一、 随机事件及其概率

（18）设事件A与事件B相互独立，且$P(A)=0.3$，$P(A\cup\bar{B})=0.7$，则$P(B)$=<u>3/7</u>.

（18）. 设A,B为两个互斥事件，且$P(A)>0$, $P(B)>0$，则下列结论中正确的是(C).

(A) $P(B|A)>0$　　　(B) $P(A|B)=P(A)$

(C) $P(A|B)=0$　　　(D) $P(AB)=P(A)P(B)$

（18）1. 三个箱子中，第一箱装有 4 个黑球 1 个白球，第二箱装有 3 个黑球 3 个白球，第三箱装有 3 个黑球 5 个白球。现先任取一箱，再从该箱中任取一球。求：（1）取出的球是白球的概率；（2）若取出的是白球，该球属于第二箱的概率。

解：设A_i为“取出第i个箱子”，$i=1,2,3$，B为“取出白球”，则由已知条件得

$$\mathrm{P}(A_1)=\mathrm{P}(A_2)=\mathrm{P}(A_3)=\frac{1}{3},$$

$$\mathrm{P}(B|A_1)=\frac{1}{5}，\mathrm{P}(B|A_2)=\frac{3}{6}，\mathrm{P}(B|A_3)=\frac{5}{8}.$$ …3 分

（1） 由全概率公式得

$$\mathrm{P}(B)=\sum_{i=1}^{3}\mathrm{P}(A_i)\mathrm{P}(B|A_i)=\frac{53}{120}$$ …6 分

（2）由逆概率公式得

$$\mathrm{P}(A_2|B)=\frac{\mathrm{P}(A_2)\mathrm{P}(B|A_2)}{\mathrm{P}(B)}=\frac{20}{53}$$

（17）设A,B是同一个试验中的两个事件, 且$P(A)=0.61, P(A-B)=0.22$，

则$P(\overline{AB})=$<u>0.61</u>.

（17）抛掷两颗均匀的骰子，已知两颗骰子点数之和为 7 点，则其中一颗为 1 点的概率为<u>1/3</u>.

（17）设A、B、C三个事件两两相互独立，则A、B、C相互独立的充分必要条件是（ A ）

(A) A与BC独立　　　(B) AB与$A\cup C$独立

(C) AB与AC独立　　　(D) $A\cup B$与$A\cup C$独立

（17）1. 在电报通讯中，发送端发出的是由“g”和“−”两种信号组成的序列。由于受到随机干扰，接收端收到的是“g”和“−”及“不清”三种信号组成的序列。假设发送“g”和

“-”的概率分别为 0.7 和 0.3；在已知发送“g”时，接收到“g”、“-”和“不清”的概率分别为 0.8、0.1 和 0.1；在已知发送“-”时，接收到“g”、“-”和“不清”的概率分别为 0.2、0.7 和 0.1.

求（1）接收到信号“g”、“-”和“不清”的概率；

（2）在接收到信号“不清”的条件下，发送信号为“-”的概率。

解：（1）由全概率公式

$$\begin{aligned}P(B_1) &= P(A_1)\cdot P(B_1 \mid A_1) + P(A_2)\cdot P(B_1 \mid A_2)\\ &= 0.7\times 0.8 + 0.3\times 0.2 = 0.62\end{aligned}$$

$$P(B_2) = 0.7\times 0.1 + 0.3\times 0.7 = 0.28$$

$$P(B_3) = 0.7\times 0.1 + 0.3\times 0.1 = 0.1$$

（2）由贝叶斯公式得

$$P(A_2 \mid B_3) = \frac{P(A_2)P(B_3 \mid A_2)}{P(A_1)P(B_3 \mid A_1) + P(A_2)P(B_3 \mid A_2)}$$

$$= \frac{0.3\times 0.1}{0.7\times 0.1 + 0.3\times 0.1} = 0.3$$

（16）设事件 A 与事件 B 相互独立，且 $P(A)=0.3$，$P(B)=0.4$，则 $P(A\cup B)=$ <u>0.58</u>.

（16）设 A,B 为对立事件，$0<P(B)<1$，则下列概率值为 1 的是(B).

(A) $P(\bar{A} \mid \bar{B})$ (B) $P(\bar{A} \mid B)$ (C) $P(B \mid A)$ (D) $P(AB)$

（16）. 已知甲、乙两箱中装有同种产品，其中甲箱中装有 2 件合格品和 2 件次品，乙箱中仅装有 2 件合格品，现从甲箱中随机地取出 2 件放入乙箱，求：（1）乙箱中次品数 X 的概率分布；（2）从乙箱中任取一件是次品的概率.

解：1. 解: (1)

X	0	1	2
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$

(2) 设 B_i 为从甲箱中取出2件含有 i 件次品的事件（i=0, 1, 2），A 为从乙箱中任取一件是次品的事件，由全概率公式

$$P(A) = P(A \mid B_0)\cdot P(B_0) + P(A \mid B_1)\cdot P(B_1) + P(A \mid B_2)\cdot P(B_2)$$

$$= 0 + \frac{1}{4}\times\frac{2}{3} + \frac{2}{4}\times\frac{1}{6} = \frac{1}{4}.$$

（15）每次试验成功率为 $p(0<p<1)$，进行重复试验，直到第 10 次试验才取得 4 次成功的概率为（　　B　　）

(A)　$C_{10}^{4}P^{4}(1-P)^{6}$　　　　(B)　$C_{9}^{3}P^{4}(1-P)^{6}$

(C)　$C_{9}^{4}P^{4}(1-P)^{5}$　　　　(D)　$C_{9}^{3}P^{3}(1-P)^{6}$

（15）设 A,B 为两相互独立的随机事件，$P(A\cup B)=0.6$，$P(A)=0.4$，则 $P(B)=$ $\underline{\frac{1}{3}}$

（15）有两箱同种零件，在第一箱内装 50 件，其中有 10 件是一等品；在第二箱内装 30 件，其中有 18 件是一等品。现从两箱中随机地取出一箱，然后从该箱中取两次零件，取出的零件均不放回，

求：（1）第一次取出的零件是一等品的概率；

（2）在第一次取出的零件是一等品的条件下，第二次取出的零件是一等品的概率。

解：（1）设 B_1 为零件取自第一箱，B_2 为零件取自第二箱，A 为第一次取得一等品的概率，由全概率公式

$$P(A)=P(A|B_1)\cdot P(B_1)+P(A|B_2)\cdot P(B_2)$$

$$=\frac{10}{50}\times\frac{1}{2}+\frac{18}{30}\times\frac{1}{2}=\frac{2}{5}$$

设 B_1 为零件取自第一箱且第一次取得一等品，B_2 为零件取自第二箱且第一次取得一等品，A 为第二次取得一等品，由全概率公式

$$P(A)=P(A|B_1)\cdot P(B_1)+P(A|B_2)\cdot P(B_2)$$

$$=(\frac{9}{49}\times\frac{1}{2}+\frac{18}{30}\times\frac{1}{2})\times\frac{10}{50}\times\frac{1}{2}+(\frac{10}{50}\times\frac{1}{2}+\frac{17}{29}\times\frac{1}{2})\times\frac{18}{30}\times\frac{1}{2}=0.4856$$

（14）已知 $P(A)=\frac{1}{4}$，$P(B|A)=\frac{1}{3}$，$P(A|B)=\frac{1}{2}$，则 $P(A\cup B)=$ $\underline{\quad\frac{1}{3}\quad}$.

