

一、旋转

1. 操作与证明：如图 1，把一个含 45° 角的直角三角板 ECF 和一个正方形 ABCD 摆放在一起，使三角板的直角顶点和正方形的顶点 C 重合，点 E、F 分别在正方形的边 CB、CD 上，连接 AF. 取 AF 中点 M，EF 的中点 N，连接 MD、MN.

(1) 连接 AE，求证： $\triangle AEF$ 是等腰三角形；

猜想与发现：

(2) 在 (1) 的条件下，请判断 MD、MN 的数量关系和位置关系，得出结论.

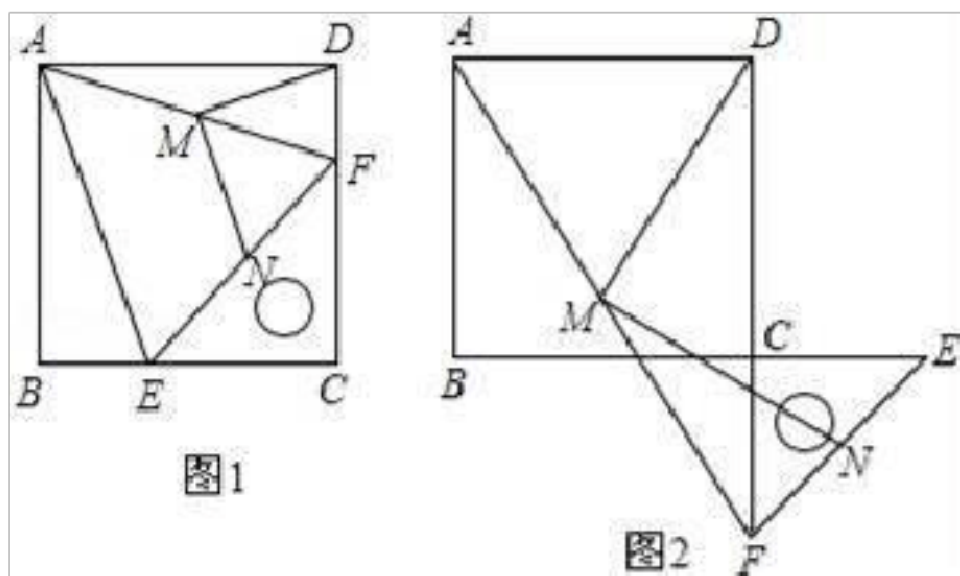
结论 1：DM、MN 的数量关系是_；

结论 2：DM、MN 的位置关系是_；

拓展与探究：

(3) 如图 2，将图 1 中的直角三角板 ECF 绕点 C 顺时针旋转 180° ，其他条件不变，则

(2) 中的两个结论还成立吗？若成立，请加以证明；若不成立，请说明理由.



【答案】(1) 证明参见解析；(2) 相等，垂直；(3) 成立，理由参见解析.

【解析】

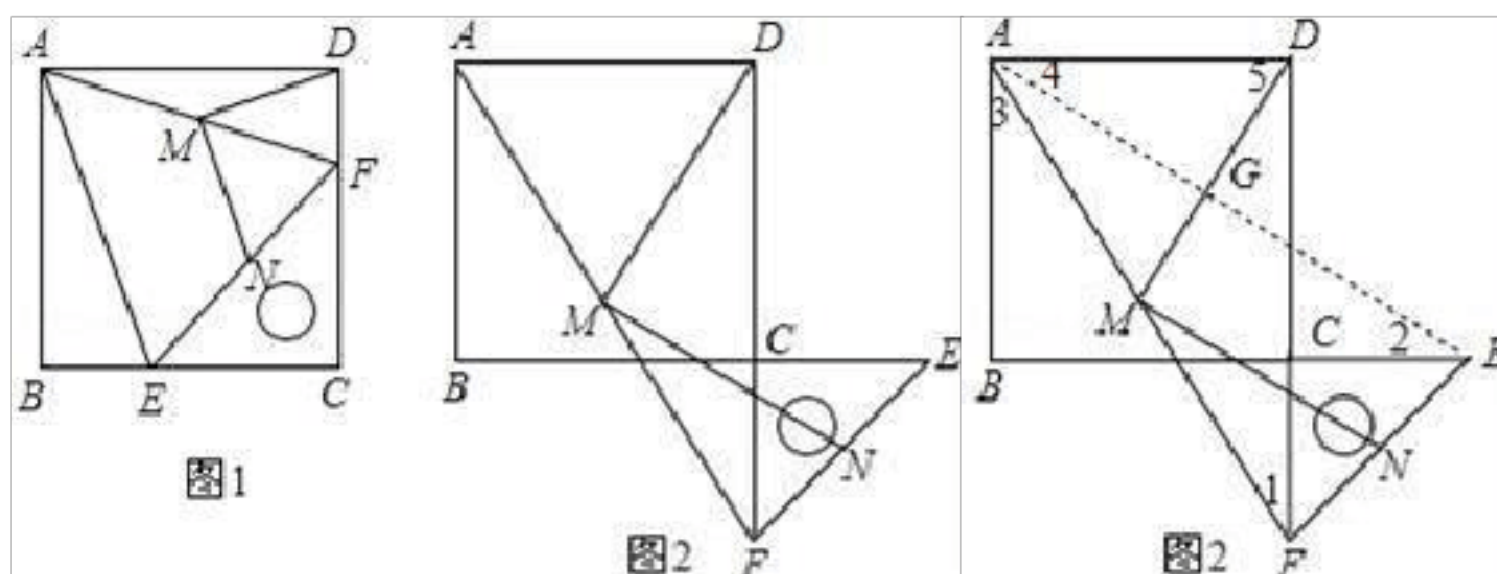
试题分析：(1) 根据正方形的性质以及等腰直角三角形的知识证明出 $CE=CF$ ，继而证明出 $\triangle ABE \cong \triangle ADF$ ，得到 $AE=AF$ ，从而证明出 $\triangle AEF$ 是等腰三角形；(2) DM、MN 的数量关系是相等，利用直角三角形斜边中线等于斜边一半和三角形中位线定理即可得出结论. 位置关系是垂直，利用三角形外角性质和等腰三角形两个底角相等性质，及全等三角形对应角相等即可得出结论；(3) 成立，连接 AE，交 MD 于点 G，标记出各个角，首先证明出

$MN \parallel AE$ ， $MN = \frac{1}{2}AE$ ，利用三角形全等证出 $AE=AF$ ，而 $DM = \frac{1}{2}AF$ ，从而得到 DM、MN 数量相等的结论，再利用三角形外角性质和三角形全等，等腰三角形性质以及角角之间的数量关系得到 $\angle DMN = \angle DGE = 90^\circ$. 从而得到 DM、MN 的位置关系是垂直.

