}{t^2}+\dfrac{6}{t^3}=-\dfrac{2(t-1)(2t^2+2t+3)}{t^3}>0$，

所以 $k(t)$ 单调递增，

此时 $k(t)<k$ （1） $=a-3$，

①当 a 3 时， $g'(x)=k(t)<a-3$ 0，

所以 $g(x)$ 在 $(0,\dfrac{\pi}{2})$ 上单调递减，

此时 $g(x)<g(0)=0$，

则当 a 3 时， $f(x)<\sin 2x$ 恒成立，符合题意；

②当 $a>3$ 时，

当 $t\to 0$ 时， $\dfrac{2}{t}-\dfrac{3}{t^2}=-3(\dfrac{1}{t}-\dfrac{1}{3})2+\dfrac{1}{3}\to-\infty$，

所以 $k(t)\to-\infty$，

又 k （1） $=a-3>0$，

所以在区间 $(0,1)$ 上存在一点 t_0， 使得 $k(t_0)=0$，

即存在 $x_0\in(0,\dfrac{\pi}{2})$， 使得 $g'(x_0)=0$，

当 $t_0<t<1$ 时， $k(t)>0$，

所以当$0<x<x_0$时，$g'(x)>0$，$g(x)$单调递增，

可得当$0<x<x_0$时，$g(x)>g(0)=0$，不符合题意，

综上，a的取值范围为$(-\infty$，$3]$.

4.（2023•天津）已知函数$f(x)=(\frac{1}{x}+\frac{1}{2})ln(x+1)$.

（Ⅰ）求曲线$y=f(x)$在$x=2$处的切线斜率；

（Ⅱ）当$x>0$时，求证：$f(x)>1$；

（Ⅲ）证明：$\frac{5}{6}<ln(n!)-(n+\frac{1}{2})lnn+n\quad 1$.

【解析】（Ⅰ）对函数$f(x)$求导，可得$f'(x)=\frac{x+2}{2x(x+1)}-\frac{1}{x^2}ln(x+1)$，

则曲线$y=f(x)$在$x=2$处的切线斜率为f'（2）$=\frac{1}{3}-\frac{ln3}{4}$；

（Ⅱ）证明：当$x>0$时，$f(x)>1$，即$\frac{x+2}{2x}ln(x+1)>1$，即$g(x)=ln(x+1)-\frac{2x}{x+2}>0$，

而$g'(x)=\frac{x^2}{(x+1)(x+2)^2}>0,g(x)$ 在$(0,+\infty)$上单调递增，

因此$g(x)>g(0)=0$，原不等式得证；

（Ⅲ）证明：设数列$\{a_n\}$的前n项和$S_n=ln(n!)-(n+\frac{1}{2})lnn+n$，

则$a_1=S_1=1$；

当$n\quad 2$时，$a_n=S_n-S_{n-1}=1+(n-\frac{1}{2})ln\frac{n-1}{n}=1-(\frac{1}{\frac{1}{n-1}}+\frac{1}{2})ln(1+\frac{1}{n-1})=1-f(\frac{1}{n-1})$，

由（2），$a_n<0(n\quad 2)$，

故$S_n\quad S_1=1$，不等式右边得证；

要证$\frac{5}{6}\quad S_n$，只需证：对任意的$n\quad 2$，$\sum_{k=2}^{n}(-a_k)=\sum_{k=2}^{n}(f(\frac{1}{k-1})-1)\quad \frac{1}{6}$，

令$h(x)=ln(x+1)-\frac{x(x+2)}{2(x+1)}$，则$h'(x)=-\frac{x^2}{2(x+1)^2}$，

当$x>0$时，$h'(x)<0$，函数$h(x)$在$(0,+\infty)$上单调递减，

则$h(x)<0$，即$ln(x+1)<\frac{x(x+2)}{2(x+1)}$，

则$f(x)-1<\frac{x+2}{2x}\cdot\frac{x(x+2)}{2(x+1)}-1=\frac{x^2}{4(x+1)}<\frac{x^2}{4}$，

因此当$k\ \ 2$时，$f(\frac{1}{k-1})-1<\frac{1}{4(k-1)^2}<\frac{1}{4(k-1)^2-1}=\frac{1}{2}(\frac{1}{2k-3}-\frac{1}{2k-1})$，

当$n\ \ 4$时，累加得

$\sum\limits_{k=4}^{n}(-a_k)=\sum\limits_{k=4}^{n}(f(\frac{1}{k-1})-1)<\frac{1}{2}[(\frac{1}{5}-\frac{1}{7})+(\frac{1}{7}-\frac{1}{9})+\ldots+(\frac{1}{2n-3}-\frac{1}{2n-1})]=\frac{1}{2}(\frac{1}{5}-\frac{1}{2n-1})<\frac{1}{10}$，

又$-a_2=f(1)-1=\frac{3}{2}ln2-1<\frac{3}{2}\times0.694-1=0.041$，$-a_3=\frac{5}{2}ln\frac{3}{2}-1<\frac{5}{2}(1.1-0.693)-1=0.0175$，

故$\sum\limits_{k=2}^{n}(-a_k)=-a_2-a_3+\sum\limits_{k=4}^{n}(-a_k)=0.041+0.0175+\frac{1}{10}=0.1585<\frac{1}{6}$，即得证．

5．（2023•新高考Ⅱ）（1）证明：当$0<x<1$时，$x-x^2<\sin x<x$；

（2）已知函数$f(x)=\cos ax-ln(1-x^2)$，若$x=0$为$f(x)$的极大值点，求a的取值范围．

【解析】（1）证明：设$g(x)=x-x^2-\sin x$，$x\in(0,1)$，

则$g'(x)=1-2x-\cos x$，$\therefore g''(x)=-2+\sin x<0$，

$\therefore g'(x)$在$(0,1)$上单调递减，

$\therefore g'(x)<g'(0)=0$，

$\therefore g(x)$在$(0,1)$上单调递减，

$\therefore g(x)<g(0)=0$，

即$x-x^2-\sin x<0$，$x\in(0,1)$，

$\therefore x-x^2<\sin x$，$x\in(0,1)$，

设$h(x)=x-\sin x$，$x\in(0,1)$，

则$h'(x)=1-\cos x>0$，

$\therefore h(x)$在$(0,1)$上单调递增，

$\therefore h(x)>h(0)=0$，$x\in(0,1)$，

即$x-\sin x>0$，$x\in(0,1)$，

$\therefore \sin x<x$，$x\in(0,1)$，

综合可得：当$0<x<1$时，$x-x^2<\sin x<x$；

（2）$\because f'(x)=-a\sin ax+\frac{2x}{1-x^2}$，$\therefore f''(x)=-a^2\cos ax+\frac{2+2x^2}{(1-x^2)^2}$，

且$f'(0)=0$，$f''(0)=-a^2+2$，

①若$f''(0)=2-a^2>0$，即$-\sqrt{2}<a<\sqrt{2}$时，

易知存在$t_1>0$，使得$x\in(0,t_1)$时，$f''(x)>0$，

$\therefore f'(x)$在$(0,t_1)$上单调递增，$\therefore f'(x)>f'(0)=0$，

$\therefore f(x)$ 在 $(0,t_1)$ 上单调递增，这显然与 $x=0$ 为函数的极大值点相矛盾，故舍去；

②若 $f''(0)=2-a^2<0$，即 $a<-\sqrt{2}$ 或 $a>\sqrt{2}$ 时，

存在 $t_2>0$，使得 $x\in(-t_2$，$t_2)$ 时，$f''(x)<0$，

$\therefore f'(x)$ 在 $(-t_2$，$t_2)$ 上单调递减，又 $f'(0)=0$，

$\therefore$ 当 $-t_2<x<0$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增；

当 $0<x<t_2$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减，满足 $x=0$ 为 $f(x)$ 的极大值点，符合题意；

③若 $f''(0)=2-a^2=0$，即 $a=\pm\sqrt{2}$ 时，$\because f(x)$ 为偶函数，

$\therefore$ 只考虑 $a=\sqrt{2}$ 的情况，

此时 $f'(x)=-\sqrt{2}\sin(\sqrt{2}x)+\dfrac{2x}{1-x^2}$，$x\in(0,1)$ 时，

$f'(x)>-2x+\dfrac{2x}{1-x^2}=2x(\dfrac{1}{1-x^2}-1)>0$，

$\therefore f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，与显然与 $x=0$ 为函数的极大值点相矛盾，故舍去．

综合可得：a 的取值范围为 $(-\infty$，$-\sqrt{2})\cup(\sqrt{2}$，$+\infty)$．

6．（2022•甲卷）已知函数 $f(x)=\dfrac{e^x}{x}-lnx+x-a$．

（1）若 $f(x)\quad 0$，求 a 的取值范围；

（2）证明：若 $f(x)$ 有两个零点 x_1，x_2，则 $x_1x_2<1$．

【解析】（1）$f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，$f'(x)=\dfrac{e^x(x-1)}{x^2}-\dfrac{1}{x}+1=\dfrac{(e^x+x)(x-1)}{x^2}$，

令 $f'(x)>0$，解得 $x>1$，故函数 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 单调递减，$(1,+\infty)$ 单调递增，

故 $f(x)_{min}=f$（1）$=e+1-a$，要使得 $f(x)\quad 0$ 恒成立，仅需 $e+1-a\quad 0$，

故 $a\quad e+1$，故 a 的取值范围是 $(-\infty$，$e+1]$；

（2）证明：由已知有函数 $f(x)$ 要有两个零点，故 f（1）$=e+1-a<0$，即 $a>e+1$，

不妨设 $0<x_1<1<x_2$，要证明 $x_1x_2<1$，即证明 $x_2<\dfrac{1}{x_1}$，

$\because 0<x_1<1$，$\therefore \dfrac{1}{x_1}>1$，

即证明：$1<x_2<\dfrac{1}{x_1}$，又因为 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 单调递增，

