指数函数与对数函数 9 大压轴考法

题型 1　指数幂的运算、求值

一、单选题

1．（24-25 高一上·江苏南京·期中）已知 $a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}}=\sqrt{5}$，则 $a^2-a^{-2}=$（　）

A．$3\sqrt{5}$　　B．$\pm3\sqrt{5}$　　C．$21\sqrt{5}$　　D．$\pm21\sqrt{5}$

【答案】C

【分析】利用完全平方公式，平方差公式结合指数运算可得.

【详解】由 $a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}}=\sqrt{5}$ 得 $\left(a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}}\right)^2=a-2+a^{-1}=5$，即 $a+a^{-1}=7$，

故 $a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}=\sqrt{\left(a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}\right)^2}=\sqrt{a+2+a^{-1}}=\sqrt{9}=3$，

故 $a-a^{-1}=\left(a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}\right)\left(a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}}\right)=3\sqrt{5}$

故 $a^2-a^{-2}=\left(a+a^{-1}\right)\left(a-a^{-1}\right)=21\sqrt{5}$.

故选：C

2．（23-24 高二下·浙江·期末）常用放射性物质质量衰减一半所用的时间来描述其衰减情况，这个时间被称做半衰期，记为 T（单位：天）．铅制容器中有甲、乙两种放射性物质，其半衰期分别为 T_1,T_2．开始记录时，这两种物质的质量相等，512 天后测量发现乙的质量为甲的质量的 $\frac{1}{8}$，则 T_1,T_2 满足的关系式为（　）

A．$3+\frac{512}{T_1}=\frac{512}{T_2}$　　B．$2+\frac{512}{T_1}=\frac{512}{T_2}$

C．$-2+\log_2\frac{512}{T_1}=\log_2\frac{512}{T_2}$　　D．$2+\log_2\frac{512}{T_1}=\log_2\frac{512}{T_2}$

【答案】A

【分析】设开始记录时，甲乙两种物质的质量均为 1，可得 512 天后甲，乙的质量，根据题意列出等式即可得答案.

【详解】设开始记录时，甲乙两种物质的质量均为 1，

则 512 天后甲的质量为：$(\frac{1}{2})^{\frac{512}{T_1}}$，

乙的质量为：$(\frac{1}{2})^{\frac{512}{T_2}}$，

由题意可知，$(\frac{1}{2})^{\frac{512}{T_2}}=\frac{1}{8}\cdot(\frac{1}{2})^{\frac{512}{T_1}}=(\frac{1}{2})^{\frac{512}{T_1}+3}$，

所以$\frac{512}{T_2}=\frac{512}{T_1}+3$.

故选：A.

二、多选题

3．（24-25高一上·陕西榆林·期中）已知正数a，b满足$a^2+b^2=2$，则（　）

A．$ab\le 1$　　B．$a+b\le 2$　　C．$4^{\sqrt{a}}\cdot 4^{\sqrt{b}}\le 4$　　D．$2^{\frac{1}{a}}+2^{\frac{1}{b}}\ge 4$

【答案】ABD

【分析】利用基本不等式判断A、B；应用基本不等式及指数幂的运算性质判断C、D.

【详解】A，因为$a^2+b^2=2$，$a^2+b^2\ge 2ab$，当且仅当$a=b=1$时等号成立，

所以$2\ge 2ab$，即$ab\le 1$，正确；

B，$(a+b)^2=a^2+b^2+2ab=2+2ab\le 4$，当且仅当$a=b=1$时等号成立，

因为$a>0$，$b>0$，所以$a+b\le 2$，正确；

C，$\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2=a+b+2\sqrt{ab}\le 2+2=4$，当且仅当$a=b=1$时等号成立，

所以$\sqrt{a}+\sqrt{b}\le 2$，所以$4^{\sqrt{a}}\cdot 4^{\sqrt{b}}=4^{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\le 16$，错误；

D，$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\ge 2\sqrt{\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{b}}\ge 2$，当且仅当$a=b=1$时等号成立，

所以$2^{\frac{1}{a}}+2^{\frac{1}{b}}\ge 2\sqrt{2^{\frac{1}{a}}\cdot 2^{\frac{1}{b}}}=2\sqrt{2^{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}}\ge 2\sqrt{2^2}=4$，正确.

