化工问题的建模
与数学分析措施

—— Modelling and Analytical Methods for Problems in Chemical Engineering

第四章 二阶偏微分方程与分离变量法

1、二阶方程的分类

2、分离变量法

3、特征值理论

4、特殊函数的应用

5、经典问题分析

第四章 二阶偏微分方程——概述

- **化学工程中常见的PDE**

对流—扩散—反应方程

$$a(u,t,x)\frac{\partial u}{\partial t}+v\frac{\partial u}{\partial x}=D\frac{\partial^2 u}{\partial x_2}+r(u)$$

常微分方程：求通解，初值定积分常数；

一阶偏微分方程：求通解，初值定任意函数；

二阶偏微分方程：从问题出发拟定求解措施。

第四章 二阶偏微分方程——概述

- 二阶导数项占优时，一般采用下列两种措施求解

分离变量法：合用于有限空间区域；

积分变换法：合用于无限空间区域；

均化为常微分方程求解。

§1 二阶偏微分方程的分类

$$au_{xx}+2bu_{xy}+cu_{yy}+du_x+eu_y+gu+f=0$$

令

$$u(x,y)=\exp(Xx+Yy)$$

得

$$aX^2+2bXY+cY^2+dX+eY+g=0$$

$$aX^2+2bXY+cY^2=(X,Y)\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}=\mathbf{xAx}$$

第四章二阶偏微分方程——方程的分类

由线性代数，可经过线性变换将特征二次型化为对角型

$$\mathbf{x A x} = \mathbf{x}' \mathbf{Q}^T \mathbf{A Q x}' = \mathbf{x}' \mathbf{A}' \mathbf{x}'$$

$$= (X', Y') \begin{pmatrix} a' & 0 \\ 0 & c' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix} = a' X'^2 + c' Y'^2$$

$$a'c' = |\mathbf{A}'| = |\mathbf{Q}^T \mathbf{A Q}| = |\mathbf{Q}^T| |\mathbf{A}| |\mathbf{Q}| = |\mathbf{A}| = ac - b^2$$

第四章二阶偏微分方程——方程的分类

二阶方程分类:

- **当$b^2-ac<0$时，曲线为椭圆，方程称为椭圆型方程**
- **当$b^2-ac=0$时，曲线为抛物线, 方程称为抛物型方程**
- **当$b^2-ac>0$时，曲线为双曲线，方程称为双曲型方程**

第四章二阶偏微分方程——方程的分类

- 原则形式：

椭圆型方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

抛物型方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\alpha\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

双曲型方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

第四章二阶偏微分方程——方程的分类

- **物理意义：**

椭圆型方程——位势方程，描述与时间无关的定常分布；

抛物型方程——热传导方程，描述不可逆的发展演变；

双曲型方程——波动方程，描述可逆的双向波动。

第四章二阶偏微分方程——方程的分类

- 定解问题的提法——方程与初、边值的组合

  初值问题(Cauchy问题)

  边值问题

  混合问题

§2 分离变量法

——试探问题的变量分离形式的解

例1

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\alpha\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\qquad(0<x<l)$$