试题解析：(1) $\because$ 四边形 ABCD 是正方形， $\therefore AB=AD=BC=CD$ ， $\angle B=\angle ADF=90^\circ$ ， $\because \triangle CEF$ 是等腰直角三角形， $\angle C=90^\circ$ ， $\therefore CE=CF$ ， $\therefore BC-CE=CD-CF$ ，即 $BE=DF$ ， $\therefore \triangle ABE \cong \triangle ADF$ ， $\therefore AE=AF$ ， $\therefore \triangle AEF$ 是等腰三角形；(2) DM、MN 的数量关系是相等，DM、MN 的位置关系是垂直； $\because$ 在 $Rt\triangle ADF$ 中 DM 是斜边 AF 的中线， $\therefore AF=2DM$ ， $\because MN$ 是 $\triangle AEF$ 的中位线， $\therefore AE=2MN$ ， $\because AE=AF$ ， $\therefore DM=MN$ ； $\because \angle DMF = \angle DAF + \angle ADM$ ， $AM=MD$ ， $\therefore \angle FMN = \angle FAE$ ， $\angle DAF = \angle BAE$ ， $\therefore \angle ADM = \angle DAF = \angle BAE$ ，

$\therefore \angle DMN = \angle FMN + \angle DMF = \angle DAF + \angle BAE + \angle FAE = \angle BAD = 90^\circ$, $\therefore DM \perp MN$; (3) (2) 中的两个结论还成立, 连接 AE, 交 MD 于点 G, $\because$ 点 M 为 AF 的中点, 点 N 为 EF 的中点,

$\therefore MN \parallel AE$, $MN = \frac{1}{2}AE$, 由已知得, $AB = AD = BC = CD$, $\angle B = \angle ADF$, $CE = CF$, 又 $\because BC + CE = CD + CF$, 即 $BE = DF$, $\therefore \triangle ABE \cong \triangle ADF$, $\therefore AE = AF$, 在 $Rt\triangle ADF$ 中, $\because$ 点 M 为 AF 的中点, $\therefore DM = \frac{1}{2}AF$, $\therefore DM = MN$, $\because \triangle ABE \cong \triangle ADF$, $\therefore \angle 1 = \angle 2$, $\because AB \parallel DF$, $\therefore \angle 1 = \angle 3$, 同理可证: $\angle 2 = \angle 4$, $\therefore \angle 3 = \angle 4$, $\because DM = AM$, $\therefore \angle MAD = \angle 5$, $\therefore \angle DGE = \angle 5 + \angle 4 = \angle MAD + \angle 3 = 90^\circ$, $\because MN \parallel AE$, $\therefore \angle DMN = \angle DGE = 90^\circ$, $\therefore DM \perp MN$. 所以 (2) 中的两个结论还成立.



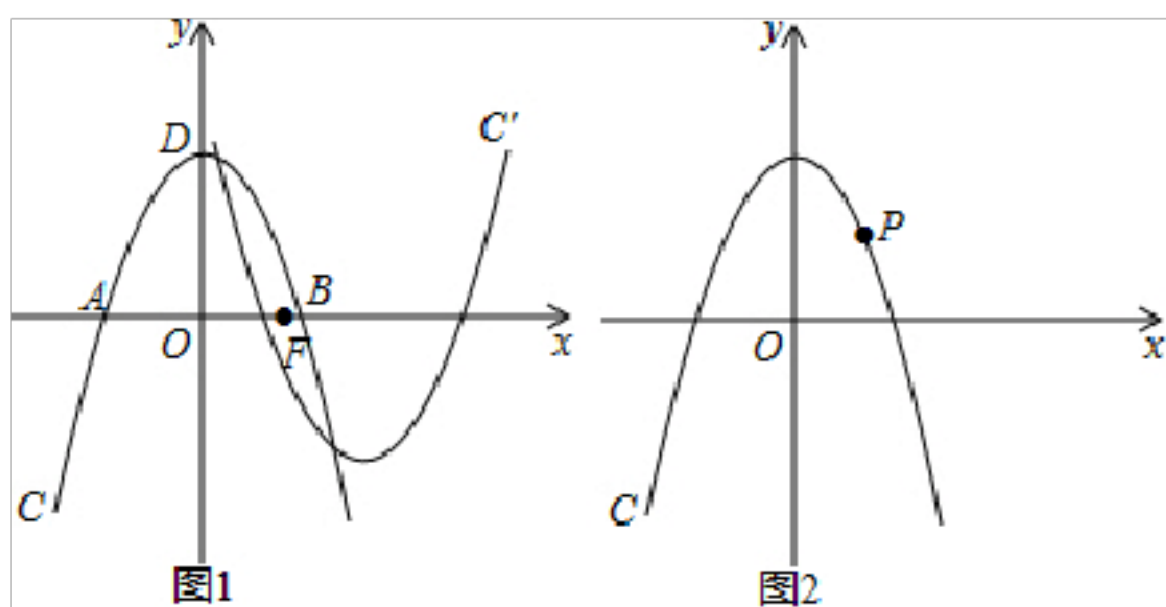
考点: 1.正方形的性质; 2.全等三角形的判定与性质; 3.三角形中位线定理; 4.旋转的性质.

2. 如图 1, 在平面直角坐标系 xOy 中, 抛物线 $C: y = ax^2 + bx + c$ 与 x 轴相交于 A, B 两点, 顶点为 D (0, 4), $AB = 4\sqrt{2}$, 设点 F (m, 0) 是 x 轴的正半轴上一点, 将抛物线 C 绕点 F 旋转 180° , 得到新的抛物线 C' .

(1) 求抛物线 C 的函数表达式;

(2) 若抛物线 C' 与抛物线 C 在 y 轴的右侧有两个不同的公共点, 求 m 的取值范围.

(3) 如图 2, P 是第一象限内抛物线 C 上一点, 它到两坐标轴的距离相等, 点 P 在抛物线 C' 上的对应点 P' , 设 M 是 C 上的动点, N 是 C' 上的动点, 试探究四边形 PMP'N 能否成为正方形? 若能, 求出 m 的值; 若不能, 请说明理由.



【答案】 (1) $y = \frac{1}{2}x^2 - 4$; (2) $2 < m < 2\sqrt{2}$; (3) $m=6$ 或 $m=\sqrt{17}-3$.

【解析】

试题分析: (1) 由题意抛物线的顶点 $C(0, 4)$, $A(2\sqrt{2}, 0)$, 设抛物线的解析式为

$y = ax^2 - 4$, 把 $A(2\sqrt{2}, 0)$ 代入可得 $a = \frac{1}{2}$, 由此即可解决问题;

(2) 由题意抛物线 C' 的顶点坐标为 $(2m, -4)$, 设抛物线 C' 的解析式为

$y = \frac{1}{2}(x - m)^2 - 4$, 由 $y = \frac{1}{2}x^2 - 4$, 消去 y 得到 $x^2 - 2mx - 2m^2 - 8 = 0$, 由题

$$\begin{cases} 2m > 0 \\ 2m^2 + 8 > 0 \end{cases}$$

意, 抛物线 C' 与抛物线 C 在 y 轴的右侧有两个不同的公共点, 则有 $\begin{cases} 2m > 0 \\ 2m^2 + 8 > 0 \end{cases}$,

解不等式组即可解决问题;

(3) 情形 1, 四边形 $PMP'N$ 能成为正方形. 作 $PE \perp x$ 轴于 E , $MH \perp x$ 轴于 H . 由题意易知 $P(2, 2)$, 当 $\triangle PFM$ 是等腰直角三角形时, 四边形 $PMP'N$ 是正方形, 推出 $PF=FM$, $\angle PFM=90^\circ$, 易证 $\triangle PFE \cong \triangle FMH$, 可得 $PE=FH=2$, $EF=HM=2-m$, 可得 $M(m+2, m-2)$, 理由待定系数法即可解决问题; 情形 2, 如图, 四边形 $PMP'N$ 是正方形, 同法可得 $M(m-2, 2-m)$, 利用待定系数法即可解决问题.