（14）某商店成箱出售玻璃杯，每箱 20 只，设各箱含 0，1，2 只残次品的概率分别为 0.8, 0.1 和 0.1。一顾客欲购买一箱玻璃杯，由售货员任取一箱，而顾客开箱随机地察看 4 只；若无残次品，则买下该箱玻璃杯，否则退回。试求：

（1）顾客买此箱玻璃杯的概率；

（2）在顾客买的此箱玻璃杯中，确实没有残次品的概率。

解：用 A_i 表示箱中有 $i(i=0,1,2)$ 只残次品，用 B 表示顾客买下玻璃杯。

$$P(A_0)=0.8,\qquad P(A_1)=0.1,\qquad P(A_2)=0.1$$

$$P(B|A_0)=1,\qquad P(B|A_1)=\frac{C_{19}^4}{C_{20}^4}=\frac{4}{5},\qquad P(B|A_2)=\frac{C_{18}^4}{C_{20}^4}=\frac{12}{19}$$

（1） 由全概率公式

$$P(B)=P(B|A_0)P(A_0)+P(B|A_1)P(A_1)+P(B|A_2)P(A_2)$$

$$=0.8+0.1\times\frac{4}{5}+0.1\times\frac{12}{19}=0.94$$

（2） 由贝叶斯公式

$$P(A_0|B)=\frac{P(A_0)P(B|A_0)}{P(B)}=\frac{0.8}{0.94}=0.85$$

（13）设某厂有A，B，C三个车间，生产同一种产品，每个车间的产量分别占全厂的25%，35%，40%，各车间的次品率分别为5%，4%，2%，(1)求全厂产品的次品率；(2)若任取一件是次品，求这件次品是A车间生产的概率.

解：设 B={任取一件是次品}， A_i ={产品是第i个车间生产的}， $i=1,2,3$

(1) $$P(B)=\sum_{i=1}^{3}P(A_iB)=\sum_{i=1}^{3}P(A_i)P(B|A_i)$$

=0.25×0.05+0.35×0.04+0.4×0.02

=0.0345.

(2) $$P(A_1|B)=\frac{P(A_1B)}{P(B)}=\frac{0.25\times0.05}{0.0345}=\frac{25}{69}$$

（12）设 A,B 为两个随机事件，且 $P(A)=0.5$， $P(B)=0.6$， $P(A-B)=0.3$，则

$P(A\cup B)=$ ___0.9___.

（12）设有 4 张卡片分别标有数字 1，2，3，4．从这四张卡片中任取一张，设事件 A 为取到 1 或 2，事件 B 为取到 1 或 3，则事件 A 与 B 是（ C ）的

(A) 互不相容；　(B) 互为对立；　(C) 相互独立；　(D) 无法确定.

（12）某商店出售的灯炮由甲乙两厂生产，其中甲厂的产品占 60%，乙厂的产品占 40%，已知甲厂产品的次品率为 4%，乙厂产品的次品率为 5%，一顾客随机的取出一个灯炮，求：（1）取出的是合格品的概率；

（2）已知取出的是合格品，它是甲厂生产的概率为多少？

解：设 A_i 分别表示“甲、乙两厂生产的产品”的事件（i=1，2）

B 表示“取出的是合格品”的事件，由已知

$$P(A_1)=\frac{60}{100},P(A_2)=\frac{40}{100}$$

$P(B|A_1)=\frac{60}{100},P(B|A_2)=\frac{95}{100}$,则

（1）由全概率公式$P(B)=P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)$

$$=\frac{60}{100}\times\frac{96}{100}+\frac{40}{100}\times\frac{95}{100}=0.956$$

（2） 由贝叶斯公式$P(A_1|B)=\frac{P(A_1)P(B|A_1)}{P(B)}=\frac{\frac{60}{100}\times\frac{96}{100}}{0.956}=0.5963$

（11）设A,B为两个随机事件，且$P(B)=0.4$，$P(A\cup B)=0.5$，则$P(A|\overline{B})=$ $\frac{1}{6}$___.

（11）已知甲、乙两箱中装有同种产品，其中甲箱中装有 3 件合格品和 3 件次品，乙箱中仅装有 3 件合格品. 从甲箱中任取 3 件产品放入乙箱后，求从乙箱中任取一件产品是次品的概率.

解： X 的可能取值为 0，1，2，3，X 的分布律为

$$P\{X=k\}=\frac{C_3^kC_3^{3-k}}{C_6^3},k=0,1,2,3.$$

即$P\{X=0\}=\frac{1}{20},P\{X=1\}=\frac{9}{20},P\{X=2\}=\frac{9}{20},P\{X=3\}=\frac{1}{20}.$

设A表示事件“从乙箱中任取一件产品是次品”，由于$\{X=i\},i=0,1,2,3.$构成完备事件组，由全概率公式有

$$P(A)=\sum_{k=0}^{3}P\{X=k\}P\{A|X=k\}=\sum_{k=0}^{3}P\{X=k\}\cdot\frac{k}{6}=\frac{1}{4}.$$

（10）已知$P(A)=\frac{1}{4}$，$P(B)=\frac{1}{6}$，$P(A|B)=\frac{1}{2}$，则$P(A\cup B)=$ __1/3________.

（09）设A,B,C是三个随机事件，已知$P(A)=P(B)=P(C)=0.3$, $P(AB)=P(BC)=0$, $P(AC)=0.2$, 则A，B，C全不发生的概率为 __0.3____ .

(09) 在 10 件产品中有 2 件次品, 依次取出 2 件产品, 每次取一件, 取后不放回, 则第二次取到次品的概率为(C)

（A）$\frac{1}{45}$.　　（B）$\frac{8}{45}$.　　（C）$\frac{1}{5}$.　　（D）$\frac{16}{45}$

(09) 设$0<P(A)<1$, 且$P(B|A)=P(B|\overline{A})$，试证A与B相互独立.

证 由全概率公式

$$
\begin{aligned}
P(B) &= P(A)P(B|A)+P(\bar{A})P(B|\bar{A}) \\
&= P(A)P(B|A)+P(\bar{A})P(B|\bar{A}) \\
&= P(B|A)[P(A)+P(\bar{A})] \\
&= P(B|A),
\end{aligned}
$$

所以

$$P(AB)=P(A)P(B|A)=P(A)P(B),$$

故 A 与 B 相互独立.