$$u(0,t)=u(l,t)=0$$

$$u(x,0)=\varphi(x)$$

设

$$u(x,t)=X(x)T(t)$$

第四章二阶偏微分方程——分离变量法

$$\frac{T'}{\alpha T}=\frac{X''}{X}=-\lambda$$

变量分离，得

$$T'+\alpha\lambda T=0$$

$$X''+\lambda X=0$$

$$X(0)=X(l)=0$$

求$X(x)$的非零解，经过调整参数λ的值

第四章二阶偏微分方程——分离变量法

i) 当$\lambda<0$时，方程的通解

$$X(x)=c_1e^{\sqrt{-\lambda}x}+c_2e^{-\sqrt{-\lambda}x}$$

$c1 = c2 = 0$，也即 $X(x)\equiv 0$

ii) 当$\lambda=0$时，方程的通解

$$X(x)=c_1+c_2x$$

$c1 = c2 = 0$，也即 $X(x)\equiv 0$

第四章二阶偏微分方程——分离变量法

iii) 当$\lambda>0$时，方程通解具有如下形式

$$X(x)=c_1\cos\sqrt{\lambda}x+c_2\sin\sqrt{\lambda}x$$

由边界条件$X(0)=0$知$c1=0$, 再由

$$X(l)=c_2\sin\sqrt{\lambda}l=0$$

为了有非零解$c2\neq0$，必须sin= 0，由此拟定出参数λ

$$\lambda=\frac{n^2\pi^2}{l^2}\qquad(n=1,2,\cdots)$$

第四章二阶偏微分方程——分离变量法

由此得变量分离解

$$X_n(x) = C_n \sin\frac{n\pi}{l}x \qquad (n = 1,2,\mathrm{L}\ )$$

$$T_n(t) = B_n \exp[-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \alpha t]$$

$$u_n(x,t) = A_n \exp[-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \alpha t]\sin\frac{n\pi}{l}x$$

第四章二阶偏微分方程——分离变量法

为满足初值，将解叠加

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n \exp[-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \alpha t]\sin\frac{n\pi}{l}x$$

由初值

$$\varphi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n \sin\frac{n\pi}{l}x$$

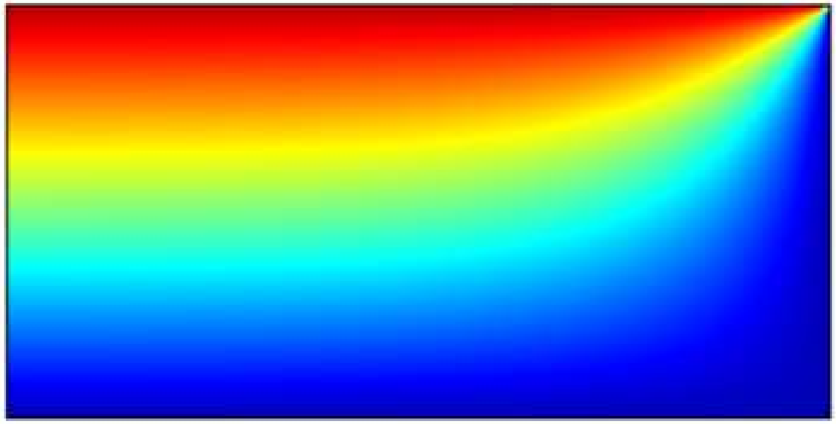
$$A_n=\frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{n\pi}{l}x dx$$

得解。

第四章二阶偏微分方程——分离变量法

例2 矩形区域的Laplace方程

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = 0, \quad u(a, y) = 0 \\ u(x,0) = 0\,, \quad u(x, b) = U \end{cases}$$



令

$$u(x, y) = X(x)Y(y)$$

第四章二阶偏微分方程——分离变量法

得

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X'(0) = 0, X(a) = 0 \end{cases}$$

$$Y'' - \lambda Y = 0$$

特征值问题非平凡解

$$X(x) = c_1 \cos\sqrt{\lambda}x + c_2 \sin\sqrt{\lambda}x$$

由零边界条件定出 c_2=0

$$c_1 \cos\sqrt{\lambda}a = 0 \qquad \lambda = \left(\frac{2n-1}{2a}\pi\right)^2 \qquad (n = 1,2,\cdots)$$

第四章二阶偏微分方程——分离变量法

得

$$X_n = \cos\frac{2n-1}{2a}\pi x \qquad (n = 1,2,\cdots)$$

$$Y_n(y) = A_n \exp\left(\frac{2n-1}{2a}\pi y\right) + B_n \exp\left(-\frac{2n-1}{2a}\pi y\right)$$

$$u_n(x,y) = \left[A_n \exp\left(\frac{2n-1}{2a}\pi y\right) + B_n \exp\left(\frac{2n-1}{2a}\pi y\right)\right]\cos\frac{2n-1}{2a}\pi x$$