试题解析: (1) 由题意抛物线的顶点 $C(0, 4)$, $A(2\sqrt{2}, 0)$, 设抛物线的解析式为

$y = ax^2 - 4$, 把 $A(2\sqrt{2}, 0)$ 代入可得 $a = \frac{1}{2}$, $\therefore$ 抛物线 C 的函数表达式为

$$y = \frac{1}{2}x^2 - 4.$$

(2) 由题意抛物线 C' 的顶点坐标为 $(2m, -4)$, 设抛物线 C' 的解析式为

$y = \frac{1}{2}(x - m)^2 - 4$, 由 $y = \frac{1}{2}x^2 - 4$, 消去 y 得到 $x^2 - 2mx - 2m^2 - 8 = 0$, 由题意,

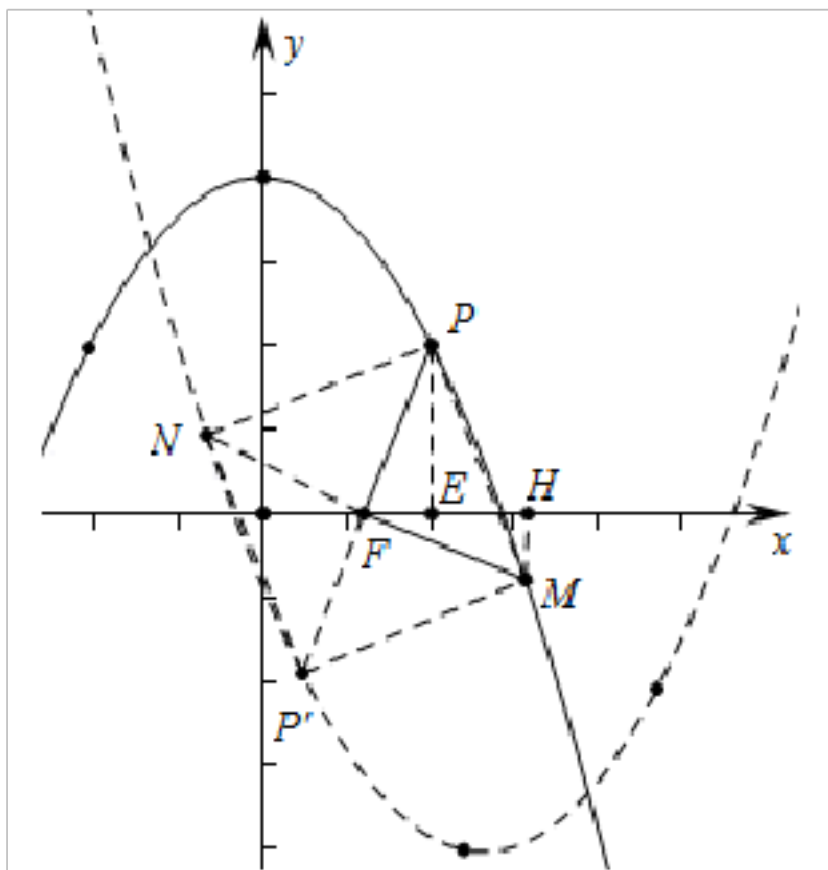
$$\begin{cases} 2m > 0 \\ 2m^2 + 8 > 0 \end{cases}$$

抛物线 C' 与抛物线 C 在 y 轴的右侧有两个不同的公共点, 则有 $\begin{cases} 2m > 0 \\ 2m^2 + 8 > 0 \end{cases}$, 解得

$2 < m < 2\sqrt{2}$, $\therefore$ 满足条件的 m 的取值范围为 $2 < m < 2\sqrt{2}$.

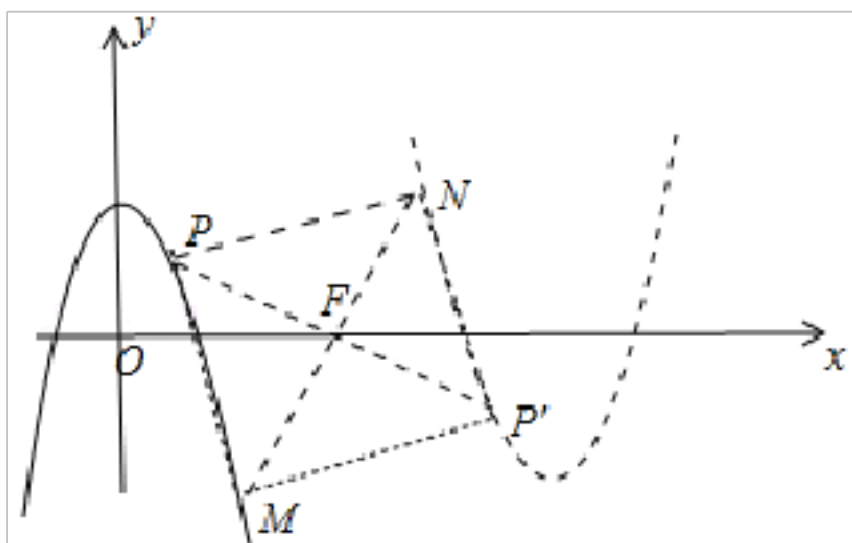
(3) 结论: 四边形 $PMP'N$ 能成为正方形.

理由: 1 情形 1, 如图, 作 $PE \perp x$ 轴于 E , $MH \perp x$ 轴于 H .



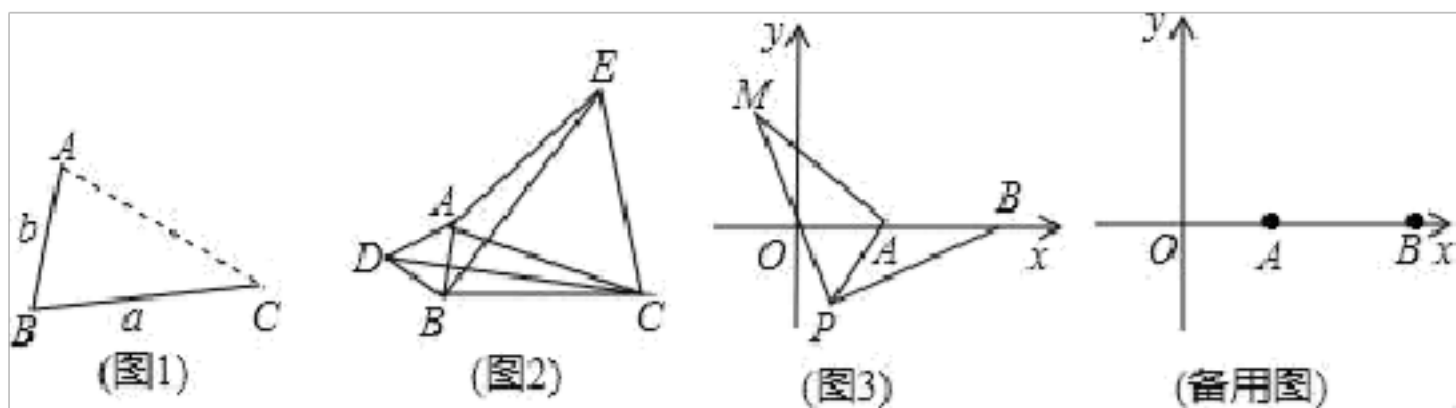
由题意易知 $P(2, 2)$ ，当 $\triangle PFM$ 是等腰直角三角形时，四边形 $PMP'N$ 是正方形，
 $\therefore PF=FM$ ， $\angle PFM=90^\circ$ ，易证 $\triangle PFE \cong \triangle FMH$ ，可得 $PE=FH=2$ ， $EF=HM=2-m$ ， $\therefore M(m+2, m-2)$ ， $\because$ 点 M 在 $y = \frac{1}{2}x^2 - 4$ 上， $\therefore m+2 = \frac{1}{2}(m-2)^2 - 4$ ，解得 $m = \sqrt{17} - 3$ 或 $-\sqrt{17} - 3$ （舍弃）， $\therefore m = \sqrt{17} - 3$ 时，四边形 $PMP'N$ 是正方形。