故选：ABD

三、填空题

4．（24-25高一上·全国·课后作业）若$\sqrt{x^2+2x+1}+\sqrt{y^2+6y+9}=0$，则$\left(x^{2023}\right)^y=$_______.

【答案】-1

【分析】根据算术平方根可解得$x=-1$，$y=-3$，代入即可求解.

【详解】因为$\sqrt{x^2+2x+1}+\sqrt{y^2+6y+9}=0$，

所以$\sqrt{(x+1)^2}+\sqrt{(y+3)^2}=0$，

所以$|x+1|+|y+3|=0$

所以$x=-1$，$y=-3$，

所以$(x^{2023})^y=[(-1)^{2023}]^{-3}=(-1)^{-3}=-1$.

故答案为：-1.

5．（25-26高一上·上海·单元测试）若$a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}=4$，$x=a+3a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}}$，$y=b+3a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{3}}$，则$(x+y)^{\frac{2}{3}}+(x-y)^{\frac{2}{3}}=$______.

【答案】8

【分析】由指数运算法则可得证.

【详解】$\because x+y=a+3a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}}+b+3a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{3}}=\left(a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}\right)^3$，

$\therefore (x+y)^{\frac{2}{3}}=\left(a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}\right)^2=a^{\frac{2}{3}}+2a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}$，

$(x-y)^{\frac{2}{3}}=\left(a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}}\right)^2=a^{\frac{2}{3}}-2a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}$，

所以，原式$=2\left(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right)=2\times4=8$，

故答案为：8

题型 2　指数不等式问题

一、单选题

1．（23-24 高一上·四川成都·期中）函数 $f(x)=\dfrac{\sqrt{2^x-4}}{x-5}$ 的定义域为（　）

A．$(-\infty,2]$　　B．$(-\infty,5)\cup(5,+\infty)$

C．$[2,+\infty)$　　D．$[2,5)\cup(5,+\infty)$

【答案】D

【分析】函数 $f(x)=\dfrac{\sqrt{2^x-4}}{x-5}$ 的定义域满足 $\begin{cases}2^x-4\ge0\\x-5\ne0\end{cases}$，解得答案.

【详解】函数 $f(x)=\dfrac{\sqrt{2^x-4}}{x-5}$ 的定义域满足 $\begin{cases}2^x-4\ge0\\x-5\ne0\end{cases}$，解得 $x\ge2$ 且 $x\ne5$.

故答案为：D

2．（23-24 高二下·浙江·期中）已知 $f(x)=2^x-2^{-x}$，则使 $f(x)<f(-3x^2+4)$ 成立的实数 x 的取值范围是（　）

A．$\left(-\dfrac{4}{3},1\right)$　　B．$\left(-1,\dfrac{4}{3}\right)$　　C．$(-\infty,1)\cup\left(\dfrac{4}{3},+\infty\right)$　D．$\left(-\infty,-\dfrac{4}{3}\right)\cup(1,+\infty)$

【答案】A

【分析】先判断函数的单调性，再根据函数的单调性得出不等式，最后解一元二次不等式求解.

【详解】因为 $f(x)=2^x-2^{-x}=2^x-\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$,所以f(x)是单调递增函数,

又因为 $f(x)<f(-3x^2+4)$，所以 $x<-3x^2+4, 3x^2+x-4<0$，

所以$(3x+4)(x-1)<0$，

所以 x 的取值范围为$\left(-\frac{4}{3},1\right)$.

故选：A.