二、 一维随机变量及其分布

（18）设随机变量X的概率分布为

X	0	1	2	3
P	0.1	0.2	0.6	0.1

若随机变量$Y=(X-2)^2$，则$P\{Y=1\}=$ __0.3__.

（18）若要$f(x)=\cos x$成为随机变量X的概率密度，则X的可能取值区间是(A).

(A) $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ (B) $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$ (C) $[0,\pi]$ (D) $\left[\frac{3\pi}{2},\frac{7\pi}{4}\right]$

（18）某公共汽车站每隔 5 分钟有一辆汽车到站，在该站等车的乘客可全部乘上这辆车，假设各乘客到达该站的时间是随机的且相互独立，，求（1）一位乘客等车时间超过 3 分钟的概率，（2）在该站上车的 5 位乘客中恰有 2 位等车时间超过 3 分钟的概率。

解：（1）设一位乘客等车的时间为X，则X的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{5}, & 0<x<5, \\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

一位乘客等车时间超过 3 分钟的概率

$$\mathrm{P}\{X>3\}=\int_3^5\frac{1}{5}\mathrm{d}x=\frac{2}{5}.$$

（2）设 5 位乘客中等车时间超过 3 分钟的人数为Y, 则$Y\sim B\left(5,\frac{2}{5}\right)$。

所求概率为

$$P\{Y=2\}=C_5^2\left(\frac{2}{5}\right)^2\left(1-\frac{2}{5}\right)^3=\frac{216}{625}$$

（17）设连续性随机变量 X 的分布函数在某区间的表达式为 $\dfrac{1}{x^2+1}$，其余部分为常数，写出此分布函数的完整表达式 $F(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x^2+1}, & 当x<0时\\ 1, & 当x\ge 0时\end{cases}$ ________________.

（17）设 $F(x)$ 为随机变量 X 的分布函数，在下列概率中可表示为 $F(a)-F(a-0)$ 的是（　C　）

(A)　$P\{X\le a\}$　　(B)　$P\{X>a\}$

(C)　$P\{X=a\}$　　(D)　$P\{X\ge a\}$

（17）设连续型随机变量 X 的分布函数为 $F(x)=A+B\arctan x,\quad -\infty<x<+\infty$

求（1）常数 A、B．（2）随机变量 X 落在 $(-1,1)$ 内的概率．（3） X 的概率密度函数.

解：（1） $F(-\infty)=0, F(+\infty)=1$ 得，

$$A+B(-\frac{\pi}{2})=0, A+B(\frac{\pi}{2})=1, 得A=\frac{1}{2}，\ B=\frac{1}{\pi}.$$

（2）
$$P(-1<x<1)=F(1)-F(-1)$$
$$=(\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\pi}{4})-(\frac{1}{2}-\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\pi}{4})=\frac{1}{2}$$

（3） X 的概率密度函数 $f(x)=F'(x)=\dfrac{1}{\pi(1+x^2)}, -\infty<x<+\infty$...

（17）

解：设 Y 的分布函数为 $F_Y(y)=P\{Y\le y\}$.

当 $y<0$ 时， $F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{X^2\le y\}=0$，...

当 $y\ge 0$ 时， $F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{X^2\le y\}=F_X(\sqrt{y})-F_X(-\sqrt{y})$，

因此 Y 的概率密度函数为 $f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\sqrt{y}}e^{-\sqrt{y}}, & y>0,\\ 0, & y<0.\end{cases}$

（16）设随机变量 $X\sim B(2, 0.1)$，则 $P\{X=1\}$ = 0.18.

（16）设随机变量 X 的概率密度函数为 $f_X(x)=\begin{cases}2x, & 0<x<1,\\ 0, & 其他.\end{cases}$ 则随机变量

$Y=2X+1$的概率密度函数为___ $f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{y-1}{2} & 1<y<3\\ 0 & 其他\end{cases}$ ______________.

（16）设随机变量 $X\sim N(0,1), Y=2X+1,$ 则Y服从(C).

(A) $N(0,1)$ (B) $N(1,1)$ (C) $N(1,4)$ (D) $N(0,2)$

（16）设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\dfrac{1}{2}e^{-|x|}$（$-\infty<x<\infty$）. 求：(1) X 的分布函数；(2) $D(X)$.

解 (1) X 的分布函数为

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)\,\mathrm{d}t=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{x}, & x<0,\\ 1-\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-x}, & x\ge 0.\end{cases}$$

(2) $E(X)=\dfrac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}xe^{-|x|}=0$，$E(X^2)=\dfrac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}x^2e^{-|x|}=\int_0^{\infty}x^2e^{-x}dx=2$，

$D(X)=E(X^2)-E^2(X)=2$.

（15）设随机变量 X 的分布律为

X	−2	0	2
P	0.4	0.3	0.3

则$Y=8-X^3$的分布律为______________

X	0	8	16
P	0.3	0.3	0.4

（15）设$F_1(x)与F_2(x)$分别为随机变量$X_1与X_2$的分布函数，为使$F(x)=aF_1(x)-bF_2(x)$是某一随机变量的分布函数，在下列给定的各组数值中应取（ C ）

(A) $a=-\dfrac{1}{2},b=\dfrac{3}{2}$ (B) $a=\dfrac{2}{3},b=\dfrac{2}{3}$

(C) $a=\dfrac{3}{5},b=-\dfrac{2}{5}$ (D) $a=\dfrac{1}{2},b=-\dfrac{3}{2}$

（15）.已知随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}ax+b, & 0<x<1,\\ 0, & 其\ 他,\end{cases}$$

且$P\left\{X>\dfrac{1}{2}\right\}=\dfrac{5}{8}$, 求（1）常数$a,b$的值；（2）$P\left\{\dfrac{1}{4}<X\le\dfrac{1}{2}\right\}$.

解:（1）由$1=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1(ax+b)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}a+b$，

再由 $\frac{5}{8}=P\{X>\frac{1}{2}\}=\int_{\frac{1}{2}}^{1}(ax+b)\mathrm{d}x=\frac{3}{8}a+\frac{1}{2}b,$

解得 $a=1,b=\frac{1}{2}$. .

（2） $P\{\frac{1}{4}<X\le\frac{1}{2}\}=\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}}(x+\frac{1}{2})\mathrm{d}x=\frac{7}{32}$. .