情形 2，如图，四边形 $PMP'N$ 是正方形，同法可得 $M(m-2, 2-m)$ ，把 $M(m-2, 2-m)$ 代入 $y = \frac{1}{2}x^2 - 4$ 中， $2-m = \frac{1}{2}(m-2)^2 - 4$ ，解得 $m=6$ 或 0 （舍弃）， $\therefore m=6$ 时，四边形 $PMP'N$ 是正方形。



综上所述： $m=6$ 或 $m = \sqrt{17} - 3$ 时，四边形 $PMP'N$ 是正方形。

3. (1)发现：如图 1，点 A 为线段 BC 外一动点，且 $BC=a$ ， $AB=b$ 。填空：
 当点 A 位于_____时，线段 AC 的长取得最大值，且最大值为_____ (用含 a, b 的式子表示)
 (2)应用：点 A 为线段 BC 外一动点，且 $BC=4$ ， $AB=1$ ，如图 2 所示，分别以 AB, AC 为边，作等边三角形 ABD 和等边三角形 ACE ，连接 CD, BE 。
 ① 请找出图中与 BE 相等的线段，并说明理由；② 直接写出线段 BE 长的最大值。
 (3)拓展：如图 3，在平面直角坐标系中，点 A 的坐标为 $(2, 0)$ ，点 B 的坐标为 $(6, 0)$ ，点 P 为线段 AB 外一动点，且 $PA=2$ ， $PM=PB$ ， $\angle BPM=90^\circ$ ，请直接写出线段 AM 长的最大值及此时点 P 的坐标。



【答案】(1)CB 的延长线上， $a+b$ ；(2)① $CD=BE$ ，理由见解析；② BE 长的最大值为 5；(3) 满足条件的点 P 坐标 $(2-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ 或 $(2-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ ，AM 的最大值为 $2\sqrt{2}+4$ 。

【解析】

【分析】

(1) 根据点 A 位于 CB 的延长线上时，线段 AC 的长取得最大值，即可得到结论；(2) ① 根据已知条件易证 $\triangle CAD \cong \triangle EAB$ ，根据全等三角形的性质即可得 $CD=BE$ ；② 由于线段 BE 长的最大值=线段 CD 的最大值，根据(1)中的结论即可得到结果；(3) 连接 BM，将 $\triangle APM$ 绕着点 P 顺时针旋转 90° 得到 $\triangle PBN$ ，连接 AN，得到 $\triangle APN$ 是等腰直角三角形，根据全等三角形的性质得到 $PN=PA=2$ ， $BN=AM$ ，根据当 N 在线段 BA 的延长线时，线段 BN 取得最大值，即可得到最大值为 $2\sqrt{2}+4$ ；如图 2，过 P 作 $PE \perp x$ 轴于 E，根据等腰直角三角形的性质即可求得点 P 的坐标。如图 3 中，根据对称性可知当点 P 在第四象限时也满足条件，由此求得符合条件的点 P 另一个的坐标。

【详解】

(1) $\because$ 点 A 为线段 BC 外一动点，且 $BC=a$ ， $AB=b$ ，
 $\therefore$ 当点 A 位于 CB 的延长线上时，线段 AC 的长取得最大值，且最大值为 $BC+AB=a+b$ ，
 故答案为 CB 的延长线上， $a+b$ ；

(2) ① $CD=BE$ ，

理由： $\because \triangle ABD$ 与 $\triangle ACE$ 是等边三角形，
 $\therefore AD=AB$ ， $AC=AE$ ， $\angle BAD=\angle CAE=60^\circ$ ，
 $\therefore \angle BAD+\angle BAC=\angle CAE+\angle BAC$ ，
 即 $\angle CAD=\angle EAB$ ，

在 $\triangle CAD$ 与 $\triangle EAB$ 中，

$$\begin{array}{ccc} AD & AB \\ \angle CAD & \angle EAB \\ AC & AE \end{array}$$

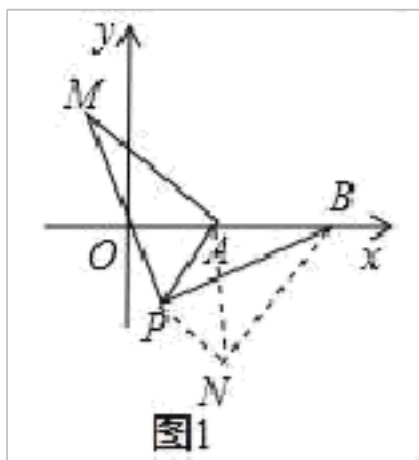
$\therefore \triangle CAD \cong \triangle EAB$ (SAS)，