为满足y方向的一般边界条件，构造级数

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n \exp\left(\frac{2n-1}{2a}\pi y\right) + B_n \exp\left(-\frac{2n-1}{2a}\pi y\right)\right]\cos\frac{2n-1}{2a}\pi x$$

由y方向的边值，得

得

$$0=\sum_{n=1}^{\infty}(A_n+B_n)\cos\frac{2n-1}{2a}\pi x$$

$$U=\sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n\exp\left(\frac{2n-1}{2a}\pi b\right)+B_n\exp\left(-\frac{2n-1}{2a}\pi b\right)\right]\cos\frac{2n-1}{2a}\pi x$$

$$A_n=-B_n=\frac{(-1)^{n+1}4U}{\pi(2n-1)\left[\exp\left(\frac{2n-1}{2a}\pi b\right)-\exp\left(-\frac{2n-1}{2a}\pi b\right)\right]}$$

得解

$$u(x,y)=\frac{4U}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}\frac{sh\left(\frac{2n-1}{2a}\pi y\right)}{sh\left(\frac{2n-1}{2a}\pi b\right)}\cos\frac{2n-1}{2a}\pi x$$

例3 圆形区域的Laplace方程

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial r}+\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}=0 \qquad (0<r<1, 0\le\theta\le 2\pi) \\ u(1,\theta)=f(\theta) \end{cases}$$

令

$$u(r,\theta)=R(r)\Phi(\theta)$$

第四章二阶偏微分方程——分离变量法

$$\frac{r^2 R'' + rR'}{R} = -\frac{\Phi''}{\Phi} = \lambda$$

$$r^2 R'' + rR' - \lambda R = 0$$

特征值问题

$$\Phi'' + \lambda\Phi = 0$$

$$\Phi(\theta) = \Phi(\theta + 2\pi)$$

解得$\lambda = n$

$$\Phi(\theta) = A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta$$

第四章二阶偏微分方程——分离变量法

$$R_n = c_1 e^{nt} + c_2 e^{-nt} = c_1 r^n + c_2 r^{-n}$$

$$u_n(r,\theta) = r^n \left(A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta\right) \qquad (n=1,2,\cdots)$$