即证明：$f(x_2)<f(\dfrac{1}{x_1})\Leftrightarrow f(x_1)<f(\dfrac{1}{x_1})$，

构造函数 $h(x)=f(x)-f(\dfrac{1}{x})$，$0<x<1$，

$h'(x)=f'(x)-[f(\frac{1}{x})]'=\frac{(x-1)(e^{x}+x-xe^{\frac{1}{x}}-1)}{x^{2}}$，

构造函数 $m(x)=e^{x}+x-xe^{\frac{1}{x}}-1$，

$m'(x)=e^{x}+1-e^{\frac{1}{x}}(1-\frac{1}{x})$，因为 $0<x<1$，所以 $1-\frac{1}{x}<0$，

故 $m'(x)>0$ 在 $(0,1)$ 恒成立，故 $m(x)$ 在 $(0,1)$ 单调递增，

故 $m(x)<m$ （1） $=0$

又因为 $x-1<0$，故 $h'(x)>0$ 在 $(0,1)$ 恒成立，故 $h(x)$ 在 $(0,1)$ 单调递增，

又因为 h （1） $=0$，故 $h(x)<h$ （1） $=0$，

故 $f(x_1)<f(\frac{1}{x_1})$，即 $x_1x_2<1$．得证．

7．（2022•新高考Ⅱ）已知函数 $f(x)=xe^{ax}-e^{x}$．

（1）当 $a=1$ 时，讨论 $f(x)$ 的单调性；

（2）当 $x>0$ 时，$f(x)<-1$，求 a 的取值范围；

（3）设 $n\in N^{*}$，证明：$\frac{1}{\sqrt{1^{2}+1}}+\frac{1}{\sqrt{2^{2}+2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n^{2}+n}}>ln(n+1)$．

【解析】（1）当 $a=1$ 时，$f(x)=xe^{x}-e^{x}=e^{x}(x-1)$，

$f'(x)=e^{x}(x-1)+e^{x}=xe^{x}$，

$\because e^{x}>0$，

$\therefore$ 当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增；当 $x\in(-\infty,0)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减．

（2）令 $g(x)=f(x)+1=xe^{ax}-e^{x}+1(x>0)$，

$\because f(x)<-1$，$f(x)+1<0$，

$\therefore g(x)<g(0)=0$ 在 $x>0$ 上恒成立，

又 $g'(x)=e^{ax}+axe^{ax}-e^{x}$，

令 $h(x)=g'(x)$，则 $h'(x)=ae^{ax}+a(e^{ax}+axe^{ax})-e^{x}=a(2e^{ax}+axe^{ax})-e^{x}$，

$\therefore h'(0)=2a-1$，

①当 $2a-1>0$，即 $a>\frac{1}{2}$，存在 $\delta>0$，使得当 $x\in(0,\delta)$ 时，$h'(x)>0$，即 $g'(x)$ 在 $(0,\delta)$ 上单调递增．

因为 $g'(x)>g'(0)=0$，所以 $g(x)$ 在 $(0,\delta)$ 内递增，所以 $f(x)>-1$，这与 $f(x)<-1$ 矛盾，故舍去；

②当 $2a-1\quad 0$，即 $a\quad \frac{1}{2}$，

$g'(x)=e^{ax}+axe^{ax}-e^{x}=(1+ax)e^{ax}-e^{x}$，

若$1+ax\leqslant 0$，则$g'(x)<0$，

所以$g(x)$在$[0，+\infty)$上单调递减，$g(x)\leqslant g(0)=0$，符合题意．

若$1+ax>0$，则$g'(x)=e^{ax}+axe^{ax}-e^{x}=e^{ax+ln(1+ax)}-e^{x}\leqslant e^{\frac{1}{2}x+ln(1+\frac{1}{2}x)}-e^{x}\leqslant e^{\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}x}-e^{x}=0$，

所以$g(x)$在$(0,+\infty)$上单调递减，$g(x)\leqslant g(0)=0$，符合题意．

综上所述，实数a的取值范围是$a\leqslant\frac{1}{2}$．

另$f(x)$的导数为$f'(x)=(1+ax)e^{ax}-e^{x}(x>0)$，

①当$a\geqslant 1$时，$f'(x)=(1+ax)e^{ax}-e^{x}>e^{ax}-ex\geqslant e^{x}-e^{x}=0$，

所以$f(x)$在$(0,+\infty)$递增，所以$f(x)>-1$，与题意矛盾；

②当$a\leqslant 0$时，$f'(x)\leqslant e^{ax}-e^{x}\leqslant 1-e^{x}<0$，

所以$f(x)$在$(0,+\infty)$递减，所以$f(x)<-1$，满足题意;．

③当$0<a\leqslant\frac{1}{2}$时，$f'(x)\leqslant(1+\frac{1}{2}x)e^{\frac{1}{2}x}-e^{x}=e^{\frac{1}{2}x}[(1+\frac{1}{2}x)-e^{\frac{1}{2}x}]$．

设$G(x)=(1+\frac{1}{2}x)-e^{\frac{1}{2}x}(x>0)$，$G'(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x}<0$，则$G(x)$在$(0,+\infty)$递减，所以$G(x)<0$，

$f'(x)=e^{\frac{1}{2}x}G(x)<0$，所以$f(x)$在$(0,+\infty)$递减，所以$f(x)<-1$，满足题意；

④当$\frac{1}{2}<a<1$时，$f'(x)=e^{ax}[(1+ax)-e^{(1-a)x}]$，

令$H(x)=(1+ax)-e^{(1-a)x}$，则$f'(x)=e^{ax}H(x)$，$H'(x)=a+(a-1)e^{(1-a)x}$，

可得$H'(x)$递减，$H'(0)=2a-1$，

所以存在$x_0>0$，使得$H'(x_0)=0$．当$x\in(0,x_0)$时，$H'(x)>0$，

$H(x)$在$(0,x_0)$递增，此时$H(x)>0$，

所以当$x\in(0,x_0)$时，$f'(x)=e^{ax}H(x)>0$，$f(x)$在$(0,x_0)$递增，所以$f(x)>-1$，与题意矛盾．

综上可得，a的取值范围是$(-\infty，\frac{1}{2}]$．

（3）由（2）可知，当$a=\frac{1}{2}$时，$f(x)=xe^{\frac{1}{2}x}-e^{x}<-1(x>0)$，

令$x=ln(1+\frac{1}{n})(n\in N^{*})$得，$ln(1+\frac{1}{n})\cdot e^{\frac{1}{2}ln(1+\frac{1}{n})}-e^{ln(1+\frac{1}{n})}<-1$，

整理得，$ln(1+\frac{1}{n})\cdot\sqrt{1+\frac{1}{n}}-\frac{1}{n}<0$，

$\therefore \dfrac{\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}} > ln(1+\dfrac{1}{n})$，

$\therefore \dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}} > ln(\dfrac{n+1}{n})$， $\therefore \sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{\sqrt{k^2+k}} > \sum\limits_{k=1}^{n} ln(\dfrac{k+1}{k}) = ln(\dfrac{2}{1}\times\dfrac{3}{2}\times\ldots\times\dfrac{n+1}{n}) = ln(n+1)$，

即 $\dfrac{1}{\sqrt{1^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{2^2+2}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}} > ln(n+1)$．

另运用数学归纳法证明．

当 $n=1$ 时，左边 $=\dfrac{1}{\sqrt{1^2+1}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2} > ln2$ 成立．

假设当 $n=k(k\quad 1,k\in N^*)$ 时，不等式成立，即 $\dfrac{1}{\sqrt{1^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{2^2+2}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{k^2+k}} > ln(k+1)$．

当 $n=k+1$ 时，要证 $\dfrac{1}{\sqrt{1^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{2^2+2}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{k^2+k}}+\dfrac{1}{\sqrt{(k+1)^2+(k+1)}} > ln(k+2)$，

只要证 $ln(k+1)+\dfrac{1}{\sqrt{(k+1)^2+(k+1)}} > ln(k+2)$，

即证 $\dfrac{1}{\sqrt{(k+1)^2+(k+1)}} > ln(k+2)-ln(k+1)=ln\dfrac{k+2}{k+1}=ln(1+\dfrac{1}{k+1})$．

可令 $t=\dfrac{1}{k+1}$，则 $t\in(0$，$\dfrac{1}{2}]$，则需证明 $\dfrac{t}{\sqrt{t+1}} > ln(1+t)$，

再令 $x=\sqrt{t+1}(x\in(1,\dfrac{\sqrt{6}}{2}])$，则需证明 $x-\dfrac{1}{x} > 2lnx(x\in(1,\dfrac{\sqrt{6}}{2}])$．

构造函数 $g(x)=2lnx-(x-\dfrac{1}{x})(x\in(1$，$\dfrac{\sqrt{6}}{2}])$，

$g'(x)=\dfrac{2}{x}-1-\dfrac{1}{x^2}=-(1-\dfrac{1}{x})^2 < 0$，

可得 $g(x)$ 在 $(1$，$\dfrac{\sqrt{6}}{2}]$ 上递减，

则 $g(x) < g$（1）$=0$，所以原不等式成立，

即 $n=k+1$ 时，$\dfrac{1}{\sqrt{1^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{2^2+2}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{k^2+k}}+\dfrac{1}{\sqrt{(k+1)^2+(k+1)}} > ln(k+2)$ 成立．