3.（24-25 高三上·江苏徐州·开学考试）已知函数$f(x)=e^{-|x|}$，则使得$f(2a)<f(a+1)$成立的正实数a的取值范围是（　）

A．$\left(\frac{1}{3},+\infty\right)$　　B．$\left[\frac{1}{3},+\infty\right)$　　C．$(1,+\infty)$　　D．$(0,1)$

【答案】C

【分析】分析函数的奇偶性，单调性，利用函数$f(x)=e^{-|x|}$的单调性求解不等式即可.

【详解】由题意可知$f(x)$的定义域为$\mathbf{R}$，且$f(-x)=e^{-|-x|}=e^{-|x|}=f(x)$，

所以$f(x)$为偶函数.

当$x>0$时，$f(x)=\frac{1}{e^x}$，可知函数$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递减，且$f(x)>0$.

对于不等式$f(2a)<f(a+1)$成立，则$|2a|>|a+1|$，解得$a<-\frac{1}{3}$或$a>1$，

又因为$a>0$，所以$a>1$，即正实数a的取值范围是$(1,+\infty)$.

故选：C.

二、解答题

4.（24-25 高三上·陕西渭南·阶段练习）已知函数$f(x)$满足$f(2x)=a^{2x-4x^2}$，其中$a>0$且$a\neq1$.

(1)求$f(x)$的解析式；

(2)若$a=2$，求函数$y=\sqrt{f(x)-\frac{1}{4}}$的定义域；

(3)讨论$f(x)$的值域.

【答案】(1)$f(x)=a^{x-x^2}$，其中$a>0$且$a\neq1$

(2)$[-1,2]$

(3)见解析

【分析】（1）利用换元法即可求解，

（2）根据指数函数的单调性即可求解不等式得解，

（3）对a分类讨论，即可结合二次函数以及指数函数的性质求解.

【详解】（1）$f(2x)=a^{2x-4x^2}=a^{2x-(2x)^2}$，令$t=2x$，则$f(t)=a^{t-t^2}$，

故 $f(x)=a^{x-x^2}$，其中 $a>0$ 且 $a\neq 1$

（2）当 $a=2$ 时，$f(x)=2^{x-x^2}$，则 $y=\sqrt{f(x)-\frac{1}{4}}=\sqrt{2^{x-x^2}-\frac{1}{4}}$，

故 $2^{x-x^2}-\frac{1}{4}\geq 0$，则 $x-x^2\geq -2$，解得 $x-x^2\geq -2$,解得 $-1\leq x\leq 2$，

故 $y=\sqrt{f(x)-\frac{1}{4}}$ 的定义域为 $[-1,2]$

（3）由于 $y=x-x^2=-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\leq\frac{1}{4}$，故

当 $a>1$ 时 $f(x)=a^{x-x^2}\leq a^{\frac{1}{4}}$，故值域为 $\left(0,a^{\frac{1}{4}}\right]$，

当 $0<a<1$ 时 $f(x)=a^{x-x^2}\geq a^{\frac{1}{4}}$，故值域为 $\left[a^{\frac{1}{4}},+\infty\right)$

5．（22-23 高一上·河南新乡·阶段练习）已知函数 $f(x)=a^{2x}-3a^x+2(a>0$ 且 $a\neq 1)$ 的图象经过点 $(1,0)$.

(1)设函数 $g(x)=\sqrt{f(x)}$，求 $g(x)$ 的定义域;

(2)若对任意 $x\in\mathrm{R},2m^2-\frac{3}{2}m<f(x)2^x\left(2^x-1\right)$ 恒成立，求 m 的取值范围.