$$u(r,\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta)$$

由边值

$$u(1,\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) = f(\theta)$$

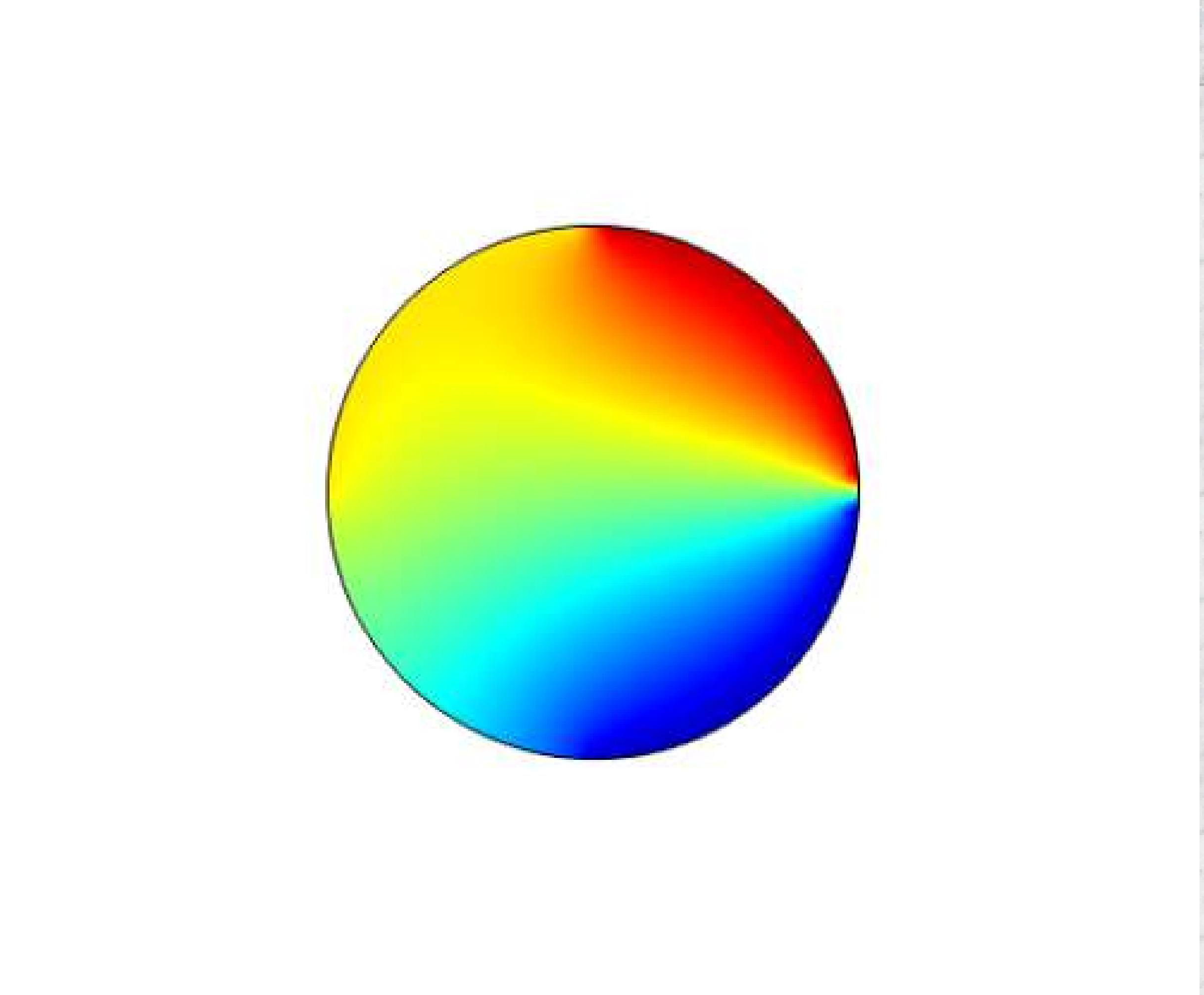
得

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\cos n\theta d\theta \qquad (n = 0, 1, 2, L\ )$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\sin n\theta d\theta \qquad (n = 1, 2, L\ )$$

得解。

第四章二阶偏微分方程——分离变量法



第四章二阶偏微分方程——分离变量法

- **小结：分离变量法**

  1、假设变量分离形式的解

  2、导出并求解特征值问题

  3、叠加成级数，满足初值或边值

- 关键问题——特征值问题

  能否经过调整不定参数取得齐次方程的非零解。

§3 分离变量法

——非齐次方程与边界条件：化齐与展开

1、非齐边值的处理：迭加边值问题特解，化齐

例1

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\alpha\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\qquad(0<x<l)$$

$$u(0,t)=u_1;\qquad u(l,t)=u_2$$

$$u(x,0)=\varphi(x)$$

第四章二阶偏微分方程——分离变量法

令

$$u(x,t)=w(x,t)+v(x)$$

特解$v(x)$要求满足边值，有无穷多种选择，规范为

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=0 \qquad (0<x<l)$$

$$v(0)=u_1; \qquad v(l)=u_2$$

$$v(x)=u_0+\frac{u_1-u_0}{l}x$$

第四章二阶偏微分方程——分离变量法

于是，问题化为$w(x,t)$的齐次边值问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial w}{\partial t}=\alpha\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\\ w(0,t)=w(l,t)=0\\ w(x,0)=\varphi(x)-v(x)\end{cases}$$

- 方程化齐的要点，是要求叠加的特解$v(x)$既要满足边值，又要满足原微分方程，使得化齐后的问题最简朴。

例2

$$\begin{cases} \dfrac{\partial c}{\partial t} = D\dfrac{\partial^2 c}{\partial x^2} - kc \qquad (0 \le x \le l) \\ c(0,t) = c(l,t) = c_s \\ c(x,0) = c_0 \end{cases}$$