综上可得，$\dfrac{1}{\sqrt{1^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{2^2+2}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}} > ln(n+1)$ 成立．

8．（2021•天津）已知 $a>0$，函数 $f(x)=ax-xe^x$．

（1）求曲线 $f(x)$ 在点 $(0$，$f(0))$ 处的切线方程；

（2）证明函数 $f(x)$ 存在唯一的极值点；

（3）若 $\exists a$ ，使得 $f(x)\quad a+b$ 对任意的 $x\in R$ 恒成立，求实数 b 的取值范围．

【解析】（1）因为 $f'(x)=a-(x+1)e^{x}$，所以 $f'(0)=a-1$，而 $f(0)=0$，

所以在 $(0，\ f(0))$ 处的切线方程为 $y=(a-1)x(a>0)$；

（2）证明：令 $f'(x)=a-(x+1)e^{x}=0$，则 $a=(x+1)e^{x}$，

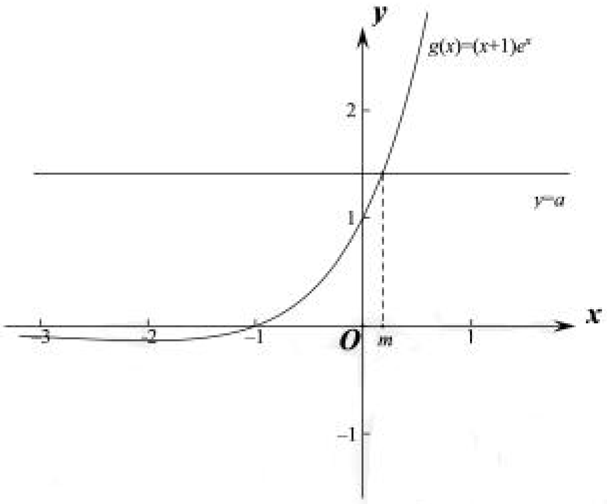
令 $g(x)=(x+1)e^{x}$，则 $g'(x)=(x+2)e^{x}$，令 $g'(x)=0$，解得 $x=-2$，

当 $x\in(-\infty,-2)$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 单调递减，

当 $x\in(-2,+\infty)$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增，

当 $x\to-\infty$ 时，$g(x)<0$，当 $x\to+\infty$ 时，$g(x)>0$，

作出图象，如图，



所以当 $a>0$ 时，$y=a$ 与 $y=g(x)$ 仅有一个交点，令 $g(m)=a$，

则 $m>-1$，且 $f'(m)=a-g(m)=0$，

当 $x\in(-\infty,m)$ 时，$a>g(x)$，$f'(x)>0$，$f(x)$ 为增函数；

当 $x\in(m,+\infty)$ 时，$a<g(x)$，$f'(x)<0$，$f(x)$ 为减函数；

所以 $x=m$ 时是 $f(x)$ 的极大值点，故 $f(x)$ 仅有一个极值点；

（3）由（2）知 $f(x)_{max}=f(m)$，

此时 $a=(1+m)e^{m}$，$(m>-1)$，

所以 $\{f(x)-a\}_{max}=f(m)-a=(1+m)me^{m}-me^{m}-(1+m)e^{m}=(m^{2}-m-1)e^{m}(m>-1)$，

令 $h(x)=(x^{2}-x-1)e^{x}(x>-1)$，

若存在 a，使 $f(x)\quad a+b$ 对任意的 $x\in R$ 恒成立，

则等价于存在 $x\in(-1,+\infty)$，使得 $h(x)\quad b$，即 $b\quad h(x)_{min}$，

而 $h'(x)=(x^{2}+x-2)e^{x}=(x-1)(x+2)e^{x}$，$(x>-1)$，

当 $x\in(-1,1)$ 时， $h'(x)<0$ ， $h(x)$ 为单调减函数，

当 $x\in(1,+\infty)$ 时， $h'(x)>0$ ， $h(x)$ 为单调增函数，

所以 $h(x)_{min}=h$ （1） $=-e$ ，故 $b\quad -e$ ，

所以实数 b 的取值范围 $[-e$ ， $+\infty)$.

核心考点

考点一：含参数函数单调性讨论

规律总结

1、导函数为含参一次型的函数单调性

导函数的形式为含参一次函数时，首先讨论一次项系数为 0，导函数的符号易于判断，当一次项系数不为零，讨论导函数的零点与区间端点的大小关系，结合导函数图像判定导函数的符号，写出函数的单调区间.

2、导函数为含参二次型函数的单调性

当主导函数（决定导函数符号的函数）为二次函数时，确定原函数单调区间的问题转化为探究该二次函数在给定区间上根的判定问题．对于此二次函数根的判定有两种情况：

（1）若该二次函数不容易因式分解，就要通过判别式来判断根的情况，然后再划分定义域；

（2）若该二次函数容易因式分解，令该二次函数等于零，求根并比较大小，然后再划分定义域，判定导函数的符号，从而判断原函数的单调性.

3、导函数为含参二阶求导型的函数单调性

当无法直接通过解不等式得到一阶导函数的符号时，可对“主导”函数再次求导，使解题思路清晰．“再构造、再求导”是破解函数综合问题的强大武器.

在此我们首先要清楚 $f''(x)$、$f'(x)$、$f(x)$ 之间的联系是如何判断原函数单调性的.

（1）二次求导目的：通过 $f''(x)$ 的符号，来判断 $f'(x)$ 的单调性；

（2）通过赋特殊值找到 $f'(x)$ 的零点，来判断 $f'(x)$ 正负区间，进而得出 $f(x)$ 单调性.

题型特训

例 1.（2023・河北承德・高三校联考期中）已知函数 $f\left(x\right)=x\left(1-a\ln x\right)\left(a\neq 0\right)$.

(1)讨论 $f\left(x\right)$ 的单调性；

【解析】(1) $f\left(x\right)=x\left(1-a\ln x\right),x\in\left(0,+\infty\right)$ ，

所以 $f'\left(x\right)=-a\ln x+1-a$ ，

令 $f'\left(x\right)=0$ ，得 $x=\mathrm{e}^{\frac{1-a}{a}}$.

当 $a>0$ 时， $x\in(0,\mathrm{e}^{\frac{1-a}{a}}), f'(x)>0$； $x\in(\mathrm{e}^{\frac{1-a}{a}},+\infty), f'(x)<0$；

所以 $f(x)$ 在 $(0,\mathrm{e}^{\frac{1-a}{a}})$ 上单调递增，在 $(\mathrm{e}^{\frac{1-a}{a}},+\infty)$ 上单调递减.

当 $a<0$ 时， $x\in(0,\mathrm{e}^{\frac{1-a}{a}}), f'(x)<0$； $x\in(\mathrm{e}^{\frac{1-a}{a}},+\infty), f'(x)>0$；

所以 $f(x)$ 在 $(0,\mathrm{e}^{\frac{1-a}{a}})$ 上单调递减，在 $(\mathrm{e}^{\frac{1-a}{a}},+\infty)$ 上单调递增.

例 2．（2023・广东广州・高三广东广雅中学校考阶段练习）已知 $f(x)=\ln x-\frac{1}{2}ax^2-ax(a\in\mathrm{R})$.

(1)讨论 $f(x)$ 的单调性；

【解析】（1）由函数 $f(x)=\ln x-\frac{1}{2}ax^2-ax$，可得函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，

且 $f'(x)=\frac{1}{x}-ax-a=-\frac{ax^2+ax-1}{x}$，令 $h(x)=ax^2+ax-1$，

若 $a=0$ 时， $h(x)=-1<0$，则 $f'(x)>0$，可得 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增；

若 $a>0$ 时，因为 $\Delta=a^2+4a>0$，

令 $h(x)=0$，解得 $x=\frac{-a+\sqrt{a^2+4a}}{2a}$ 或 $x=\frac{-a-\sqrt{a^2+4a}}{2a}<0$（舍去），

当 $x\in(0,\frac{-a+\sqrt{a^2+4a}}{2a})$ 时， $h(x)<0$，则 $f'(x)>0$，可得 $f(x)$ 单调递增；

当 $x\in(\frac{-a+\sqrt{a^2+4a}}{2a},+\infty)$ 时， $h(x)>0$，则 $f'(x)<0$，可得 $f(x)$ 单调递减，

所以函数 $f(x)$ 的递增区间为 $(0,\frac{-a+\sqrt{a^2+4a}}{2a})$，递减区间为 $(\frac{-a+\sqrt{a^2+4a}}{2a},+\infty)$；

若 $a<0$ 时，函数 $h(x)=ax^2+ax-1$ 开口向下，对称轴为 $x=-\frac{1}{2}$ 且 $h(0)=-1$，

当 $x\in(0,+\infty)$ 时， $h(x)<0$，则 $f'(x)>0$，可得 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增.

例 3．（2023・全国・高三专题练习）已知函数 $f(x)=\ln x+(1-a)x+1(a\in\mathrm{R})$，讨论函数 $f(x)$ 的单调性.

【解析】因为 $f(x)=\ln x+(1-a)x+1(a\in\mathrm{R})$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，

所以 $f'(x)=\frac{1}{x}+(1-a)=\frac{(1-a)x+1}{x}$，其中 $x>0$，

当 $1-a\geq0$ 时，即 $a\leq1$， $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

当 $1-a<0$ 时，即 $a>1$，

令 $f'(x)=\frac{(1-a)x+1}{x}>0$，得 $0<x<\frac{1}{a-1}$；

令 $f'(x)=\frac{(1-a)x+1}{x}<0$，得 $x>\frac{1}{a-1}$，

所以 $f(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{1}{a-1}\right)$ 上单调递增，在 $\left(\dfrac{1}{a-1},+\infty\right)$ 上单调递减.