$\therefore CD=BE$ ；

② $\because$ 线段 BE 长的最大值=线段 CD 的最大值，

由(1)知，当线段 CD 的长取得最大值时，点 D 在 CB 的延长线上，
 $\therefore$ 最大值为 $BD+BC=AB+BC=5$ ；

(3) 如图 1，



∵将 $\triangle APM$ 绕着点 P 顺时针旋转 90° 得到 $\triangle PBN$ ，连接 AN ，

则 $\triangle APN$ 是等腰直角三角形，

∴ $PN = PA = 2$ ， $BN = AM$ ，

∵ A 的坐标为 $(2, 0)$ ，点 B 的坐标为 $(6, 0)$ ，

∴ $OA = 2$ ， $OB = 6$ ，

∴ $AB = 4$ ，

∴线段 AM 长的最大值 = 线段 BN 长的最大值，

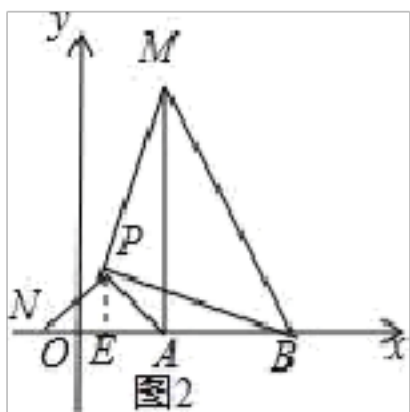
∴当 N 在线段 BA 的延长线时，线段 BN 取得最大值，

最大值 = $AB + AN$ ，

∵ $AN = \sqrt{2} AP = 2\sqrt{2}$ ，

∴最大值为 $2\sqrt{2} + 4$ ；

如图 2，



过 P 作 $PE \perp x$ 轴于 E ，

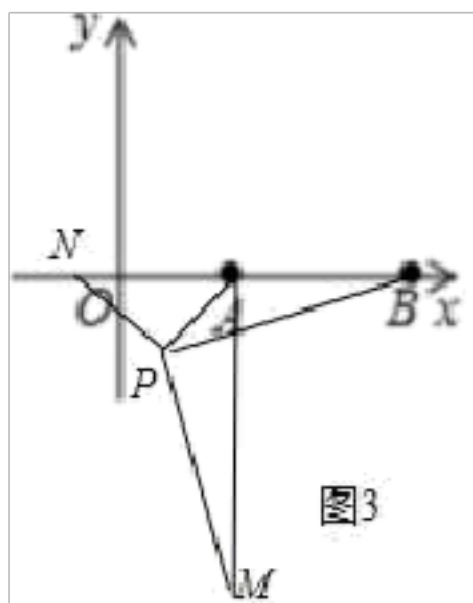
∵ $\triangle APN$ 是等腰直角三角形，

∴ $PE = AE = \sqrt{2}$ ，

∴ $OE = BO - AB - AE = 6 - 4 - \sqrt{2} = 2 - \sqrt{2}$ ，

∴ $P(2 - \sqrt{2}, \sqrt{2})$.

如图 3 中，



根据对称性可知当点 P 在第四象限时, $P(2-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ 时, 也满足条件.

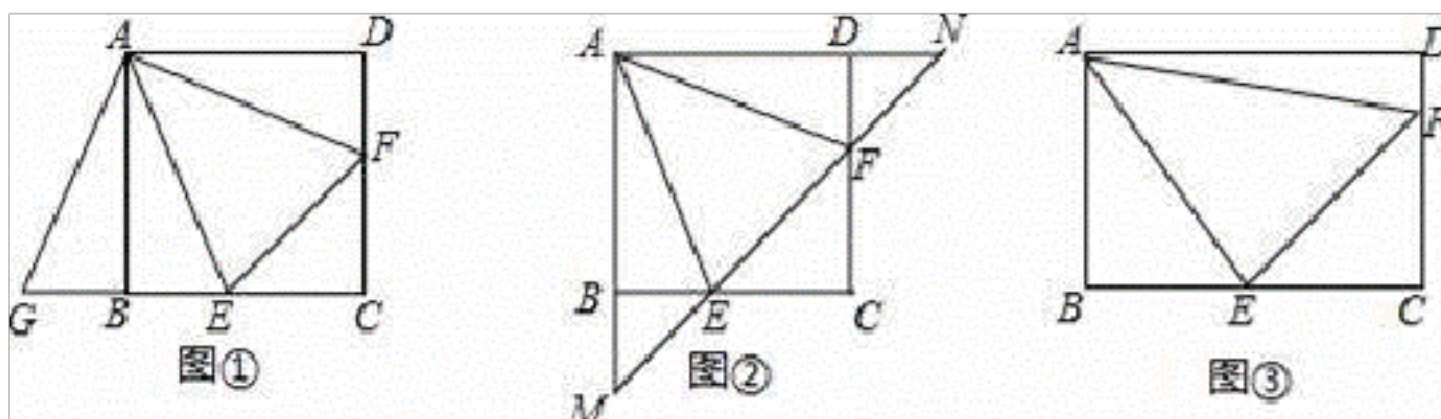
综上所述, 满足条件的点 P 坐标 $(2-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ 或 $(2-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$, AM 的最大值为 $2\sqrt{2}+4$.

【点睛】

本题综合考查了全等三角形的判定和性质, 等腰直角三角形的性质, 最大值问题, 旋转的性质. 正确的作出辅助线构造全等三角形是解题的关键.

4. 在正方形 ABCD 中, 点 E, F 分别在边 BC, CD 上, 且 $\angle EAF = \angle CEF = 45^\circ$.

- (1) 将 $\triangle ADF$ 绕着点 A 顺时针旋转 90° , 得到 $\triangle ABG$ (如图①), 求证: $\triangle AEG \cong \triangle AEF$;
- (2) 若直线 EF 与 AB, AD 的延长线分别交于点 M, N (如图②), 求证: $EF^2 = ME^2 + NF^2$;
- (3) 将正方形改为长与宽不相等的矩形, 若其余条件不变 (如图③), 请你直接写出线段 EF, BE, DF 之间的数量关系.



【答案】 (1) 证明见解析; (2) 证明见解析; (3) $EF^2 = 2BE^2 + 2DF^2$.

【解析】

试题分析: (1) 根据旋转的性质可知 $AF = AG$, $\angle EAF = \angle GAE = 45^\circ$, 故可证 $\triangle AEG \cong \triangle AEF$;

(2) 将 $\triangle ADF$ 绕着点 A 顺时针旋转 90° , 得到 $\triangle ABG$, 连结 GM. 由 (1) 知 $\triangle AEG \cong \triangle AEF$, 则 $EG = EF$. 再由 $\triangle BME$ 、 $\triangle DNF$ 、 $\triangle CEF$ 均为等腰直角三角形, 得出 $CE = CF$, $BE = BM$, $NF = \sqrt{2}DF$, 然后证明 $\angle GME = 90^\circ$, $MG = NF$, 利用勾股定理得出 $EG^2 = ME^2 + MG^2$, 等量代换即可证明 $EF^2 = ME^2 + NF^2$;

(3) 将 $\triangle ADF$ 绕着点 A 顺时针旋转 90° , 得到 $\triangle ABG$, 根据旋转的性质可以得到 $\triangle ADF \cong \triangle ABG$, 则 $DF = BG$, 再证明 $\triangle AEG \cong \triangle AEF$, 得出 $EG = EF$, 由 $EG = BG + BE$, 等量代换得到 $EF = BE + DF$.

试题解析: (1) $\because \triangle ADF$ 绕着点 A 顺时针旋转 90° , 得到 $\triangle ABG$,
 $\therefore AF = AG$, $\angle FAG = 90^\circ$,

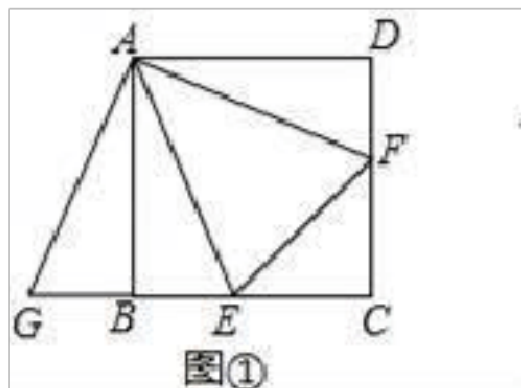
$$\because \angle EAF = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle GAE = 45^\circ,$$

在 $\triangle AGE$ 与 $\triangle AFE$ 中,

$$\begin{cases} AG = AF \\ \angle GAE = \angle FAE = 45^\circ \\ AE = AE \end{cases},$$

$$\therefore \triangle AGE \cong \triangle AFE \text{ (SAS)};$$



(2) 设正方形 ABCD 的边长为 a.