【答案】(1) $(-\infty,0]\cup[1,+\infty)$

(2) $\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)$

【分析】（1）根据题意求得 $a=2$，令 $f(x)\geq 0$，得到 $2^{2x}-3\cdot 2^x+2\geq 0$，进而求得函数 $g(x)$ 的定义域;

（2）化简 $h(x)=\left(2^{2x}-2^{x+1}+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$，结合二次函数的性质，求得 $h(x)_{\min}=-\frac{1}{4}$，把对任意

$x\in\mathrm{R},2m^2-\frac{3}{2}m<f(x)\cdot 2^x\left(2^x-1\right)$ 恒成立，转化为 $2m^2-\frac{3}{2}m<-\frac{1}{4}$，即可求解.

【详解】（1）解：函数 $f(x)=a^{2x}-3a^x+2(a>0$ 且 $a\neq 1)$ 的图象经过点 $(1,0)$，

可得 $f(1)=a^2-3a+2=0$，解得 $a=2$ 或 $a=1$（舍去），即 $f(x)=2^{2x}-3\cdot 2^x+2$

令 $f(x)\geq 0$，即 $2^{2x}-3\cdot 2^x+2\geq 0$，可得 $2^x\leq 1$ 或 $2^x\geq 2$，解得 $x\leq 0$ 或 $x\geq 1$，

所以函数 $g(x)$ 的定义域为 $(-\infty,0]\cup[1,+\infty)$.

（2）解：令 $h(x)=f(x)2^x\left(2^x-1\right)=2^x\left(2^x-1\right)^2\left(2^x-2\right)$，

则 $h(x)=\left(2^{2x}-2^{x+1}\right)\left(2^{2x}-2^{x+1}+1\right)=\left(2^{2x}-2^{x+1}+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$，

因为 $y=2^{2x}-2^{x+1}+\frac{1}{2}=\left(2^x-1\right)^2-\frac{1}{2}\in\left[-\frac{1}{2},+\infty\right)$，所以 $h(x)_{\min}=-\frac{1}{4}$，

又因为对任意 $x\in \mathrm{R}, 2m^2-\frac{3}{2}m<f(x)\cdot 2^x(2^x-1)$ 恒成立，

所以 $2m^2-\frac{3}{2}m<-\frac{1}{4}$，解得 $\frac{1}{4}<m<\frac{1}{2}$，所以 m 的取值范围为 $\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)$.

题型 3 对数及其运算、求值

一、单选题

1．（23-24 高三上·陕西榆林·阶段练习）已知 $a=\log_3 5$， $b=\log_2 3$， 则 $\lg 3=$（　）

A．$\frac{b}{ab+1}$　　B．$\frac{a}{ab+1}$　　C．$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$　　D．$\frac{ab}{a+b}$

【答案】A

【分析】$b=\log_2 3$，得 $\frac{1}{b}=\log_3 2$，再根据换底公式及对数的运算性质即可得解.

【详解】由 $b=\log_2 3$，得 $\frac{1}{b}=\log_3 2$，

则 $\lg 3=\frac{1}{\log_3 10}=\frac{1}{\log_3 5+\log_3 2}=\frac{1}{a+\frac{1}{b}}=\frac{b}{ab+1}$.

故选：A.

2．（24-25 高一上·上海·随堂练习）设方程 $(\lg x)^2-\lg x^2-3=0$ 的两实根是 a 和 b，则 $\log_a b+\log_b a$ 等于（　）.

A．1　　B．-2

C．$-\frac{10}{3}$　　D．-4

【答案】C

【分析】解方程得出 $\lg a=3$， $\lg b=-1$，再由换底公式计算即可.

【详解】方程 $(\lg x)^2-\lg x^2-3=0$ 可化为 $(\lg x)^2-2\lg x-3=0$，即 $(\lg x-3)(\lg x+1)=0$，

解得 $\lg x=3$ 或 $\lg x=-1$，不妨设 $\lg a=3$， $\lg b=-1$

$\log_a b+\log_b a=\frac{\lg b}{\lg a}+\frac{\lg a}{\lg b}=\frac{-1}{3}+\frac{3}{-1}=-\frac{10}{3}$.