综上，当 $a\le 1$ 时，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增；

当 $a>1$ 时，$f(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{1}{a-1}\right)$ 上单调递增，在 $\left(\dfrac{1}{a-1},+\infty\right)$ 上单调递减.

考点二：导数与数列不等式的综合问题

规律总结

在解决等差、等比数列综合问题时，要充分利用基本公式、性质以及它们之间的转化关系，在求解过程中要树立"目标意识"，"需要什么，就求什么"，并适时地采用"巧用性质，整体考虑"的方法．可以达到减少运算量的目的．

题型特训

例 4．（2023·辽宁·高三校联考阶段练习）已知函数 $f(x)=\ln(x+1)-\dfrac{ax}{x+1}$.

(1)当 $a=1$ 时，求 $f(x)$ 的极值；

(2)若 $f(x)\ge 0$，求 a 的值；

(3)求证：$\sin\dfrac{1}{n+1}+\sin\dfrac{1}{n+2}+\cdots+\sin\dfrac{1}{2n}<\ln 2\left(n\in \mathrm{N}^*\right)$.

【解析】（1）当 $a=1$ 时，$f(x)=\ln(x+1)-\dfrac{x}{x+1}$，$x>-1$，

则 $f'(x)=\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{(x+1)^2}=\dfrac{x}{(x+1)^2}$，

当 $x\in(-1,0)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减，

当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$f¢(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，

所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处取得极小值 0，无极大值；

（2）由题意得 $f'(x)=\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{a}{(x+1)^2}=\dfrac{x-(a-1)}{(x+1)^2}$，

①当 $a\le 0$ 时，$f¢(x)>0$，所以 $f(x)$ 在 $(-1,+\infty)$ 上单调递增，

所以当 $x\in(-1,0)$ 时，$f(x)<f(0)=0$，与 $f(x)\ge 0$ 矛盾；

②当 $a>0$ 时，当 $x\in(-1,\mathrm{a}-1)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减，

当 $x\in(a-1,+\infty)$ 时，$f¢(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，

所以 $f(x)_{\min}=f(a-1)=\ln a-(a-1)$，

因为 $f(x)\ge 0$ 恒成立，所以 $\ln a-(a-1)\ge 0$，

记 $g(a)=\ln a-(a-1)$， $g'(a)=\dfrac{1}{a}-1=\dfrac{1-a}{a}$，

当 $a\in(0,1)$ 时， $g'(a)>0$， $g(a)$ 单调递增，

当 $a\in(1,+\infty)$ 时， $g'(a)<0$， $g(a)$ 单调递减，

所以 $g(a)_{\max}=g(1)=0$，所以 $\ln a-(a-1)\le 0$，

又 $\ln a-(a-1)\ge 0$，

所以 $\ln a-(a-1)=0$，

所以 $a=1$；

（3）证明：先证 $\sin x<x(x>0)$，

设 $h(x)=\sin x-x(x>0)$，则 $h'(x)=\cos x-1\le 0$，

所以 $h(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递减，

所以 $h(x)<h(0)=0$，即 $\sin x<x$，

所以 $\sin\dfrac{1}{n+1}+\sin\dfrac{1}{n+2}+\cdots+\sin\dfrac{1}{2n}<\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\cdots+\dfrac{1}{2n}$，

再证 $\dfrac{1}{n+1}<\ln\dfrac{n+1}{n}$，

由（2）可知 $\ln(x+1)\ge\dfrac{x}{x+1}$，当 $x=0$ 时等号成立，

令 $x=\dfrac{1}{n}\left(n\in\mathrm{N}^*\right)$，则 $\ln\left(\dfrac{1}{n}+1\right)\ge\dfrac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}+1}$，

即 $\dfrac{1}{n+1}<\ln\dfrac{n+1}{n}=\ln(n+1)-\ln n$，

所以 $\dfrac{1}{n+2}<\ln(n+2)-\ln(n+1)$，……， $\dfrac{1}{n+n}<\ln(2n)-\ln(2n-1)$，

累加可得 $\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\cdots+\dfrac{1}{2n}<\ln(2n)-\ln n=\ln 2$，

所以 $\sin\dfrac{1}{n+1}+\sin\dfrac{1}{n+2}+\cdots+\sin\dfrac{1}{2n}<\ln 2$.

例 5.（2023·广东·高三校联考阶段练习）设 $f(x)=ax^2+\cos x-1$， $a\in\mathbf{R}$.

(1)当 $a=\dfrac{1}{\pi}$ 时，求函数 $f(x)$ 的最小值；

(2)当 $a\ge\dfrac{1}{2}$ 时，证明： $f(x)\ge 0$；

(3)证明：$\cos\frac{1}{2}+\cos\frac{1}{3}+\cdots+\cos\frac{1}{n}>n-\frac{4}{3}\left(n\in\mathbf{N}^{*},n>1\right)$.

【解析】（1）因为$f(x)$的定义域为$\mathbf{R}$，且$f(-x)=a(-x)^2+\cos(-x)-1=ax^2+\cos x-1=f(x)$，

所以$f(x)$为偶函数，

下取$x\ge 0$，

当$a=\frac{1}{\pi}$时，$f(x)=\frac{1}{\pi}x^2+\cos x-1$，则$f'(x)=\frac{2}{\pi}x-\sin x$，

当$x>\frac{\pi}{2}$时，则$f'(x)=\frac{2}{\pi}x-\sin x>1-\sin x\ge 0$，可知$f(x)$在$\left(\frac{\pi}{2},+\infty\right)$内单调递增，

当$0\le x\le\frac{\pi}{2}$时，令$g(x)=f'(x)$，则$g'(x)=\frac{2}{\pi}-\cos x$，

可知$g'(x)$在$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$内单调递增，

因为$0<\frac{2}{\pi}<1$，则$\exists x_0\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，使得$\cos x_0=\frac{2}{\pi}$，

当$x\in[0,x_0)$时，$g'(x)<0$；当$x\in\left(x_0,\frac{\pi}{2}\right]$时，$g'(x)>0$；

所以$g(x)$在$[0,x_0)$上单调递减，在$\left(x_0,\frac{\pi}{2}\right]$上单调递增，且$g(0)=g\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$，

则$f'(x)=g(x)\le 0$在$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$内恒成立，可知$f(x)$在$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$内单调递减；

综上所述：$f(x)$在$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$内单调递减，在$\left(\frac{\pi}{2},+\infty\right)$内单调递增，

所以$f(x)$在$[0,+\infty)$内的最小值为$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{4}-1$，

又因为$f(x)$为偶函数，所以$f(x)$在$\mathbf{R}$内的最小值为$\frac{\pi}{4}-1$.

（2）由（1）可知$f(x)$为定义在$\mathbf{R}$上的偶函数，下取$x\ge 0$，

可知$f'(x)=2ax-\sin x$，令$\varphi(x)=f'(x)=2ax-\sin x$，

因为$a\ge\frac{1}{2}$，则$\varphi'(x)=2a-\cos x\ge 1-\cos x\ge 0$，

则$\varphi(x)$在$[0,+\infty)$内单调递增，可得$\varphi(x)\ge\varphi(0)=0$，

即$f'(x)\ge 0$在$[0,+\infty)$内恒成立，可知$f(x)$在$[0,+\infty)$内单调递增，

所以$f(x)$在$[0,+\infty)$内的最小值为$f(0)=0$，

结合偶函数性质可知：$f(x)\ge 0$.

（3）由（2）可得：当 $a=\frac{1}{2}$ 时，$f(x)=\frac{1}{2}x^2+\cos x-1\geq 0$，当且仅当 $x=0$ 时，等号成立，

即 $\cos x\geq 1-\frac{1}{2}x^2$，令 $x=\frac{1}{n},n\geq 2,n\in\mathbf{N}^*$，则 $\cos\frac{1}{n}>1-\frac{1}{2n^2}$，

当 $n\geq 2$ 时，$\cos\frac{1}{n}>1-\frac{1}{2n^2}=1-\frac{2}{4n^2}>1-\frac{2}{4n^2-1}=1-\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$，

即 $\cos\frac{1}{n}>1-\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$，则有：

$\cos\frac{1}{2}>1-\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)$，$\cos\frac{1}{3}>1-\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)$，$\cdots$，$\cos\frac{1}{n}>1-\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$，

相加可得：$\cos\frac{1}{2}+\cos\frac{1}{3}+\cdots+\cos\frac{1}{n}>(n-1)-\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2n+1}\right)=n-\frac{4}{3}+\frac{1}{2n+1}$，

因为 $n\geq 2$，则 $\frac{1}{2n+1}>0$，所以 $\cos\frac{1}{2}+\cos\frac{1}{3}+\cdots+\cos\frac{1}{n}>n-\frac{4}{3}$，

即 $\cos\frac{1}{2}+\cos\frac{1}{3}+\cdots+\cos\frac{1}{n}>n-\frac{4}{3}\left(n\in\mathbf{N}^*,n>1\right)$.

例 6.（2023・天津北辰・高三天津市第四十七中学校考阶段练习）已知函数 $f(x)=x(2\ln x+1)-ax+a$.

(1)当 $a=1$ 时，求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程；

(2)当 $x>1$ 时，求使 $f(x)>0$ 恒成立的最大偶数 a.

(3)已知当 $x\geq 0$ 时，$\sin x\geq x-\frac{x^3}{6}$ 总成立．令 $g(x)=\sin x$，若在 $g(x)$ 的图像上有一点列

$A_i\left(\frac{1}{2^i},g\left(\frac{1}{2^i}\right)\right)(i=1,2,\cdots,n\in\mathbf{N},n\geq 1)$，若直线 A_iA_{i+1} 的斜率为 $k_i\,(i=1,2,\cdots,n-1)$，求证：$\sum\limits_{i=1}^{n-1}k_i>n-\frac{7}{6}$.