将 $\triangle ADF$ 绕着点 A 顺时针旋转 90° , 得到 $\triangle ABG$, 连结 GM.

则 $\triangle ADF \cong \triangle ABG$, $DF = BG$.

由 (1) 知 $\triangle AEG \cong \triangle AEF$,

$$\therefore EG = EF.$$

$$\because \angle CEF = 45^\circ,$$

$\therefore \triangle BME$ 、 $\triangle DNF$ 、 $\triangle CEF$ 均为等腰直角三角形,

$$\therefore CE = CF, BE = BM, NF = \sqrt{2}DF,$$

$$\therefore a - BE = a - DF,$$

$$\therefore BE = DF,$$

$$\therefore BE = BM = DF = BG,$$

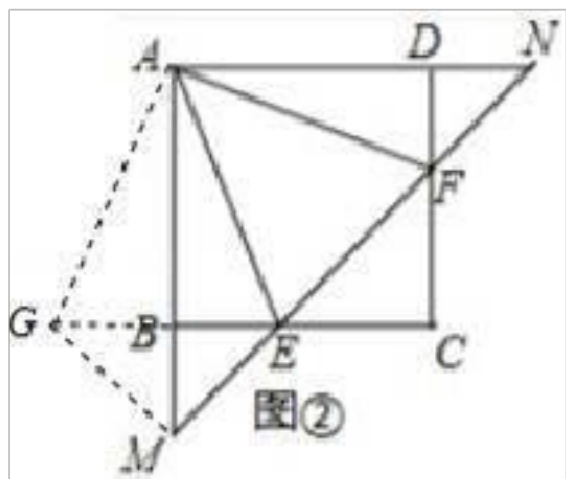
$$\therefore \angle BMG = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle GME = 45^\circ + 45^\circ = 90^\circ,$$

$$\therefore EG^2 = ME^2 + MG^2,$$

$$\because EG = EF, MG = \sqrt{2}BM = \sqrt{2}DF = NF,$$

$$\therefore EF^2 = ME^2 + NF^2;$$



(3) $EF^2 = 2BE^2 + 2DF^2$.

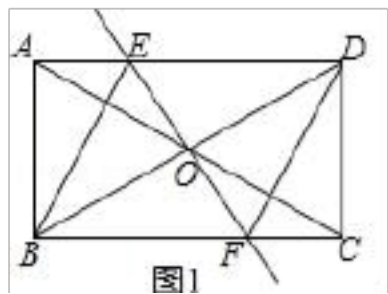
如图所示, 延长 EF 交 AB 延长线于 M 点, 交 AD 延长线于 N 点,

将 $\triangle ADF$ 绕着点 A 顺时针旋转 90° , 得到 $\triangle AGH$, 连结 HM, HE.

由 (1) 知 $\triangle AEH \cong \triangle AEF$,

【详解】

(1) ① 证明：如图 1 中，

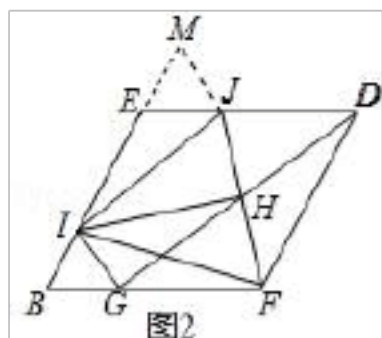


$\because$ 四边形 ABCD 是矩形，
 $\therefore AD \parallel BC$ ， $OB = OD$ ，
 $\therefore \angle EDO = \angle FBO$ ，
 在 $\triangle DOE$ 和 $\triangle BOF$ 中，
 $\begin{aligned} \angle EDO &= \angle FBO \\ OD &= OB \\ \angle EOD &= \angle BOF \end{aligned}$
 $\therefore \triangle DOE \cong \triangle BOF$ ，
 $\therefore EO = OF$ ， $\because OB = OD$ ，
 $\therefore$ 四边形 EBF D 是平行四边形，
 $\because EF \perp BD$ ， $OB = OD$ ，
 $\therefore EB = ED$ ，
 $\therefore$ 四边形 EBF D 是菱形.

② $\because BE$ 平分 $\angle ABD$ ，
 $\therefore \angle ABE = \angle EBD$ ，
 $\because EB = ED$ ，
 $\therefore \angle EBD = \angle EDB$ ，
 $\therefore \angle ABD = 2\angle ADB$ ，
 $\because \angle ABD + \angle ADB = 90^\circ$ ，
 $\therefore \angle ADB = 30^\circ$ ， $\angle ABD = 60^\circ$ ，
 $\therefore \angle ABE = \angle EBO = \angle OBF = 30^\circ$ ，
 $\therefore \angle EBF = 60^\circ$.

(2) 结论： $IH = \sqrt{3} FH$.

理由：如图 2 中，延长 BE 到 M，使得 $EM = EJ$ ，连接 MJ.



$\because$ 四边形 EBF D 是菱形， $\angle B = 60^\circ$ ，
 $\therefore EB = BF = ED$ ， $DE \parallel BF$ ，
 $\therefore \angle JDH = \angle FGH$ ，

在 $\triangle DHJ$ 和 $\triangle GHF$ 中，

$$DHG = GHF$$

$$DH = GH,$$

$$\angle JDH = \angle FGH$$

$$\therefore \triangle DHJ \cong \triangle GHF,$$

$$\therefore DJ = FG, JH = HF,$$

$$\therefore EJ = BG = EM = BI,$$

$$\therefore BE = IM = BF,$$

$$\therefore \angle MEJ = \angle B = 60^\circ,$$

$$\therefore \triangle MEJ \text{ 是等边三角形},$$

$$\therefore MJ = EM = NI, \angle M = \angle B = 60^\circ$$

在 $\triangle BIF$ 和 $\triangle MJI$ 中，

$$BI = MJ$$

$$\angle B = \angle M,$$

$$BF = IM$$

$$\therefore \triangle BIF \cong \triangle MJI,$$

$$\therefore \angle IFB = \angle IJM, \therefore HJ = HF,$$

$$\therefore IH \perp JF,$$

$$\therefore \angle BFH + \angle BIF = 120^\circ,$$

$$\therefore \angle MIJ + \angle BIF = 120^\circ,$$

$$\therefore \angle JIF = 60^\circ,$$

$$\therefore \triangle JIF \text{ 是等边三角形},$$

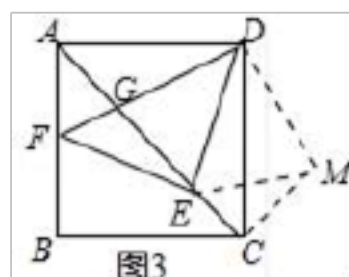
在 $\text{Rt}\triangle IHF$ 中， $\therefore \angle IHF = 90^\circ, \angle IFH = 60^\circ,$

$$\therefore \angle FIH = 30^\circ,$$

$$\therefore IH = \sqrt{3} FH.$$

(3) 结论： $EG^2 = AG^2 + CE^2$.