（14）设随机变量 X 在区间 $(0,2)$ 上服从均匀分布，则随机变量 $Y=X^2$ 的概率密度为 $f_Y(y)=$__ $\begin{cases}\frac{1}{4\sqrt{y}},0<y<4\\ 0,\quad 其他\end{cases}$ ___

（14）设随机变量 X 与 Y 相互独立，其概率分布分别为

X	0	1
P	0.4	0.6

Y	0	1
P	0.4	0.6

则有(　B　)

A. $P(X=Y)=0.$　*B.* $P(X=Y)=0.52.$　*C*. $P(X=Y)=0.5.$　*D.* $P(X=Y)=1.$

（14）　设随机变量 X 服从正态分布 N(0,1)，对给定的 $\alpha(0<\alpha<1)$，数 u_α 满足 $P\{X>u_\alpha\}=\alpha$，若 $P\{|X|<x\}=\alpha$，则 x 等于(　　C)

A. $u_{\frac{\alpha}{2}}$.　*B.* $u_{1-\frac{\alpha}{2}}$.　*C.* $u_{\frac{1-\alpha}{2}}$.　*D.* $u_{1-\alpha}$.

（14）设随机变量 X 的概率密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}4x^3, & 0<x<1,\\ 0, & 其它,\end{cases}$$

则使 $P\{X>a\}=P\{X<a\}$ 成立的常数 $a=$（　D　　）

A. $\sqrt[4]{2}$.　*B.* $\frac{1}{2}$.　*C.* $1-\frac{1}{\sqrt[4]{2}}$.　*D.* $\frac{1}{\sqrt[4]{2}}$.

（14）设连续型随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}k\mathrm{e}^x, & x<0,\\ \frac{1}{4}, & 0\le x<2,\\ 0, & x\ge 2,\end{cases}$$

求（1）常数 k，（2） X 的分布函数 $F(x)$，（3） $E(X)$.

解：(1) $1=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=\int_{-\infty}^{0}ke^x dx+\int_0^2\frac{1}{4}dx=k+\frac{1}{2}$，得 $k=\frac{1}{2}$

(2) $F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt$

当$x<0$时，$F(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{2}e^{t}dt=\frac{1}{2}e^{x}$

当$0\le x<2$时，$F(x)=\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{2}e^{t}dt+\int_{0}^{x}\frac{1}{4}dt=\frac{1}{2}+\frac{x}{4}$

当$x\ge 2$时，$F(x)=1$

(3) $E(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_{-\infty}^{0}x\frac{1}{2}e^{x}dx+\int_{0}^{2}x\frac{1}{4}dx=0$

（13）设连续型随机变量X的分布函数为 $F(x)=\begin{cases}1-e^{-3x}, & x>0,\\ 0, & x\le 0,\end{cases}$ 则$P\{X>1\}$

= _e^{-3}_______________ .

（13）已知离散型随机变量X的概率分布（右图），$F(x)$为其分布函数，则$F(\frac{3}{2})$= $\frac{1}{2}$ _____.

X	0	1	2
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$

（13）已知随机变量X的概率密度为$f_X(x)$，令$Y=-2X$，则Y的概率密度

$f_Y(y)$为（ D ）.

A. $2f_X(-2y)$. *B.* $f_X(-\frac{y}{2})$. *C.* $-\frac{1}{2}f_X(-\frac{y}{2})$. *D.* $\frac{1}{2}f_X(-\frac{y}{2})$

（13）设随机变量$X\sim B(3,0.2)$，且随机变量$Y=\frac{X(3-X)}{2}$，则$P\{Y=0\}$=(C) .

A. 0.512. *B.* 0.008. *C.* 0.52. *D.* 0.48.

（13）设随机变量X的概率密度为$f(x)=Ae^{-|x|}(-\infty<x<+\infty)$, 求（1）系数$A$;

（2）$P\{0\le X\le 1\}$；（3）分布函数$F(x)$.

解：(1) 由$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}Ae^{-|x|}dx=2A=1$，得$A=\frac{1}{2}$.

(2) $P\{0\le X\le 1\}=\frac{1}{2}\int_{0}^{1}e^{-x}dx=\frac{1}{2}(1-\frac{1}{e})$.

(3) $F(x)=P\{X\le x\}$

$$=\begin{cases}\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{x}e^{t}dt, & x<0\\ \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0}e^{t}dt+\frac{1}{2}\int_{0}^{x}e^{-t}dt, & x\ge 0\end{cases}=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{x}, & x<0\\ 1-\frac{1}{2}e^{x}, & x\ge 0\end{cases}$$

（12）已知 X 服从[0,1]上的均匀分布，则 Y =2X+1 的概率密度为

$$f_Y(y)=\begin{cases} 1/2 & 1<y<3 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$.

（12）设随机变量 $X\sim N(0,1), Y=2X+1$，则 Y 服从（ A ）

（A） $N(1,4)$. （B） $N(0,1)$. （C） $N(1,1)$. （D）. $N(1,2)$.

（12）下列函数中，哪个能是随机变量 X 的分布函数（ C ）

(A) $F(x)=\begin{cases} 0, & x<-2, \\ 1/2, & -2\le x<0, \\ 3/2, & x\ge 0; \end{cases}$ (B) $F(x)=\begin{cases} 0, & x<0, \\ \sin x, & 0\le x<\pi, \\ 1, & x\ge \pi; \end{cases}$

(C) $F(x)=\begin{cases} 0, & x<0, \\ \sin x, & 0\le x<\dfrac{\pi}{2}, \\ 1, & x\ge \dfrac{\pi}{2}; \end{cases}$ (D) $F(x)=\begin{cases} 0, & x<0, \\ x-1/3, & 0\le x<\dfrac{1}{2}, \\ 1, & x\ge \dfrac{1}{2}. \end{cases}$

（12）设连续型随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases} x & 0\le x<1, \\ 2-x & 1\le x<2, \\ 0 & \text{其他}, \end{cases}$（1）求随机变量 X 的分布函数；（2）求 $P\{0.5\le X\le 1.5\}$.

解 (1) 当 $x\le 0$ 时， $F(x)=0$； 当 $0\le x<1$ 时, $F(x)=\int_0^x t\,dt=\dfrac{1}{2}x^2$；

当 $1\le x<2$ 时， $F(x)=\int_0^1 t\,dt+\int_1^x (2-t)\,dt=2x-1-\dfrac{1}{2}x^2$.

当 $x\ge 2$ 时， $F(x)=1$.

所以 X 的分布函数为 $F(x)=\begin{cases} 0 & x\le 0, \\ \dfrac{1}{2}x^2 & 0\le x<1, \\ 2x-1-\dfrac{1}{2}x^2 & 1\le x<2, \\ 1 & x\ge 2, \end{cases}$

（2） $P\{0.5\le X\le 1.5\}=F(1.5)-F(0.5)$=0.65.

（11）若 X 服从正态分布 $N(2,\sigma^2)$，且 $P\{2<X<4\}=0.3$，则 $P\{X\le 0\}=$

$\underline{0.2\quad\quad}$.

（11）设连续型随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases} k\sqrt{x}, 0<x<1 \\ 0,\text{其他} \end{cases}$（1）求常数 k 的值；（2）写出随机变量 X 的分布函数.

解：（1）由 $\int_0^1 \mathrm{k}\sqrt{x}dx=1$，得 $k=\frac{3}{2}$.

(2) 当 $x\le 0$ 时， $F(x)=0$；

当 $0<0<1$ 时, $F(x)=\int_0^x \frac{3}{2}\sqrt{t}dt=x^{\frac{3}{2}}$；

当 $x\ge 1$ 时， $F(x)=1$.