【解析】（1）当 $a=1$ 时，$f(x)=2x\ln x+1$，$f(1)=1$，

所以 $f'(x)=2\ln x+2$，曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,1)$ 处切线的斜率为 $f'(1)=2$，

所以切线方程为 $y-1=2(x-1)\Rightarrow 2x-y-1=0$.

（2）当 $x>1$ 时，使 $f(x)>0$ 等价于 $a<\frac{x(2\ln x+1)}{x-1}$，

令 $g(x)=\frac{x(2\ln x+1)}{x-1}(x>1)$，所以 $g'(x)=\frac{2x-2\ln x-3}{(x-1)^2}$，

令 $h(x)=2x-2\ln x-3(x>1)$，所以 $h'(x)=2-\frac{2}{x}=\frac{2(x-1)}{x}>0$，

所以 $h(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，

又因为 $h(2)=1-2\ln 2<0$，$h(\mathrm{e})=2\mathrm{e}-5>0$，

所以 $h(x)$ 在 $(2,\mathrm{e})$ 上 $\exists x_0\in(2,\mathrm{e})$，使 $h(x_0)=0$，即 $2x_0-3=2\ln x_0$，

当 $x\in(1,x_0)$ 时，$h'(x)<0$，$g'(x)<0$；

当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时，$h'(x)>0$，$g'(x)>0$；

所以 $g(x)$ 在 $(1,x_0)$ 上单调递减，$g(x)$ 在 $(x_0,+\infty)$ 上单调递增，

所以 $g(x)$ 的最小值为 $g(x_0)=\dfrac{x_0(2\ln x_0+1)}{x_0-1}=\dfrac{x_0(2x_0-3+1)}{x_0-1}=2x_0$，

因为 $x_0\in(2,\mathrm{e})$，所以 $g(x)\geq g(x_0)=2x_0$，

所以 $a<2x_0$，且 $2x_0\in(4,2\mathrm{e})$，

所以使 $f(x)>0$ 恒成立的最大偶数为 $a=4$.

（3）$i\in\mathbf{N}^*$ 时，$k_i=\dfrac{g\left(\frac{1}{2^{i+1}}\right)-g\left(\frac{1}{2^i}\right)}{\frac{1}{2^{i+1}}-\frac{1}{2^i}}=2^{i+1}\left(\sin\dfrac{1}{2^i}-\sin\dfrac{1}{2^{i+1}}\right)$，

$=2^{i+1}\left(2\sin\dfrac{1}{2^{i+1}}\cos\dfrac{1}{2^{i+1}}-\sin\dfrac{1}{2^{i+1}}\right)=2^{i+1}\sin\dfrac{1}{2^{i+1}}\left(2\cos\dfrac{1}{2^{i+1}}-1\right)$，

令 $m(x)=\cos x+\dfrac{x^2}{2}-1$，则 $m'(x)=-\sin x+x$，

令 $n(x)=-\sin x+x$，则 $n'(x)=1-\cos x\geq 0$，$n(x)$ 单调递增，

又 $n(0)=0$，所以，当 $x\geq 0$ 时，$n(x)\geq 0$，$m(x)$ 单调递增，

又 $m(0)=0$，所以，当 $x\geq 0$ 时，$m(x)=\cos x+\dfrac{x^2}{2}-1\geq m(0)=0$，

即 $\cos x\geq 1-\dfrac{x^2}{2}$，则 $\cos\dfrac{1}{2^{i+1}}\geq 1-\dfrac{1}{2^{2i+3}}>0$，

$$2^{i+1}\sin\frac{1}{2^{i+1}}\left(2\cos\frac{1}{2^{i+1}}-1\right)\geq 2^{i+1}\sin\frac{1}{2^{i+1}}\left(2\left(1-\frac{1}{2^{2i+3}}\right)-1\right)$$

$$=2^{i+1}\sin\frac{1}{2^{i+1}}\left(1-\frac{1}{2^{2i+2}}\right)\geq 2^{i+1}\left(\frac{1}{2^{i+1}}-\frac{1}{6\cdot 2^{3i+3}}\right)\left(1-\frac{1}{2^{2i+2}}\right)$$

$$=\left(1-\frac{1}{6\cdot 2^{2i+2}}\right)\left(1-\frac{1}{2^{2i+2}}\right)=1-\frac{7}{6}\times\frac{1}{2^{2i+2}}+\frac{1}{6}\times\frac{1}{2^{4i+4}}>1-\frac{7}{6}\times\frac{1}{2^{2i+2}},$$

$$\sum_{i=1}^{n-1}k_i>n-1-\frac{7}{6}\left(\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^6}+\frac{1}{2^8}+\cdots+\frac{1}{2^{2n}}\right)$$

$$=n-1-\frac{7}{6}\cdot\frac{\frac{1}{2^4}\left(1-\frac{1}{4^{n-1}}\right)}{1-\frac{1}{4}}=n-1-\frac{7}{6}\left(\frac{1}{12}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4^n}\right)$$

$$=n-1-\frac{7}{72}+\frac{7}{18}\cdot\frac{1}{4^n}>n-\frac{79}{72}>n-\frac{7}{6}.$$

考点三：双变量问题

规律总结

破解双参数不等式的方法：

一是转化，即由已知条件入手，寻找双参数满足的关系式，并把含双参数的不等式转化为含单参数的不等式；

二是巧构函数，再借用导数，判断函数的单调性，从而求其最值；

三是回归双参的不等式的证明，把所求的最值应用到双参不等式，即可证得结果．

题型特训

例 7.（2023·湖北荆门·高三荆门市龙泉中学校联考阶段练习）已知函数 $f(x)=\ln(mx)$，m 是大于 0 的常数.记曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_1,f(x_1))$ 处的切线为 l，l 在 x 轴上的截距为 x_2，$x_2>0$．

(1)当 $x_1=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$，$m=1$ 时，求切线 l 的方程；

(2)证明：$\left|x_1-\dfrac{1}{m}\right|\geq\left|x_2-\dfrac{1}{m}\right|$．

【解析】（1）因为 $f'(x)=\dfrac{1}{x}$，所以曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_1,f(x_1))$ 处切线方程为 $y-\ln(mx_1)=\dfrac{1}{x_1}(x-x_1)$．

即 $y=\dfrac{1}{x_1}x+\ln(mx_1)-1$，

当 $x_1=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$，$m=1$ 时，

切线 l 的方程为 $y=\mathrm{e}x-2$．

（2）对于切线 l：$y=\dfrac{1}{x_1}x+\ln(mx_1)-1$，

令 $y=0$，得 $x_2=x_1(1-\ln(mx_1))$，

由 $x_2>0$ 得 $x_1(1-\ln(mx_1))>0$，

因为 $m>0$，所以 $x_1>0$，$1-\ln mx_1>0\Rightarrow 0<x_1<\dfrac{\mathrm{e}}{m}$，

$x_2=x_1(1-\ln mx_1)$，令 $g(x)=x(1-\ln mx)$，$x\in\left(0,\dfrac{\mathrm{e}}{m}\right)$，

令 $g'(x)=-\ln mx$，由 $g'(x)=0$ 得 $x=\dfrac{1}{m}$，

则当 $x\in\left(0,\dfrac{1}{m}\right)$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增，

当$x\in\left(\frac{1}{m},\frac{\mathrm{e}}{m}\right)$时，$g'(x)<0$，$g(x)$单调递减，

所以$g(x)_{\max}=g\left(\frac{1}{m}\right)=\frac{1}{m}$.

所以，当$0<x_1<\frac{\mathrm{e}}{m}$，$x_2=g(x_1)\le\frac{1}{m}$，则$\left|x_2-\frac{1}{m}\right|=\frac{1}{m}-x_2$，

①当$0<x_1\le\frac{1}{m}$时，$\left|x_1-\frac{1}{m}\right|=\frac{1}{m}-x_1$，$\left|x_1-\frac{1}{m}\right|-\left|x_2-\frac{1}{m}\right|=\frac{1}{m}-x_1-\left(\frac{1}{m}-x_2\right)=x_2-x_1=-x_1\ln mx_1$，

因为$0<x_1\le\frac{1}{m}$，所以$-x_1\ln mx_1\ge0$，则$\left|x_1-\frac{1}{m}\right|\ge\left|x_2-\frac{1}{m}\right|$.

②当$\frac{1}{m}<x_1<\frac{\mathrm{e}}{m}$时，$\left|x_1-\frac{1}{m}\right|-\left|x_2-\frac{1}{m}\right|=\left(x_1-\frac{1}{m}\right)-\left(\frac{1}{m}-x_2\right)=x_2+x_1-\frac{2}{m}=x_1(2-\ln mx_1)-\frac{2}{m}$，

令$h(x)=x(2-\ln mx)-\frac{2}{m}$，$x\in\left(\frac{1}{m},\frac{\mathrm{e}}{m}\right)$，

$h'(x)=1-\ln mx$，当$x\in\left(\frac{1}{m},\frac{\mathrm{e}}{m}\right)$时，$h'(x)>0$，

所以$h(x)$在$\left(\frac{1}{m},\frac{\mathrm{e}}{m}\right)$上单调递增，

所以$h(x)>h\left(\frac{1}{m}\right)=0$，则$\left|x_1-\frac{1}{m}\right|\ge\left|x_2-\frac{1}{m}\right|$，

综上，$\left|x_1-\frac{1}{m}\right|\ge\left|x_2-\frac{1}{m}\right|$.