理由：如图3中，将 $\triangle ADG$ 绕点D逆时针旋转 90° 得到 $\triangle DCM$ ，



$$\therefore \angle FAD + \angle DEF = 90^\circ,$$

$$\therefore AFED \text{ 四点共圆},$$

$$\therefore \angle EDF = \angle DAE = 45^\circ, \angle ADC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ADF + \angle EDC = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle ADF = \angle CDM,$$

$$\therefore \angle CDM + \angle CDE = 45^\circ = \angle EDG,$$

在 $\triangle DEM$ 和 $\triangle DEG$ 中，

$$\begin{aligned}
 DE &= DE \\
 \angle EDG &= \angle EDM, \\
 DG &= DM \\
 \therefore \triangle DEG &\cong \triangle DEM, \\
 \therefore GE &= EM, \\
 \because \angle DCM &= \angle DAG = \angle ACD = 45^\circ, AG = CM, \\
 \therefore \angle ECM &= 90^\circ \\
 \therefore EC^2 + CM^2 &= EM^2, \\
 \because EG &= EM, AG = CM, \\
 \therefore GE^2 &= AG^2 + CE^2.
 \end{aligned}$$

【点睛】

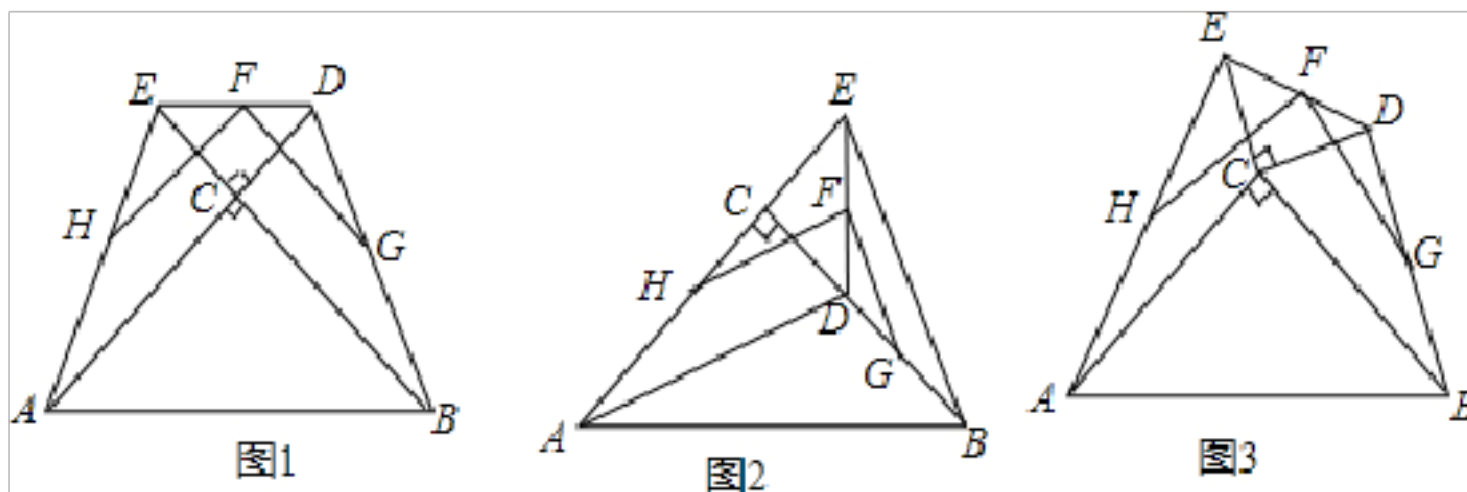
考查四边形综合题、矩形的性质、正方形的性质、菱形的判定和性质，等边三角形的判定和性质，勾股定理等知识，解题的关键是学会添加常用辅助线，构造全等三角形，学会转化的思想思考问题.

6. 两块等腰直角三角板 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEC$ 如图摆放，其中 $\angle ACB = \angle DCE = 90^\circ$ ，F 是 DE 的中点，H 是 AE 的中点，G 是 BD 的中点.

(1) 如图 1，若点 D、E 分别在 AC、BC 的延长线上，通过观察和测量，猜想 FH 和 FG 的数量关系为_____和位置关系为_____；

(2) 如图 2，若将三角板 $\triangle DEC$ 绕着点 C 顺时针旋转至 ACE 在一条直线上时，其余条件均不变，则 (1) 中的猜想是否还成立，若成立，请证明，不成立请说明理由；

(3) 如图 3，将图 1 中的 $\triangle DEC$ 绕点 C 顺时针旋转一个锐角，得到图 3，(1) 中的猜想还成立吗？直接写出结论，不用证明.



【答案】(1) 相等，垂直。(2) 成立，证明见解析；(3) 成立，结论是 $FH = FG$ ， $FH \perp FG$ 。

【解析】

试题分析：(1) 证 $AD = BE$ ，根据三角形的中位线推出 $FH = \frac{1}{2}AD$ ， $FH \parallel AD$ ， $FG = \frac{1}{2}BE$ ，

$FG \parallel BE$ ，即可推出答案；

(2) 证 $\triangle ACD \cong \triangle BCE$ ，推出 $AD = BE$ ，根据三角形的中位线定理即可推出答案；

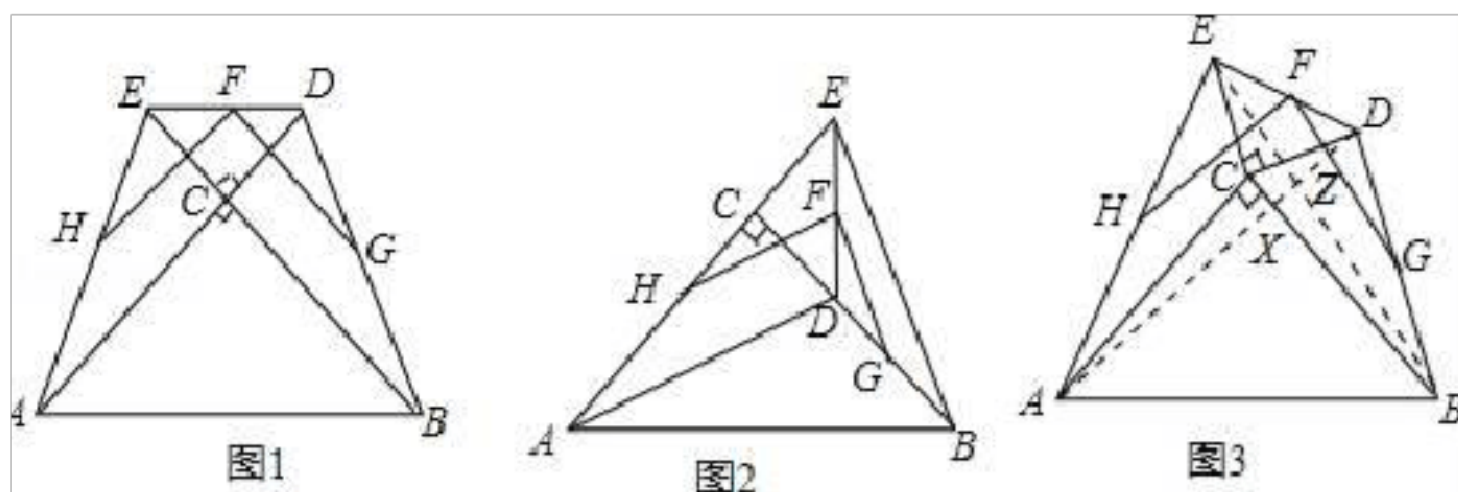
(3) 连接 BE 、 AD ，根据全等推出 $AD = BE$ ，根据三角形的中位线定理即可推出答案.