故选：C

3．（2024·陕西西安·模拟预测）设 a，b，c 都是正数，且 $4^a=6^b=9^c=t$，那么（　）.

A．$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{c}$　　B．$\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a}$　　C．$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{2}{c}$　　D．$\frac{1}{a}+\frac{1}{c}=\frac{2}{b}$

【答案】D

【分析】将指数式化为对数式，根据对数换底公式、对数运算法则逐项验证即可.

【详解】依题意设 $4^{a}=6^{b}=9^{c}=t$，则 $a=\log_{4}t$， $b=\log_{6}t$， $c=\log_{9}t$，

所以 $\frac{1}{a}=\frac{1}{\log_{4}t}=\log_{t}4,\frac{1}{b}=\frac{1}{\log_{6}t}=\log_{t}6,\frac{1}{c}=\frac{1}{\log_{9}t}=\log_{t}9$，

则 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\log_{t}4+\log_{t}6=\log_{t}24\neq\frac{1}{c}=\log_{t}9$， $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\log_{t}24\neq\frac{2}{c}=2\log_{t}9=\log_{t}81$ 故 A，C 错误；

则 $\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\log_{t}6+\log_{t}9=\log_{t}54\neq\frac{1}{a}=\log_{t}4$， 故 B 错误；

则 $\frac{1}{a}+\frac{1}{c}=\log_{t}4+\log_{t}9=\log_{t}36=2\log_{t}6=\frac{2}{b}$， 故 D 正确.

故选：D.

4.（23-24 高二下·北京昌平·期末）把液体 A 放在冷空气中冷却，如果液体 A 原来的温度是 θ_{1}°C，空气的温度是 θ_{0}°C，则 t min 后液体 A 的温度 θ°C 可由公式 $\theta=\theta_{0}+\left(\theta_{1}-\theta_{0}\right)\mathrm{e}^{-0.3t}$ 求得．把温度是 62°C 的液体 A 放在 15°C 的空气中冷却，液体 A 的温度冷却到 51°C 和 27°C 所用时间分别为 t_{1} min， t_{2} min，则 $t_{2}-t_{1}$ 的值约为（　）

（参考数据 $\ln 3\approx1.10$）

A．2.7　　B．3.7　　C．4.7　　D．5.7

【答案】B

【分析】根据题目给的温度公式，代入计算即可.

【详解】由已知 $51=15+\left(62-15\right)\mathrm{e}^{-0.3t_{1}}$， $27=15+\left(62-15\right)\mathrm{e}^{-0.3t_{2}}$，

所以 $t_{1}=-\frac{10}{3}\ln\frac{36}{47}$， $t_{2}=-\frac{10}{3}\ln\frac{12}{47}$，

所以 $t_{2}-t_{1}=-\frac{10}{3}\ln\frac{12}{47}+\frac{10}{3}\ln\frac{36}{47}=\frac{10}{3}\ln 3\approx3.7$.

故选：B.

5.（24-25 高一上·上海·期中）农业农村部于 2021 年 2 月 3 日发布信息：全国按照主动预防、内外结合、分类施策、有效处置的总体要求，全面排查蝗灾隐患.为了做好蝗虫防控工作，完善应急预案演练，专家假设蝗虫的日增长率为 6%，最初有 N_{0} 只，则大约经过（　）天能达到最初的 1800 倍.

A．129　　B．150　　C．197　　D．199

【答案】A

【分析】设经过 n 天后蝗虫数量达到原来的 1800 倍，列出方程，结合对数的运算性质即可求解.

【详解】由题意可知，蝗虫最初有 N_{0} 只且日增长率为 6%，

设经过 n 天后蝗虫数量达到原来的 1800 倍，

则 $\frac{N_{0}\left(1+6\%\right)^{n}}{N_{0}}=1800$，

$\therefore 1.06^n=1800$， $\therefore n=\log_{1.06}1800=\dfrac{\ln 1800}{\ln 1.06}\approx 128.6$，

$\because n\in \mathrm{N}^*$， $\therefore$ 大约经过129天能达到最初的1800倍.