例 8.（2023·海南海口·高三海南中学校考阶段练习）已知函数$f(x)=\ln x-(m+1)x+\frac{1}{2}mx^2$.

(1)当$m>0$时，讨论函数$f(x)$的单调性；

(2)若函数$g(x)=f(x)-\frac{1}{2}mx^2$有两个零点$x_1$，$x_2$，且$x_2>\mathrm{e}x_1$，求证：$x_1x_2>\frac{2}{\mathrm{e}-1}$(其中$\mathrm{e}$是自然对数的底数).

【解析】(1) 函数$f(x)=\ln x-(m+1)x+\frac{1}{2}mx^2$的定义域为$(0,+\infty)$，

则$f'(x)=\frac{1}{x}-(m+1)+mx=\frac{mx^2-(m+1)x+1}{x}=\frac{(mx-1)(x-1)}{x}$，

当$m>0$时令$(mx-1)(x-1)=0$，解得$x=1$或$x=\frac{1}{m}$，

当$\frac{1}{m}=1$，即$m=1$时$f'(x)=\frac{(x-1)^2}{x}\ge0$恒成立，所以$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增；

当$0<\frac{1}{m}<1$即$m>1$时，令$f¢(x)>0$，解得$0<x<\frac{1}{m}$或$x>1$，则$f(x)$在$\left(0,\frac{1}{m}\right)$，$(1,+\infty)$上单调递增，

令 $f'(x)<0$，解得 $\frac{1}{m}<x<1$，则 $f(x)$ 在 $\left(\frac{1}{m},1\right)$ 上单调递减；

当 $0<m<1$ 即 $\frac{1}{m}>1$ 时，令 $f'(x)>0$，解得 $0<x<1$ 或 $x>\frac{1}{m}$，则 $f(x)$ 在 $(0,1)$，$\left(\frac{1}{m},+\infty\right)$ 上单调递增，

令 $f'(x)<0$，解得 $1<x<\frac{1}{m}$，则 $f(x)$ 在 $\left(1,\frac{1}{m}\right)$ 上单调递减；

综上可得， 当 $m=1$ 时，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增；

当 $m>1$ 时，$f(x)$ 在 $\left(0,\frac{1}{m}\right)$，$(1,+\infty)$ 上单调递增，在 $\left(\frac{1}{m},1\right)$ 上单调递减；

当 $0<m<1$ 时，$f(x)$ 在 $(0,1)$，$\left(\frac{1}{m},+\infty\right)$ 上单调递增，在 $\left(1,\frac{1}{m}\right)$ 上单调递减.

（2）因为 $g(x)=f(x)-\frac{1}{2}mx^2=\ln x-(m+1)x$，由题意 x_1，x_2 是方程 $\ln x-(m+1)x=0$ 的两个根，

$\therefore \ln x_1-(m+1)x_1=0$①，$\ln x_2-(m+1)x_2=0$②，

①②两式相加，得 $m+1=\frac{\ln x_1+\ln x_2}{x_1+x_2}$③，①②两式相减，得 $m+1=\frac{\ln x_1-\ln x_2}{x_1-x_2}$④，

联立③④，得 $\frac{\ln x_1+\ln x_2}{x_1+x_2}=\frac{\ln x_1-\ln x_2}{x_1-x_2}$，$\therefore \ln x_1+\ln x_2=(\ln x_2-\ln x_1)\frac{x_2+x_1}{x_2-x_1}=\ln\frac{x_2}{x_1}\cdot\frac{\frac{x_2}{x_1}+1}{\frac{x_2}{x_1}-1}$，

设 $t=\frac{x_2}{x_1}$，$\because x_2>\mathrm{e}x_1>0$，$\therefore t>\mathrm{e}$，$\therefore \ln x_1+\ln x_2=\ln t\cdot\frac{1+t}{t-1}$，$t\in(\mathrm{e},+\infty)$，

因为 $\mathrm{e}(\mathrm{e}-1)^2>2.7\times(2.7-1)^2=7.803>4$，所以 $\sqrt{\mathrm{e}}(\mathrm{e}-1)>2$，则 $\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}>\frac{2}{\mathrm{e}-1}$，

若 $x_1x_2>\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}$，则一定有 $x_1x_2>\frac{2}{\mathrm{e}-1}$，

$\therefore$ 只需证明当 $t>e$ 时，不等式 $\ln x_1+\ln x_2>\frac{1}{2}$ 成立即可，即不等式 $\ln t\cdot\frac{1+t}{t-1}>\frac{1}{2}$ 成立，即不等式 $\ln t>\frac{t-1}{2(t+1)}$ 成立，

设函数 $\varphi(t)=\ln t-\frac{t-1}{2(t+1)}$，$\varphi'(t)=\frac{1}{t}-\frac{1}{(t+1)^2}=\frac{(t+1)^2-t}{t(t+1)^2}=\frac{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}{t(t+1)^2}>0$，

$\therefore$ 在 $[\mathrm{e},+\infty)$ 上单调递增，故 $t>e$ 时，$\varphi(t)>\varphi(\mathrm{e})=\frac{\mathrm{e}+3}{2(\mathrm{e}+1)}>0$，

即证得 $\ln t>\frac{t-1}{2(t+1)}$ 成立，

即证得当 $t>e$ 时，$\ln t\cdot\frac{1+t}{t-1}>\frac{1}{2}$，即证得 $\ln x_1+\ln x_2>\frac{1}{2}$，

$\therefore \ln x_1x_2 > \frac{1}{2}$，即证得 $x_1x_2 > e^{\frac{1}{2}}$，则 $x_1x_2 > \frac{2}{e-1}$.

例 9.（2023·广东广州·高三华南师大附中校考阶段练习）设函数 $f(x)=x\ln x-x-\frac{1}{2}ax^2$ 的两个极值点分别为 x_1，$x_2\left(x_1<x_2\right)$.

(1)求实数 a 的取值范围；

(2)若不等式 $\frac{e^{\lambda}}{x_1}<\frac{x_2^{\lambda}}{e}$ 恒成立，求正数 λ 的取值范围（其中 $e=2.71828\cdots$ 为自然对数的底数）.

【解析】（1）由题 $f(x)=x\ln x-x-\frac{1}{2}ax^2$，定义域为 $(0,+\infty)$.

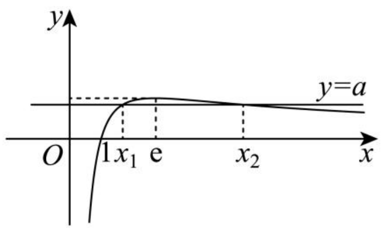
则 $f'(x)=1+\ln x-1-ax=\ln x-ax$，由题可得 $f'(x)=\ln x-ax=0$ 有两个不等实数根 x_1，x_2，

于是 $a=\frac{\ln x}{x}$ 有两个不同的实数根，等价于函数 $y=a$ 与 $h(x)=\frac{\ln x}{x}$ 图象在 $(0,+\infty)$ 有两个不同的交点，

$\because h'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$，由 $h'(x)>0\Rightarrow 0<x<e$，由 $h'(x)<0\Rightarrow x>e$，

所以 $h(x)$ 在 $(0,e)$ 递增，在 $(e,+\infty)$ 递减，

又 $h(1)=0$，$h(x)$ 有极大值为 $h(e)=\frac{1}{e}$，当 $x\to+\infty$ 时，$h(x)\to 0$，所以可得函数 $h(x)$ 的草图（如图所示）.



所以，要使函数 $y=a$ 与 $h(x)=\frac{\ln x}{x}$ 图象在 $(0,+\infty)$ 有两个不同的交点，当且仅当 $a\in\left(0,\frac{1}{e}\right)$.

即实数 a 的取值范围为 $\left(0,\frac{1}{e}\right)$

（2）由（1）可知：x_1，x_2 是方程 $F'(x)=\ln x-ax=0$ 的两个实数根，且 $1<x_1<e<x_2$.

则 $\begin{cases}\ln x_1=ax_1\\ \ln x_2=ax_2\end{cases}\Rightarrow a=\frac{\ln x_1-\ln x_2}{x_1-x_2}=\frac{\ln\frac{x_1}{x_2}}{x_1-x_2}$.

由于 $\frac{e^{\lambda}}{x_1}<\frac{x_2^{\lambda}}{e}$，两边取自然对数得 $\lambda-\ln x_1<\lambda\ln x_2-1\Rightarrow\lambda+1<\ln x_1+\lambda\ln x_2=ax_1+a\lambda x_2$，

即 $\lambda+1<a\left(x_1+\lambda x_2\right)=\frac{\ln\frac{x_1}{x_2}}{x_1-x_2}\left(x_1+\lambda x_2\right)=\frac{\left(\frac{x_1}{x_2}+\lambda\right)\ln\frac{x_1}{x_2}}{\frac{x_1}{x_2}-1}$，

令 $\frac{x_1}{x_2}=t\in(0,1)$，则 $\lambda+1<\frac{(t+\lambda)\ln t}{t-1}$ 在 $t\in\left(0,1\right)$ 恒成立.

所以 $\ln t-\frac{(\lambda+1)(t-1)}{t+\lambda}<0$ 在 $t\in\left(0,1\right)$ 恒成立

令 $h(t)=\ln t-\frac{(\lambda+1)(t-1)}{t+\lambda}(t\in(0,1))$，则 $h'(t)=\frac{1}{t}-\frac{(\lambda+1)^2}{(t+\lambda)^2}=\frac{(t-1)\left(t-\lambda^2\right)}{t(t+\lambda)^2}$.