（10）设随机变量 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，其概率密度为 $f(x)$，且 $P\{X\ge 1\}=\frac{1}{2}$， $f(1)=1$, 则（ B ）

(A) $\mu=1,\sigma^2=1$； (B) $\mu=1,\sigma^2=\frac{1}{2\pi}$；

(C) $\mu=1,\sigma^2=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$； (D) $\mu=0,\sigma^2=1$.

（10）设相互独立的随机变量 X_1 和 X_2 的分布函数分别为 $F_1(x)$ 和 $F_2(x)$，概率密度分别为 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$，则随机变量 $Y=\min(X_1,X_2)$ 的概率密度 $f(x)$ 等于（ D ）

(A) $f_1(x)f_2(x)$ ；

(B) $f_1(x)F_1(x)+f_2(x)F_2(x)$；

(C) $f_1(x)F_2(x)+f_2(x)F_1(x)$；

(D) $f_1(x)[1-F_2(x)]+f_2(x)[1-F_1(x)]$.

（10）任设连续型随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases} x, & 0\le x<1, \\ k(2-x), & 1\le x<2, \\ 0, & \text{其它}, \end{cases}$ 求

(1) 常数 k 的值；(2) 随机变量 X 的分布函数.

解： (1) 由 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1$，有 $\int_0^1 xdx+\int_1^2 k(2-x)dx=\frac{1}{2}+\frac{k}{2}=1$，所以 $k=1$.

(2) 当 $x<0$ 时， $F(x)=0$，

当$0\le x<1$时，$F(x)=\int_0^x f(t)dt=\int_0^x tdt=\frac{1}{2}x^2$，

当$1\le x<2$时，$F(x)=\int_0^x f(t)dt=\int_0^1 tdt+\int_1^x(2-t)dt=2x-\frac{1}{2}x^2-1$，

当$x>2$时，$F(x)=1$.

$$F(x)=\begin{cases}0, & \mathrm{x}<0,\\ \frac{1}{2}\mathrm{x}^2, & 0\le \mathrm{x}<1,\\ 2x-\frac{1}{2}x^2-1, & 1\le x<2,\\ 1, & \mathrm{x}\ge 2.\end{cases}$$

（09）设随机变量$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，则随着σ的增大，概率$P\{|X-\mu|<\sigma\}$（ D ）

（A）单调增大．（B）单调减小．（C）增减不定．（D）保持不变．

（09）取两个不大于 1 的正数，则它们的积不大于$\frac{2}{9}$，且它们的和不大于 1 的概率为__1/3+2/9ln2________.

（09）设随机变量X在区间[2，5]上服从均匀分布，对X做 3 次独立观察，求至少有两次观察值大于 3 的概率.

解：由已知X的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{3}, x\in[2,5],\\ 0, x\notin[2,5].\end{cases}$$

设$A_i(i=1,2,3)$表示第i次观察值大于 3 的事件，则有

$$p(A_i)=P\{X>3\}=\int_3^5\frac{1}{3}\mathrm{d}x=\frac{2}{3}, i=1,2,3.$$

设A表示至少有两次观察值大于 3 的事件，则有

$$P(A)=P(A_1A_2\overline{A_3})+P(A_1\overline{A_2}A_3)+P(\overline{A_1}A_2A_3)+P(A_1A_2A_3)$$

$$=3\left(\frac{2}{3}\right)^2\frac{1}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{20}{27}.$$

(09 分)已知随机变量X的概率密度为$f(x)=\begin{cases}ax+b, & 0<x<1,\\ 0, & 其他,\end{cases}$

且$P\left\{X>\frac{1}{2}\right\}=\frac{5}{8}$，求(1)常数$a,b$的值；(2)$P\left\{\frac{1}{4}<X\le\frac{1}{2}\right\}$.

解：(1)由 $1=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1(ax+b)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}a+b$，

再由 $\frac{5}{8}=P\{X>\frac{1}{2}\}=\int_{\frac{1}{2}}^1(ax+b)\mathrm{d}x=\frac{3}{8}a+\frac{1}{2}b,$

解得 $a=1,b=\frac{1}{2}$.

(2) $P\{\frac{1}{4}<X\le\frac{1}{2}\}=\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}}(x+\frac{1}{2})\mathrm{d}x=\frac{7}{32}$.

三、二维随机变量及其分布

（18）设随机变量X在区间$(0,1)$内服从均匀分布，在条件$X=x(0<x<1)$下，随机变量Y在区间$(0,x)$内服从均匀分布，则X和Y的联合概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{x}, & 0<y<x<1,\\ 0, & 其他,\end{cases}.$$

（18）设(X,Y)是二维随机变量，与$\mathrm{Cov}(X,Y)=0$不等价的是 (D).

(A) $E(XY)=E(X)E(Y)$　　(B) $D(X+Y)=D(X)+D(Y)$

(C) $D(X-Y)=D(X)+D(Y)$　　(D) X 和 Y 相互独立

1. （18）设二维随机变量(X,Y)的分布律为

X \ Y	1	2	3
1	$\frac{1}{8}$	a	$\frac{1}{24}$
2	b	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

且$P\{X=1\}=\frac{1}{2}$.（1）求常数a,b;（2）求(X,Y)关于X和关于Y的边缘分布律（只写出计算结果表格）;（3）判断X与Y是否相互独立？

解：（1）由已知可得

$$\begin{cases}\frac{1}{8}+a+\frac{1}{24}+b+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=1\\ \frac{1}{8}+a+\frac{1}{24}=\frac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=\frac{1}{3}\\ b=\frac{1}{8}\end{cases}$$

(2)

X	1	2
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Y	1	2	3
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{1}{6}$

（3）因$\mathrm{P}\{X=1,Y=2\}=\frac{1}{3}\neq\mathrm{P}\{X=1\}\mathrm{P}\{Y=2\}=\frac{7}{24}$，故$X$与$Y$不独立.

（18）设随机变量X和Y相互独立，概率密度分别为

$$f_X(x)=\begin{cases}1，0\le x\le 1，\\ 0，\quad 其他，\end{cases}\qquad f_Y(y)=\begin{cases}e^{-y}，\quad y>0，\\ 0，\quad 其他.\end{cases}$$

求随机变量$Z=2X+Y$的概率密度.