故选：A

6．（23-24 高一上·浙江杭州·期中）已知 $m=4^{\log_6 m}-9^{\log_6 m}$， $n=9^{\log_4 n}+6^{\log_4 n}$，则 $\dfrac{m}{n}$ 的值为（　）

A． $\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$　　B． $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$

C． $\dfrac{-\sqrt{5}+1}{2}$　　D． $\dfrac{-\sqrt{5}-1}{2}$

【答案】B

【分析】令 $\log_6 m=p$， $\log_4 n=q$，根据指数和对数的运算性质可得 $\left(\dfrac{2}{3}\right)^p$ 和 $\left(\dfrac{2}{3}\right)^q$ 是方程 $x^2-x-1=0$ 的根，又由 $\left(\dfrac{2}{3}\right)^p$ 和 $\left(\dfrac{2}{3}\right)^q$ 均大于 0 可得 $p=q$，即可求解 $\dfrac{m}{n}$ 的值.

【详解】令 $\log_6 m=p$，则 $m=6^p$，

所以由 $m=4^{\log_6 m}-9^{\log_6 m}$ 得 $6^p=4^p-9^p$，等号两边同除 6^p 得 $1=\left(\dfrac{2}{3}\right)^p-\left(\dfrac{3}{2}\right)^p=\left(\dfrac{2}{3}\right)^p-\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-p}$，

整理得 $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{2p}-\left(\dfrac{2}{3}\right)^p-1=0$，

令 $\log_4 n=q$，则 $n=4^q$，

所以由 $n=9^{\log_4 n}+6^{\log_4 n}$ 得 $4^q=9^q+6^q$，等号两边同除 6^q 得 $\left(\dfrac{2}{3}\right)^q=\left(\dfrac{3}{2}\right)^q+1=\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-q}+1$，

整理得 $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{2q}-\left(\dfrac{2}{3}\right)^q-1=0$，

所以 $\left(\dfrac{2}{3}\right)^p$ 和 $\left(\dfrac{2}{3}\right)^q$ 是方程 $x^2-x-1=0$ 的根，

由 $x^2-x-1=0$ 解得 $x=\dfrac{1\pm\sqrt{(-1)^2-4\times 1\times(-1)}}{2}=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$，

又因为 $\left(\dfrac{2}{3}\right)^p$， $\left(\dfrac{2}{3}\right)^q$ 均大于 0，且函数 $y=\left(\dfrac{2}{3}\right)^x$ 单调递减，所以 $\left(\dfrac{2}{3}\right)^p=\left(\dfrac{2}{3}\right)^q=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$， $p=q$，

所以 $\dfrac{m}{n}=\dfrac{6^p}{4^q}=\left(\dfrac{3}{2}\right)^p=\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-p}=\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{-1}=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$，

故选：B

题型 4　对数不等式问题

一、单选题

1．（24-25 高三上·湖南·阶段练习）已知$\log_{2a}\left(4a^2+1\right)<\log_{2a}4a<0$，则（　）

A．$0<a<\frac{1}{4}$　　B．$\frac{1}{4}<a<\frac{1}{2}$

C．$\frac{1}{2}<a<\frac{\sqrt{3}}{2}$　　D．$\frac{\sqrt{3}}{2}<a<1$

【答案】B

【分析】根据对数的定义域及单调性得出参数范围即可.

【详解】因为对数的定义域，得$0<2a<1$或$2a>1$，

又因为$4a^2+1-4a=\left(2a-1\right)^2>0$,所以$4a^2+1>4a$，

因为$\log_{2a}\left(4a^2+1\right)<\log_{2a}4a<0$，所以可得$0<2a<1$，

因为$\log_{2a}4a<0=\log_{2a}1$，可得$4a>1$，

所以$\frac{1}{4}<a<\frac{1}{2}$.