①当 $\lambda^2\geq 1$ 即 $\lambda\geq 1$ 时，$h'(t)>0$，$h\left(t\right)$ 在 $\left(0,1\right)$ 递增，所以 $h(t)<h(1)=0$ 恒成立，满足题意.

②当 $0<\lambda<1$ 时，$h\left(t\right)$ 在 $\left(0,\lambda^2\right)$ 递增，在 $\left(\lambda^2,1\right)$ 递减，所以，当 $x\in\left(\lambda^2,1\right)$ 时，$h(t)>h(1)=0$，

因此，$h\left(t\right)<0$ 在 $t\in\left(0,1\right)$ 不能恒成立，不满足题意.

综上所述，$\lambda\geq 1$，即 λ 的取值范围是 $[1,+\infty)$.

考点四：证明不等式

规律总结

利用导数证明不等式问题，方法如下：

（1）直接构造函数法：证明不等式 $f(x)>g(x)$（或 $f(x)<g(x)$）转化为证明 $f(x)-g(x)>0$（或 $f(x)-g(x)<0$），进而构造辅助函数 $h(x)=f(x)-g(x)$；

（2）适当放缩构造法：一是根据已知条件适当放缩；二是利用常见放缩结论；

（3）构造“形似”函数，稍作变形再构造，对原不等式同解变形，根据相似结构构造辅助函数.

（4）对数单身狗，指数找基友

（5）凹凸反转，转化为最值问题

（6）同构变形

题型特训

例 10.（2023・河北・高三校联考期中）已知函数 $f\left(x\right)=\ln\left(1+x\right)+\frac{x^2}{2}$.

(1)当 $x\in\left(0,+\infty\right)$ 时，比较 $f\left(x\right)$ 与 x 的大小；

(2)若函数 $g\left(x\right)=\cos x+\frac{x^2}{2}$，且 $f\left(e^{\frac{a}{2}}\right)=g\left(b\right)-1(a>0,b>0)$，证明：$f\left(b^2\right)+1>g\left(a+1\right)$.

【解析】（1）设函数 $\varphi\left(x\right)=f\left(x\right)-x=\ln\left(1+x\right)+\frac{x^2}{2}-x$，

可得 $\varphi'\left(x\right)=\frac{1}{1+x}+x-1=\frac{x^2}{1+x}$，

当 $x\in\left(0,+\infty\right)$ 时，$\varphi'\left(x\right)>0$，则 $\varphi\left(x\right)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

所以 $\varphi\left(x\right)>\varphi\left(0\right)=0$，所以 $f\left(x\right)-x>0$，所以 $f\left(x\right)>x$.

（2）证明：设函数 $h(x)=f(x)+1-g(x)=\ln(1+x)+1-\cos x$，

当 $x>0$ 时，$1-\cos x\geq 0,\ln(1+x)>0$，则 $h(x)>0$ 恒成立，

则由 $h\left(e^{\frac{a}{2}}\right)>0$，得 $f\left(e^{\frac{a}{2}}\right)+1>g\left(e^{\frac{a}{2}}\right)$，

又 $f\left(e^{\frac{a}{2}}\right)+1=g(b)$，所以 $g(b)>g\left(e^{\frac{a}{2}}\right)$，

因为 $g(x)=\cos x+\frac{x^2}{2}$，可得 $g'(x)=x-\sin x$，

令 $t(x)=g'(x)=x-\sin x$，可得 $t'(x)=1-\cos x\geq 0$，

所以 $t(x)$ 单调递增，即 $g'(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

所以 $g'(x)>g'(0)=0$，

所以 $g(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

又 $b>0,e^{\frac{a}{2}}>0$，所以 $b>e^{\frac{a}{2}}$，同理得 $f(b^2)+1>g(b^2)$，

要证 $f(b^2)+1>g(a+1)$，

只需证 $g(b^2)>g(a+1)$，即证 $b^2>a+1$.

因为 $b>e^{\frac{a}{2}}$，所以 $b^2>e^a$，

设函数 $m(x)=e^x-x-1(x>0)$，则 $m'(x)=e^x-1>0$，

所以 $m(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

因为 $a>0$，所以 $m(a)>m(0)=0$，所以 $e^a>a+1$，

所以 $b^2>a+1$，

所以 $g(b^2)>g(a+1)$，即 $f(b^2)+1>g(a+1)$.

例 11.（2023·四川达州·统考一模）已知函数 $h(x)=me^x-x+1$.

(1)若 $h(x)$ 在 $(0,4)$ 上有唯一零点，求 m 的取值范围；

(2)若 $h(x)\geq h(x_0)$ 对任意实数 x 恒成立，证明：$m^2h(x_0)>-m^2+3m-1$.

【解析】（1）令 $h(x)=me^x-x+1=0$，得 $m=\frac{x-1}{e^x}$，

令 $g(x)=\frac{x-1}{e^x},x\in(0,4)$，则 $g'(x)=\frac{2-x}{e^x}$，

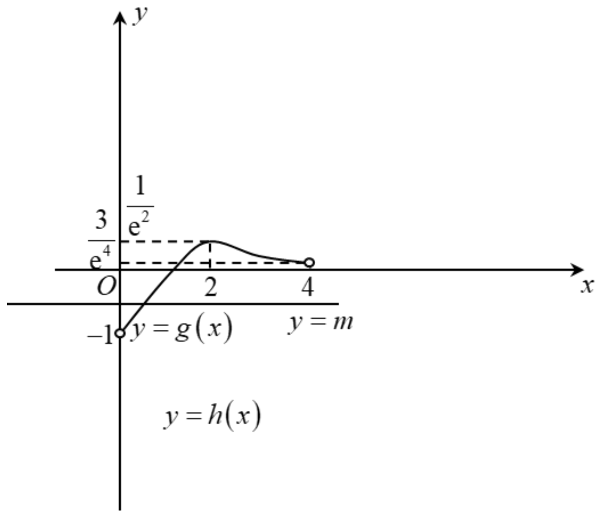
当 $0<x<2$ 时，$g'(x)>0$，当 $2<x<4$ 时，$g'(x)<0$，

所以函数 $g(x)$ 在 $(0,2)$ 上单调递增，在 $(2,4)$ 上单调递减，

所以 $g(x)_{\max}=g(2)=\dfrac{1}{e^2}$，

又 $g(0)=-1, g(4)=\dfrac{3}{e^4}$，

如图，作出函数 $g(x)=\dfrac{x-1}{e^x}, x\in(0,4)$ 的图象，



由图可知，m 的取值范围为 $m=\dfrac{1}{e^2}$ 或 $-1<m\le\dfrac{3}{e^4}$；

（2）因为 $h(x)\ge h(x_0)$ 对任意实数 x 恒成立，

所以 $h(x_0)$ 是函数 $h(x)$ 的最小值，

$h'(x)=me^x-1$，

当 $m\le 0$ 时，$h'(x)<0$，所以函数 $h(x)$ 在 R 上为减函数，

所以函数 $h(x)$ 没有最小值，不符合题意，

当 $m>0$ 时，$x<\ln\dfrac{1}{m}$ 时，$h'(x)<0$，$x>\ln\dfrac{1}{m}$ 时，$h'(x)>0$，

所以函数 $h(x)$ 在 $\left(-\infty,\ln\dfrac{1}{m}\right)$ 上单调递减，在 $\left(\ln\dfrac{1}{m},+\infty\right)$ 上单调递增，

所以 $h(x)_{\min}=h\left(\ln\dfrac{1}{m}\right)=\ln m+2$，

综上所述，$h(x_0)=h\left(\ln\dfrac{1}{m}\right)=\ln m+2\ (m>0)$，

则 $m^2h(x_0)>-m^2+3m-1$，即 $m^2(\ln m+2)>-m^2+3m-1$，

即 $m^2\ln m>-3m^2+3m-1$，即 $m\ln m>-\left(3m+\dfrac{1}{m}\right)+3$，

令 $f(m)=m\ln m,\varphi(m)=-\left(3m+\frac{1}{m}\right)+3\ (m>0)$，

$\varphi(m)=-\left(3m+\frac{1}{m}\right)+3\le -2\sqrt{3m\cdot\frac{1}{m}}+3=-2\sqrt{3}+3\ (m>0)$，

当且仅当 $3m=\frac{1}{m}$，即 $m=\frac{\sqrt{3}}{3}$ 时取等号，

所以 $\varphi(m)\le -2\sqrt{3}+3$，

$f'(m)=\ln m+1$，

当 $0<m<\frac{1}{e}$ 时，$f'(m)<0$，当 $m>\frac{1}{e}$ 时，$f'(m)>0$，

所以函数 $f(m)$ 在 $\left(0,\frac{1}{e}\right)$ 上单调递减，在 $\left(\frac{1}{e},+\infty\right)$ 上单调递增，

所以 $f(m)\ge f\left(\frac{1}{e}\right)=-\frac{1}{e}$，

因为 $-\frac{1}{e}>-0.4>-2\sqrt{3}+3$，

所以 $f(m)>\varphi(m)$，即 $m\ln m>-\left(3m+\frac{1}{m}\right)+3$，

所以 $m^2h(x_0)>-m^2+3m-1$.

例 12.（2023·安徽安庆·高三安徽省太湖中学校考阶段练习）已知函数 $f(x)=-ax^2+3+2\ln x$.

(1)讨论函数 $f(x)$ 的单调性；

(2)若函数 $f(x)$ 的极大值为 2，求实数 a 的值；

(3)在（2）的条件下，方程 $f(x)=m$ 存在两个不同的实数根 x_1,x_2，证明：$f'\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)<0$.