解：因X和Y相互独立，故(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)=\begin{cases}e^{-y}，\quad 0\le x\le 1，y>0，\\ 0，\quad 其他.\end{cases}$$

Z的分布函数为

$$F_Z(z)=P\{2X+Y\le z\}=\begin{cases}0, & z<0,\\ \int_0^{\frac{z}{2}}\mathrm{d}x\int_0^{z-2x}e^{-y}\mathrm{d}y， & 0\le z<2,\\ \int_0^{1}\mathrm{d}x\int_0^{z-2x}e^{-y}\mathrm{d}y， & z\ge 2,\end{cases}$$

$$=\begin{cases}0, & z<0,\\ \frac{1}{2}(z-1+e^{-z}), & 0\le z<2,\\ 1-\frac{1}{2}(e^2-1)e^{-z}, & z\ge 2,\end{cases}$$

$$f_Z(z)=\begin{cases}0, & z<0,\\ \frac{1}{2}(1-e^{-z}), & 0\le z<2,\\ \frac{1}{2}(e^2-1)e^{-z}, & z\ge 2.\end{cases}$$

（17）设二维随机变量$(X，Y)$在区域D上服从均匀分布，D由曲线$y=\frac{1}{x}, y=0, x=1, x=e^2$所围成，则$(X,Y)$关于$X$的边缘概率密度在$x=e$点的值为 1/2e ．

(17) 设两个相互独立的随机变量X与Y分别服从正态分布$N(0,1)$和$N(1,1)$，则（ B ）

（A）$P\{X+Y\le 0\}=\frac{1}{2}$　　（B）$P\{X+Y\le 1\}=\frac{1}{2}$

（C）$P\{X-Y\le 0\}=\frac{1}{2}$　　（D）$P\{X-Y\le 1\}=\frac{1}{2}$

(17) 已知随机变量X和Y的概率分布分别为

X	−1	0	1
p	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

Y	0	1
p	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

并且$P\{XY=0\}=1$.

（1）求二维随机变量(X,Y)的概率分布（只写出计算结果表格）;

（2）判别 X 和Y 是否相互独立。

解：（1）

Y \ X	-1	0	1	$P_{\cdot j}$
0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
1	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
$p_{i\cdot}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1

（2）由 X 和Y 的联合分布律和边缘分布律可知

$$p\{X=-1,\ Y=0\}=\frac{1}{4}，\ P\{X=-1\}\cdot P\{Y=0\}=\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$$

所以 X 和Y 不相互独立。

（16）设随机变量(X,Y)的概率密度 $f(x,y)=\begin{cases} Cx, & 0<x<1,\ 0<y<2, \\ 0, & 其他 \end{cases}$

(1) 求常数 C；(2) 求 $P\{X+Y>1\}$；(3) 求 X 与 Y 的边缘概率密度，并判断 X 与 Y 是否相互独立.

解 (1)由 $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=1$，有

$$C\int_0^1 dx\int_0^2 x\mathrm{d}y=C=1.$$

(2) $$P\{X+Y>1\}=1-\int_0^1 xdx\int_0^{1-x}dx=\frac{5}{6}$$

(3)因为

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y=\begin{cases} 2x, & 0<x<1, \\ 0, & 其他 \end{cases}$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x=\begin{cases} \frac{1}{2}, & 0<y<2, \\ 0, & 其他 \end{cases}$$

显然，对任意实数 x 和 y，都有 $f(x,y)=f_X(x)\cdot f_Y(y)$

所以 X 与 Y 相互独立.

（15）设平面区域G是由x轴，y轴以及直线$x+\frac{y}{2}=1$所围成的三角形域，二维随机变量

(X,Y)在G上服从均匀分布，则 $f_{X|Y}(x|y)=$（ A ）$(0<y<2)$

（A） $f_{X|Y}(x|y)=\begin{cases}\dfrac{2}{2-y}, & 0<x<1-\dfrac{y}{2},\\ 0, & 其它.\end{cases}$ （B） $f_{X|Y}(x|y)=\begin{cases}\dfrac{2}{1-y}, & 0<x<1-\dfrac{y}{2},\\ 0, & 其它.\end{cases}$

（C） $f_{X|Y}(x|y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2-y}, & 0<x<1-\dfrac{y}{2},\\ 0, & 其它.\end{cases}$ (D) $f_{X|Y}(x|y)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-y}, & 0<x<1-\dfrac{y}{2},\\ 0, & 其它.\end{cases}$

（15）设ξ,η是相互独立且服从同一分布的两个离散型随机变量，已知ξ的分布律为$P\{\xi=i\}=\dfrac{1}{3}, i=1,2,3,$ 又设 $X=\max(\xi,\eta), Y=\min(\xi,\eta)$，求$(X,Y)$的联合分布律和边缘分布律（只写出计算结果表格）。

解：

Y \ X	1	2	3	$P_{\cdot j}$
1	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{5}{9}$
2	0	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{3}{9}$
3	0	0	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$
$p_{i\cdot}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{3}{9}$	$\frac{5}{9}$	1

1.（15）设两个相互独立的随机变量X和Y都在区间$(0,1)$上服从均匀分布，求随机变量$Z=X+Y$的概率密度。

解：由已知二维随机变量的联合概率密度

$$f(x,y)=f_X(x)\cdot f_Y(y)=\begin{cases}1, & 0<x<1, 0<y<1,\\ 0, & 其它\end{cases}$$

边缘概率密度 $f_X(x)=\begin{cases}1, 0<x<1\\ 0, 其它\end{cases}$ $\quad f_Y(y)=\begin{cases}1, 0<y<1\\ 0, 其它\end{cases}$

根据卷积公式得

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(z-y)f_Y(y)dy=\int_0^1 f_X(z-y)dy$$

令$z-y=t$，得 $f_Z(z)=\int_{z-1}^{z}f_X(t)dt, \quad -\infty<z<+\infty$

当 $z<0$ 时， $f_Z(z)=0$

当 $0\le z<1$ 时， $f_Z(z)=\int_{z-1}^{z} f_X(t)dt=\int_{z-1}^{0} 0dt+\int_{0}^{z} 1dt=z$

当 $1\le z<2$ 时， $f_Z(z)=\int_{z-1}^{z} f_X(t)dt=\int_{z-1}^{1} 1dt+\int_{1}^{z} 0dt=2-z$

当 $z\ge 2$ 时， $f_Z(z)=\int_{z-1}^{z} f_X(t)dt=\int_{z-1}^{z} 0dt=0$

综上所述，随机变量 Z 的概率密度为

$$f_Z(z)=\begin{cases} z, & 0\le z<1 \\ 2-z, & 1\le z<2 \\ 0, & z<0\text{或}z\ge 2 \end{cases}.$$

（14）设随机变量 X 与 Y 相互独立，且均服从区间[0, 3]上的均匀分布，则 $P\left\{\max\{X,Y\}\le 1\right\}$=_____$\frac{1}{9}$_____.

（14）设随机变量 X 与 Y 相互独立，其概率分布分别为

X	0	1
P	0.4	0.6

Y	0	1
P	0.4	0.6

则有(　B　)

A. $P(X=Y)=0.$　*B.* $P(X=Y)=0.52.$　*C*. $P(X=Y)=0.5.$　*D.* $P(X=Y)=1.$

（14）设 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases} \frac{1}{6}e^{-(\frac{x}{2}+\frac{y}{3})}, x>0, y>0 \\ 0, \quad\quad \text{其它} \end{cases}$$

求（1）边缘概率密度 $f_X(x), f_Y(y)$；

（2）X 与 Y 是否相互独立?