令

$$u(x,t) = w(x,t) + v(x)$$

$$\begin{cases} D\dfrac{d^2 v}{dx^2} - kv = 0 \\ v(0) = v(l) = c_s \end{cases}$$

第四章二阶偏微分方程——分离变量法

解出

$$v(x)=\frac{c_s}{1+e^{\phi}}\left[\exp\left(\sqrt{\frac{k}{D}}x\right)+\exp\left(\sqrt{\frac{k}{D}}(l-x)\right)\right]$$

问题化齐为

$$\begin{cases}\dfrac{\partial w}{\partial t}=D\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}-kw\\ w(0,t)=w(l,t)=0\\ w(x,0)=c_0-v(x)\end{cases}$$

第四章二阶偏微分方程——分离变量法

第四章二阶偏微分方程——分离变量法

- 方程与边值同步化齐

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \alpha \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x) \\ u(0,t) = u_0, u(l,t) = u_1 \\ u(x,0) = \varphi(x) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha \dfrac{d^2 v}{dx^2} + f(x) = 0 \\ v(0) = u_0, v(l) = u_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial w}{\partial t} = \alpha \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ w(0,t) = w(l,t) = 0 \\ w(x,0) = \varphi(x) - v(x) \end{cases}$$

第四章二阶偏微分方程——分离变量法

2、非齐方程的处理：级数展开

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \alpha \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t) \qquad (0 < x < l) \\ u(0,t) = u(l,t) = 0 \\ u(x,0) = \varphi(x) \end{cases}$$

难以直接分离变量，受常微分方程常数变易法的启发，

可将函数u(x,t）及全部函数均按特征函数展开

$$X_n(x) = \sin \frac{n\pi}{l} x$$

第四章二阶偏微分方程——分离变量法

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)\sin\frac{n\pi}{l}x$$

$$f(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}f_n(t)\sin\frac{n\pi}{l}x$$

$$\varphi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n\sin\frac{n\pi}{l}x$$

代入方程，得

$$\sum_{n=1}^{\infty}[T_n'(t)+\frac{an^2\pi^2}{l^2}T_n(t)-f_n(t)]\sin\frac{n\pi}{l}x=0$$

第四章二阶偏微分方程——分离变量法

$$T_n'(t)+\frac{\alpha n^2\pi^2}{l^2}T_n(t)-f_n(t)=0$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}T_n(0)\sin\frac{n\pi}{l}x=\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n\sin\frac{n\pi}{l}x$$

$$T_n(0)=\varphi_n$$

$$T_n(t)=\varphi_n\exp(-\frac{\alpha n^2\pi^2}{l^2}t)+\int_0^t\exp[\alpha\frac{n^2\pi^2}{l^2}(\tau-t)]f_n(\tau)d\tau$$

第四章二阶偏微分方程——分离变量法

- 小结：分离变量法的关键

  特征函数

  级数展开

问题——

特征函数的存在性？

特征函数的正交性？

特征函数的完整性？

在一般条件下需要从理论上予以回答。

第四章二阶偏微分方程——分离变量法

- **分离变量法的历史发展**

- **1700's——弦振动方程的三角函数试探解(Tayler)**

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (0 < x < l)$$

$$u(0,t) = u(l,t) = 0$$

$$u(x,0) = \varphi(x)$$

$$u(x,t) = a_1 \sin\frac{\pi}{l}x + a_2 \sin\frac{2\pi}{l}x + \cdots$$

第四章二阶偏微分方程——分离变量法

- **1800～1900's——Fourier措施**

  无穷级数解

  特征值问题

  Fourier级数理论

  Fourier变换

- **1800's——Strum－Liouville特征值理论**

  分离变量法的理论基础

  特殊函数的应用

§4 特征值问题

1、正交性的定义

$$\int_a^b y_n(x)y_m(x)\rho(x)dx=\begin{cases}0 & m\neq n\\ \alpha_n & m=n\end{cases}$$

Fourier展开

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}f_n y_n(x)$$

$$f_n=\frac{1}{\alpha_n}\int_a^b f(x)y_n(x)\rho(x)dx$$