【解析】（1）因为 $f(x)=-ax^2+3+2\ln x$，可得函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，

所以 $f'(x)=-2ax+\frac{2}{x}=\frac{2-2ax^2}{x}$，

当 $a\le 0$ 时，$f'(x)>0$ 在 $(0,+\infty)$ 恒成立，故函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增；

当 $a>0$ 时，若 $x\in\left(0,\frac{\sqrt{a}}{a}\right]$，则 $f'(x)\ge 0$，故函数 $f(x)$ 在 $\left(0,\frac{\sqrt{a}}{a}\right]$ 上单调递增；

若 $x\in\left[\frac{\sqrt{a}}{a},+\infty\right)$，则 $f'(x)\le 0$，故函数 $f(x)$ 在 $\left[\frac{\sqrt{a}}{a},+\infty\right)$ 上单调递减；

综上所述，当 $a\le 0$ 时，函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增；

当$a>0$时，函数$f(x)$在$\left(0,\dfrac{\sqrt{a}}{a}\right]$上单调递增，在$\left[\dfrac{\sqrt{a}}{a},+\infty\right)$上单调递减；

（2）因为$f(x)$的极大值为2，所以由（1）可得$a>0$，

所以$f\left(\dfrac{\sqrt{a}}{a}\right)=-a\left(\dfrac{\sqrt{a}}{a}\right)^2+3+2\ln\dfrac{\sqrt{a}}{a}=2$，解得$a=1$

此时$f'(x)=-2x+\dfrac{2}{x}=\dfrac{2-2x^2}{x}=\dfrac{2(1-x)(1+x)}{x}$，

当$0<x\le 1$时，$f'(x)\ge 0$，函数$f(x)$在$(0,1]$上单调递增；

当$x\ge 1$时，$f'(x)\le 0$，函数$f(x)$在$[1,+\infty)$上单调递减；

所以函数$f(x)$在$x=1$处取得极大值，

即当$a=1$时，函数$f(x)$有极大值为2；

（3）证明：由（2）可知，当$a=1$时，函数$f(x)$在$(0,1]$上单调递增；在$[1,+\infty)$上单调递减，

方程$f(x)=m$存在两个不同的实数根x_1,x_2，不妨令$0<x_1<1<x_2$，

当$0<x<1$时，令$g(x)=f(x)-f(2-x)$，

则$g(x)=2\ln x-2\ln(2-x)-4x+4$，

可得$g'(x)=\dfrac{2}{x}-\dfrac{2}{2-x}-4=\dfrac{4(x-1)^2}{x(2-x)}>0$

所以函数$g(x)$在$(0,1]$上单调递增，$\forall x\in(0,1),g(x)<g(1)=0$，

又$0<x<1$，所以可得$x<2-x$，可得$f(x)<f(2-x)$；

而$0<x_1<1$，则$m=f(x_2)=f(x_1)<f(2-x_1)$，

又$1<2-x_1<2$，$x_2>1$，且函数$f(x)$在$[1,+\infty)$上单调递减；

所以$2-x_1<x_2$，即$\dfrac{x_1+x_2}{2}>1$，

故$f'\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)<0$

考点五：极最值问题

规律总结

利用导数求函数的极最值问题．解题方法是利用导函数与单调性关系确定单调区间，从而求得极最值．只是对含有参数的极最值问题，需要对导函数进行二次讨论，对导函数或其中部分函数再一次求导，确定单调性，零点的存在性及唯一性等，由于零点的存在性与参数有关，因此对函数的极最值又需引入新函数，对新函数再用导数进行求值、证明等操作．

题型特训

例 13．（2023·江苏·统考一模）已知实数 $a>0$，函数 $f\left(x\right)=x\ln a-a\ln x+\left(x-\mathrm{e}\right)^2$，e是自然对数的底数.

(1)当 $a=\mathrm{e}$ 时，求函数 $f\left(x\right)$ 的单调区间；

(2)求证：$f\left(x\right)$ 存在极值点 x_0，并求 x_0 的最小值.

【解析】（1）当 $a=\mathrm{e}$ 时，$f(x)=x-\mathrm{e}\ln x+(x-\mathrm{e})^2$，

则 $f'(x)=1-\dfrac{\mathrm{e}}{x}+2(x-\mathrm{e})=\dfrac{2x^2+(1-2\mathrm{e})x-\mathrm{e}}{x}=\dfrac{(2x+1)(x-\mathrm{e})}{x},(x>0)$

令 $f'(x)>0$，得 $x>\mathrm{e}$；令 $f'(x)<0$，得 $x<\mathrm{e}$；

所以，函数 $y=g(x)$ 的单调增区间为 $(\mathrm{e},+\infty)$，单调减区间为 $(0,\mathrm{e})$.

（2）$f'(x)=\ln a-\dfrac{a}{x}+2(x-\mathrm{e})=\dfrac{2x^2+(\ln a-2\mathrm{e})x-a}{x}$

令 $t(x)=2x^2+(\ln a-2\mathrm{e})x-a=0$，因为 $\Delta=(\ln a-2\mathrm{e})^2+8a>0$，

所以方程 $2x^2+(\ln a-2\mathrm{e})x-a=0$，有两个不相等的实根 $x_1,x_2\left(x_1<x_2\right)$，

又因为 $x_1x_2=-\dfrac{a}{2}<0$，所以 $x_1<0<x_2$，令 $x_0=x_2$，列表如下:

x	$\left(0,x_0\right)$	x_0	$\left(x_0,+\infty\right)$
$f'\left(x\right)$	-	0	+
$f\left(x\right)$	减	极小值	增

所以 $f(x)$ 存在极值点 x_0.所以存在 x_0 使得 $2{x_0}^2+(\ln a-2\mathrm{e})x_0-a=0$ 成立，

所以存在 x_0 使得 $2{x_0}^2-2\mathrm{e}x x_0=a-x_0\ln a$，

所以存在 x_0 使得 $a-x_0\ln a=2{x_0}^2-2\mathrm{e}x x_0$ 对任意的 $a>0$ 有解，

因此需要讨论等式左边的关于 a 的函数，记 $u(t)=t-x_0\ln t$，所以 $u'(t)=1-\dfrac{x_0}{t}$，

当 $0<t<x_0$ 时，$u'(t)<0,u(t)$ 单调递减；当 $t>x_0$ 时，$u'(t)>0,u(t)$ 单调递增.

所以当 $t=x_0$ 时，$u(t)=t-x_0\ln t$ 的最小值为 $u\left(x_0\right)=x_0-x_0\ln x_0$.

所以需要 $2x_0^2-2\mathrm{e}x_0=a-x_0\ln a\geq x_0-x_0\ln x_0$，即需要 $2{x_0}^2-(2\mathrm{e}+1)x_0+x_0\ln x_0\geq 0$，

即需要 $2x_0-(2\mathrm{e}+1)+\ln x_0\geq 0$，即需要 $2x_0+\ln x_0-(2\mathrm{e}+1)\geq 0$

因为 $v(t)=2t+\ln t-(2\mathrm{e}+1)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，且 $v\left(x_0\right)\geq v(\mathrm{e})=0$，

所以需要 $x_0\geq\mathrm{e}$，

故 x_0 的最小值是 e.

例 14.（2023·全国·模拟预测）已知 $a>1$，函数 $f(x)=x\ln x-\frac{1}{2}x^2+(a-1)x$，记 x_0 为函数 $f(x)$ 的极值点.

(1)若 x_0 是极小值点，证明：$-\frac{1}{2}<f(x_0)<0$；

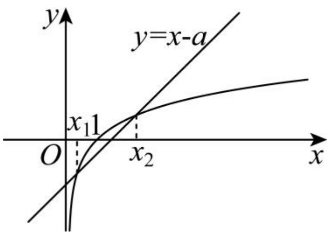
(2)若 x_0 是极大值点，证明：$\sqrt{2a-1}<x_0<2(2a-1)$.

【解析】（1）$f'(x)=\ln x-x+a$.

当函数 $y=\ln x$ 与 $y=x-a$ 的图象相切时，$\frac{1}{x}=1$，得 $x=1$，

即切点为 $(1,0)$，代入 $y=x-a$ 得 $a=1$

由于 $a>1$，所以函数 $y=\ln x$ 与 $y=x-a$ 的图象有两个交点，



设其横坐标分别为 x_1,x_2，不妨设 $x_1<1$，$x_2>1$，

则当 $x\in(0,x_1)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减；

当 $x\in(x_1,x_2)$ 时，$f¢(x)>0$，$f(x)$ 单调递增；

当 $x\in(x_2,+\infty)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减.

故 x_1 是 $f(x)$ 的极小值点，x_2 是 $f(x)$ 的极大值点.

若 x_0 是极小值点，则 $x_0\in(0,1)$，

由 $f'(x_0)=\ln x_0-x_0+a=0$，得 $\ln x_0=x_0-a$，

所以 $f(x_0)=x_0\ln x_0-\frac{1}{2}x_0^2+(a-1)x_0=x_0(x_0-a)-\frac{1}{2}x_0^2+(a-1)x_0=\frac{1}{2}x_0^2-x_0$，其在 $(0,1)$ 上单调递减，

又当 $x=0$ 时，$f(0)=0$，当 $x=1$ 时，$f(1)=-\frac{1}{2}$，

所以 $-\frac{1}{2}<f(x_0)<0$.

（2）若 x_0 是极大值点，则 $x_0>1$.

①先证 $\sqrt{2a-1}<x_0$.

记 $h(x)=\ln x-x+a$，$x>1$，则 $h(x_0)=0$，

当 $x>1$ 时，$h'(x)=\frac{1}{x}-1<0$，$h(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递减.

方法一：由于 $h(a)=\ln a-a+a=\ln a>0$，所以 $a<x_0$.