（3）$Z=X+Y$ 的概率密度 $f_Z(z)$.

解：(1)

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy=\begin{cases} \int_0^{+\infty}\frac{1}{6}e^{-(\frac{x}{2}+\frac{y}{3})}dy=\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}, x>0 \\ 0, \quad\quad x\le 0 \end{cases}$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx=\begin{cases} \int_0^{+\infty}\frac{1}{6}e^{-(\frac{x}{2}+\frac{y}{3})}dx=\frac{1}{3}e^{-\frac{y}{3}}, y>0 \\ 0, \quad\quad y\le 0 \end{cases}$$

(2) $f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$, X 与 Y 相互独立

(3) *X* 与 *Y* 相互独立,由卷积公式

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(x)f_Y(z-x)dx$$

$$=\int_0^{+\infty}\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}f_Y(z-x)dx$$

$z\le 0$时，$f_Z(z)=0$,

当$z>0$时，令$z-x=t$,则$x=z-t$

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{z}\frac{1}{2}e^{-\frac{z-t}{2}}f_Y(t)dt=\int_0^z\frac{1}{2}e^{-\frac{z-t}{2}}\frac{1}{3}e^{-\frac{t}{3}}dt=e^{-\frac{z}{3}}-e^{-\frac{z}{2}}$$

$$f_Z(z)=\begin{cases}e^{-\frac{z}{3}}-e^{-\frac{z}{2}}, z>0\\ 0, \quad z\le 0\end{cases}$$

（13）设二维随机变量(X,Y)服从区域D上的均匀分布，其中D为x轴、y轴和直线$x+y=1$所围成的三角形区域，则$P\{X<Y\}=$ __1/2__ .

（13）二维随机变量(X,Y)的概率密度为$f(x,y)=\begin{cases}1/\pi & x^2+y^2<1,\\ 0 & 其他\end{cases}$

则随机变量X与Y为（ C ）.

A. 独立同分布. *B.* 独立不同分布. *C.* 不独立同分布. *D.* 不独立不同分布.

（13）已知(X,Y)概率密度为$f(x,y)=\begin{cases}4x, & 0<x<1, \quad 0<y<x^2,\\ 0, & 其他.\end{cases}$

（1）、求关于 X和 Y 的边缘概率密度;（2）判断 X与 Y是否相互独立;

（3）、求$P(X>\frac{1}{2},Y>\frac{1}{4})$.

解:（1）

$$f_X(x)=\begin{cases}4x^3, & 0<x<1\\ 0, & 其它\end{cases} \qquad f_Y(y)=\begin{cases}2(1-y), & 0<y<1\\ 0, & 其它\end{cases}$$

（2）显然 $f(x,y)\ne f_X(x)\cdot f_Y(y)$, 所以 X 与 Y 不相互独立;

（3） $P(X>\frac{1}{2})=\int_{\frac{1}{2}}^{1}4x^3dx=\frac{15}{16}$

$$P(X>\frac{1}{2},\ Y>\frac{1}{4})=\int_{\frac{1}{2}}^{1}dx\int_{\frac{1}{4}}^{x^2}4xdy=\frac{9}{16}$$

（12）

设二维随机变量(X,Y)的分布律为（右图）

X \ Y	0	1
0	0.4	a
1	b	0.1

且两个随机事件$\{X=0\}$与$\{X+Y=1\}$相互独立，则（ B ）

(A) $a=0.2,b=0.3$；(B) $a=0.4,b=0.1$； (C) $a=0.3,b=0.2$；(D) $a=0.1,b=0.4$.

（12）已知二维随机变量(X,Y)的概率密度为$f(x,y)=\begin{cases} ke^{-(2x+y)} & ,x>0,y>0 \\ 0 & ,\ \text{其它} \end{cases}$

求：（1）系数k；

（2）(X,Y)关于X和关于Y的边缘概率密度；

（3）判断X和Y是否相互独立？

解：（1）$1=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dxdy=\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}ke^{-(2x+y)}dxdy$

$$=k\int_0^{+\infty}e^{-2x}dx\int_0^{+\infty}e^{-y}dy=k\left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right)\Big|_0^{+\infty}\left(-e^{-y}\right)\Big|_0^{+\infty}$$

$$=\frac{1}{2}k,\text{故}k=2$$

（2）$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\begin{cases} 0, & x\le 0 \\ 2\int_0^{+\infty}e^{-(2x+y)}dy, & x>0 \end{cases}=\begin{cases} 0 & ,x\le 0 \\ 2e^{-2x} & ,x>0 \end{cases}$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\begin{cases} 0 & ,y\le 0 \\ 2\int_0^{+\infty}e^{-(2x+y)}dx & ,y>0 \end{cases}=\begin{cases} 0 & ,y\le 0 \\ e^{-y} & ,y>0 \end{cases}$$

（3）由于对任意x,y有：$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$故X与Y相互独立

（12）设二维随机变量服从二维正态分布，$(X,Y)\sim N(0,1,1,2,0)$，求$Z=X-Y$的概率密度$f_Z(z)$.

解：由于$(X,Y)\sim N(0,1,1,2,0)$，则$E(X)=0,E(Y)=1$，$D(X)=1,D(Y)=2$，$\rho=0$.

则X与Y相互独立，$E(Z)=E(X-Y)=-1$，$D(X+Y)=D(X)+D(Y)=3$

$X-Y\sim N(-1,3)$，$f_Z(z)=\frac{1}{\sqrt{6\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{(z+1)^2}{6}},-\infty<z<+\infty$

（11）已知二维随机变量(X,Y)的概率分布为

X \ Y	1	2	3

0	$\frac{3}{16}$	$\frac{3}{8}$	a
1	b	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$

如果 X 与 Y 相互独立，则（　C　）

(A) $a=\frac{1}{16},b=\frac{3}{16}$；　(B) $a=\frac{1}{4},b=0$；　(C) $a=\frac{3}{16},b=\frac{1}{16}$；　(D) $a=0,b=\frac{1}{4}$.

（11）设随机变量 X 和 Y 相互独立，且都服从标准正态分布 $N(0,1)$，求 $Z=(X+Y)^2$ 的概率密度 $f_Z(z)$.

解：设 $T=X+Y$，则 $Z=T^2$，$T\sim N(0,2)$，

概率密度为 $f(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2}}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{4}},-\infty<t<+\infty$

Z 的分布函数 $F_Z(z)=P\{Z\le z\}=P\{T^2\le z\}$

当 $z<0$ 时，$F_Z(z)=0$

当 $z\ge 0$ 时，$F_Z(z)=P\{Z\le z\}=\int_{-\sqrt{z}}^{\sqrt{z}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2}}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{4}}\,\mathrm{d}t$

$$f_Z(z)=F_Z'(z)=\begin{cases}\frac{1}{2\sqrt{\pi z}}\mathrm{e}^{-\frac{z}{4}},z>0\\ 0,\text{其它}.\end{cases}$$

（11）设随机变量 (X,Y) 的联合概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases}6xy^2,0<x<1,0<y<1,\\ 0,\quad\text{其　它}.\end{cases}$

（1）求关于 X 和 Y 的边缘概率密度 $f_X(x)$ 和 $f_Y(y)$；（2）判断 X 与 Y 是否相互独立；（3）求 $P\{X\ge Y\}$.