试题解析：

(1) 解: $\because CE=CD, AC=BC, \angle ECA=\angle DCB=90^\circ,$
 $\therefore BE=AD,$
 $\because F$ 是 DE 的中点, H 是 AE 的中点, G 是 BD 的中点,
 $\therefore FH=\frac{1}{2}AD, FH\parallel AD, FG=\frac{1}{2}BE, FG\parallel BE,$
 $\therefore FH=FG,$
 $\because AD\perp BE,$
 $\therefore FH\perp FG,$

故答案为相等, 垂直.

(2) 答: 成立,
 证明: $\because CE=CD, \angle ECD=\angle ACD=90^\circ, AC=BC,$
 $\therefore \triangle ACD\cong\triangle BCE$
 $\therefore AD=BE,$
 由 (1) 知: $FH=\frac{1}{2}AD, FH\parallel AD, FG=\frac{1}{2}BE, FG\parallel BE,$
 $\therefore FH=FG, FH\perp FG,$
 $\therefore$ (1) 中的猜想还成立.



(3) 答: 成立, 结论是 $FH=FG, FH\perp FG$.
 连接 AD, BE , 两线交于 Z , AD 交 BC 于 X ,
 同 (1) 可证

$\therefore FH=\frac{1}{2}AD, FH\parallel AD, FG=\frac{1}{2}BE, FG\parallel BE,$
 $\because$ 三角形 ECD, ACB 是等腰直角三角形,
 $\therefore CE=CD, AC=BC, \angle ECD=\angle ACB=90^\circ,$
 $\therefore \angle ACD=\angle BCE,$
 在 $\triangle ACD$ 和 $\triangle BCE$ 中
 $AC=BC$
 $\angle ACD=\angle BCE,$
 $CE=CD$
 $\therefore \triangle ACD\cong\triangle BCE,$
 $\therefore AD=BE, \angle EBC=\angle DAC,$
 $\because \angle DAC+\angle CXA=90^\circ, \angle CXA=\angle DXB,$

$$\therefore \angle DXB + \angle EBC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle EZA = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ,$$

即 $AD \perp BE$,

$\because FH \parallel AD, FG \parallel BE$,

$\therefore FH \perp FG$,

即 $FH = FG, FH \perp FG$,

结论是 $FH = FG, FH \perp FG$.

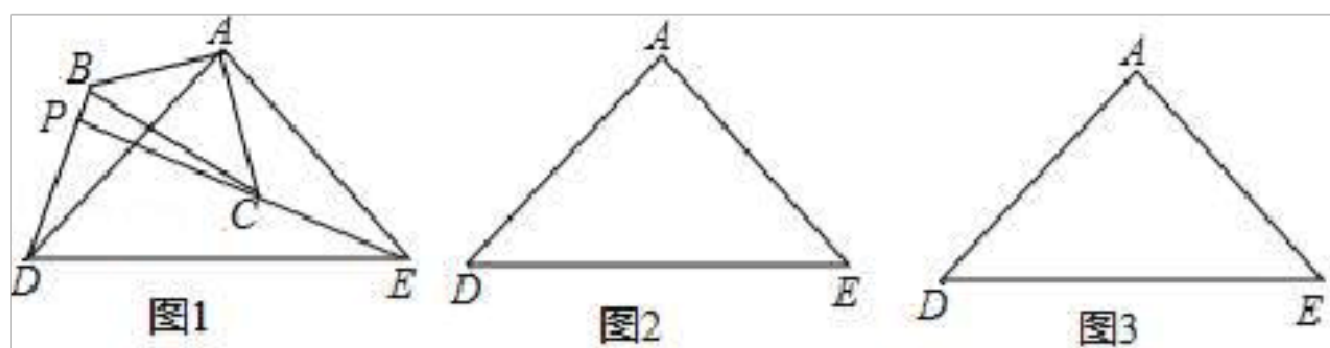
【点睛】运用了等腰直角三角形的性质、全等三角形的性质和判定、三角形的中位线定理，旋转的性质等知识点的理解和掌握，能熟练地运用这些性质进行推理是解此题的关键.

7. 如图所示， $\triangle ABC$ 和 $\triangle ADE$ 是有公共顶点的等腰直角三角形， $\angle BAC = \angle DAE = 90^\circ$ ， EC 的延长线交 BD 于点 P .

(1) 把 $\triangle ABC$ 绕点 A 旋转到图 1， BD, CE 的关系是_____ (选填“相等”或“不相等”)；简要说明理由；

(2) 若 $AB = 3, AD = 5$ ，把 $\triangle ABC$ 绕点 A 旋转，当 $\angle EAC = 90^\circ$ 时，在图 2 中作出旋转后的图形， $PD =$ _____，简要说明计算过程；

(3) 在 (2) 的条件下写出旋转过程中线段 PD 的最小值为_____，最大值为_____.



【答案】 (1) BD, CE 的关系是相等； (2) $\frac{5}{17}\sqrt{34}$ 或 $\frac{20}{17}\sqrt{34}$ ； (3) 1, 7

【解析】

分析：(1) 依据 $\triangle ABC$ 和 $\triangle ADE$ 是有公共顶点的等腰直角三角形， $\angle BAC = \angle DAE = 90^\circ$ ，即可 $BA = CA, \angle BAD = \angle CAE, DA = EA$ ，进而得到 $\triangle ABD \cong \triangle ACE$ ，可得出 $BD = CE$ ；

(2) 分两种情况：依据 $\angle PDA = \angle AEC, \angle PCD = \angle ACE$ ，可得 $\triangle PCD \sim \triangle ACE$ ，即可得到 $\frac{PD}{AE} = \frac{CD}{CE}$ ，进而得到 $PD = \frac{5}{17}\sqrt{34}$ ；依据 $\angle ABD = \angle PBE, \angle BAD = \angle BPE = 90^\circ$ ，可得

$\triangle BAD \sim \triangle BPE$ ，即可得到 $\frac{PB}{AB} = \frac{BE}{BD}$ ，进而得出 $PB = \frac{6}{34}\sqrt{34}$ ， $PD = BD + PB = \frac{20}{17}\sqrt{34}$ ；

(3) 以 A 为圆心， AC 长为半径画圆，当 CE 在 $\odot A$ 下方与 $\odot A$ 相切时， PD 的值最小；当 CE 在 $\odot A$ 右上方与 $\odot A$ 相切时， PD 的值最大. 在 $Rt\triangle PED$ 中， $PD = DE \cdot \sin \angle PED$ ，因此锐角 $\angle PED$ 的大小直接决定了 PD 的大小. 分两种情况进行讨论，即可得到旋转过程中线段 PD 的最小值以及最大值.

详解：(1) BD, CE 的关系是相等.

理由： $\because \triangle ABC$ 和 $\triangle ADE$ 是有公共顶点的等腰直角三角形， $\angle BAC = \angle DAE = 90^\circ$ ，

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/438045031064006135>