解：

（1）关于 X 的边缘概率密度为

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,\mathrm{d}y=\begin{cases}\int_0^1 6xy^2\,\mathrm{d}y=2x,\quad 0<x<1\\ 0\qquad\qquad\text{其他}.\end{cases}$$

关于 Y 的边缘概率密度 $f_Y(y)$

$$f_Y(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,\mathrm{d}x=\begin{cases}\int_0^1 6xy^2\,\mathrm{d}x=3y^2,\quad 0<y<1\\ 0,\qquad\qquad\text{其他}.\end{cases}$$

（2）由于 $f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$，所以 X 与 Y 相互独立

（3）$P\left\{X\geq Y\right\}=6\int_0^1 x\,\mathrm{d}\,x\int_0^x y^2\,\mathrm{d}\,y=\dfrac{2}{5}$

（10）设随机变量 U 在区间 $[-2,2]$ 上服从均匀分布，令 $X=\begin{cases}-1 & 若 U\leq -1,\\ 1 & 若 U>-1,\end{cases}$

$Y=\begin{cases}-1 & 若 U\leq 1,\\ 1 & 若 U>1,\end{cases}$ 求 $\left(X,Y\right)$ 的概率分布.

解：（1）$\left(X,Y\right)$ 可能取的值为（-1，-1），（-1，1），（1，-1），（1，1）

$P\left\{X=-1,Y=-1\right\}=P\left\{U\leq -1,U\leq 1\right\}=\dfrac{1}{4}$；

$P\left\{X=-1,Y=1\right\}=P\left\{U\leq -1,U>1\right\}=0$；

$P\left\{X=1,Y=-1\right\}=P\left\{U>-1,U\leq 1\right\}=\dfrac{1}{2}$；

$P\left\{X=1,Y=1\right\}=P\left\{U>-1,U>1\right\}=\dfrac{1}{4}$.

$\left(X,Y\right)$ 的概率分布为

$Y\backslash X$	-1	1
-1	$1/4$	$1/2$
1	0	$1/4$

3. 设二维随机变量 (X,Y) 的联合概率密度为

$f(x,y)=\begin{cases}A\mathrm{e}^{-(2x+3y)}, & x>0,y>0,\\ 0, & 其他\end{cases}$，

（1）求常数 A；（2）求边缘概率密度 $f_X(x),f_Y(y)$；（3）判断 X 与 Y 是否相互独立.

解 （1）由 $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y=1\Rightarrow A=6$；

（2）$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,\mathrm{d}\,y=\begin{cases}2\mathrm{e}^{-2x}, x>0,\\ 0, x\leq 0.\end{cases}$

$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,\mathrm{d}\,x=\begin{cases}3\mathrm{e}^{-3x}, & x>0,\\ 0, & x\leq 0.\end{cases}$

（3） $f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$，相互独立；

（10）设两个相互独立的随机变量 X 和 Y 都在区间 $[0,\ 1]$ 上服从均匀分布，求随机变量 $Z=X+Y$ 概率密度 $f_Z(z)$.

解法 1　由卷积公式 $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)f_Y(z-x)\,\mathrm{d}x$ ，

为确定积分限, 先找出使被积函数不为 0 的区域 $\begin{cases} 0\le x\le 1 \\ 0\le z-x\le 1 \end{cases}$

当 $0\le z<1$ 时， $f_Z(z)=\int_0^z \mathrm{d}x=z$；

当 $1\le z<2$ 时， $f_Z(z)=\int_{z-1}^1 \mathrm{d}x=2-z$；

当 $z<0,\ z\ge 2$ 时， $f_Z(z)=0$，

$$f_Z(z)=\begin{cases} z, & 0\le z<1, \\ 2-z, & 1\le z<2, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

解法 2

$$f(x,y)=\begin{cases} 1 & 0<x<1, 0<y<1, \\ 0 & \text{其他}, \end{cases}$$

当 $z<0$ 时，$F_Z(z)=0$；

当 $0\le z<1$ 时，$F_Z(z)=\dfrac{z^2}{2}$；

当 $1\le z<2$ 时，$F_Z(z)=1-\dfrac{1}{2}(2-z)^2=2z-1-\dfrac{1}{2}z^2$；

当 $z\ge 2$ 时，$F_Z(z)=1$，

所以，$$F_Z(z)=\begin{cases} 0, & z<0, \\ \dfrac{1}{2}z^2, & 0\le z<1, \\ 2z-1-\dfrac{1}{2}z^2, & 1\le z<2, \\ 1, & z\ge 2. \end{cases}$$

$$f_Z(z)=F_Z'(z)=\begin{cases} z, & 0<z<1, \\ 2-z, & 1<z<2, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

（09）设二维随机变量(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi}\mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2}},-\infty<x<+\infty,-\infty<y<+\infty$$

则 $P\{X>Y\}=$ <u>0.5</u>.

（09）设二维随机变量(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases} \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\left(\frac{1}{2}x+y\right)}, & x>0,y>0, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

（1）证明 X 与 Y 相互独立；（2）利用卷积公式求 $Z=X+Y$ 的概率密度.

解：（1）由 $f(x,y)$ 可得随机变量 X,Y 边缘的概率密度为

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=\begin{cases} \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}, x>0, \\ 0, \quad x\le 0. \end{cases}$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x=\begin{cases} \mathrm{e}^{-y}, y>0, \\ 0, \quad y\le 0. \end{cases}$$

从而有 $f(x,y)=f_x(x)f_y(y)$,因此 X 与 Y 相互独立,

（2）由卷积公式

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(x)f_Y(z-x)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}f_Y(z-x)\mathrm{d}x$$

$$\underline{\underline{令t=z-x}}\quad -\frac{1}{2}\int_z^{+\infty}\mathrm{e}^{\frac{t-z}{2}}f_Y(t)\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{z}\mathrm{e}^{t-z}f_Y(t)\mathrm{d}t$$

$$=\begin{cases} \frac{1}{2}\int_0^z \mathrm{e}^{\frac{t-z}{2}}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t, & z>0 \\ 0, & z\le 0 \end{cases}$$

$$=\begin{cases} \mathrm{e}^{-\frac{z}{2}}(1-\mathrm{e}^{-\frac{z}{2}}), & z>0, \\ 0, & z\le 0. \end{cases}$$

四、随机变量的数字特征

（18）设(X,Y)是二维随机变量，与$\mathrm{Cov}(X,Y)=0$不等价的是（ D ）.

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：https://d.book118.com/445012213331011131