故选：B.

2．（2023·贵州黔东南·模拟预测）已知函数$f\left(x\right)=-x+\lg\frac{2-x}{2+x}$，且$f\left(m\right)+f\left(2m-1\right)>0$，则实数$m$的取值范围是（　）

A．$\left(-\infty,\frac{1}{3}\right)$　　B．$\left(\frac{1}{3},+\infty\right)$

C．$\left(\frac{1}{3},\frac{3}{2}\right)$　　D．$\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right)$

【答案】D

【分析】首先求出函数的定义域，即可判断函数的奇偶性与单调性，根据奇偶性与单调性将函数不等式转化为自变量的不等式，解得即可.

【详解】函数$f\left(x\right)=-x+\lg\frac{2-x}{2+x}$，则$\frac{2-x}{2+x}>0$，即$\left(x-2\right)\left(x+2\right)<0$，解得$-2<x<2$，

所以$f\left(x\right)$的定义域为$\left(-2,2\right)$，且$f\left(-x\right)=x+\lg\frac{2+x}{2-x}=-\left(-x+\lg\frac{2-x}{2+x}\right)=-f\left(x\right)$，

所以$f\left(x\right)$为奇函数，

又函数$y=\frac{2-x}{2+x}=\frac{-\left(x+2\right)+4}{2+x}=-1+\frac{4}{x+2}$在$\left(-2,2\right)$上单调递减，

所以$y=\lg\frac{2-x}{2+x}$在$\left(-2,2\right)$上单调递减，则$f\left(x\right)$在$\left(-2,2\right)$上单调递减，

所以不等式 $f(m)+f(2m-1)>0$，即 $f(m)>f(1-2m)$，

等价于 $\begin{cases}-2<m<2\\-2<2m-1<2\\m<1-2m\end{cases}$，解得 $-\frac{1}{2}<m<\frac{1}{3}$，即实数 m 的取值范围是 $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right)$.

故选：D

二、填空题

3．（23-24 高一上·安徽宣城·期末）已知实数 x 满足不等式 $2(\log_2 x)^2-5\log_2 x+2\le 0$，则函数 $f(x)=\log_2\frac{x}{2}\cdot\log_2\frac{x}{4}$ 最大值是_____.

【答案】$\frac{3}{4}$/0.75

【分析】先根据一元二次不等式的解法求出 $\log_2 x$ 的范围，再根据二次函数的性质即可得解.

【详解】由 $2(\log_2 x)^2-5\log_2 x+2\le 0$，解得 $\frac{1}{2}\le\log_2 x\le 2$，

$f(x)=\log_2\frac{x}{2}\cdot\log_2\frac{x}{4}=(\log_2 x-1)(\log_2 x-2)=\left(\log_2 x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$，

当 $\log_2 x=\frac{1}{2}$ 时，$f(x)$ 取得最大值 $\frac{3}{4}$.

故答案为：$\frac{3}{4}$.

三、解答题

4．（24-25 高三上·山西忻州·阶段练习）已知函数 $f(x)$ 是 $g(x)=a^x(a>0$ 且 $a\ne 1)$ 的反函数，且函数 $F(x)=f^2(x)-f(x^2)-f(a)$.

(1)若 $F(4)=-1,f(6)=m,g(n)=3$，求 a 及 $3^{\frac{m}{n}}$ 的值；

(2)若函数 $F(x)$ 在 $\left[\frac{1}{2},2\right]$ 上有最小值 -2，最大值 7，求 a 的值.

【答案】(1) $a=2$；$3^{\frac{m}{n}}=6$

(2) $a=\sqrt{2}$ 或 $\frac{\sqrt{2}}{2}$

【分析】（1）由题意可得 $f(x)=\log_a x$，$F(x)=(\log_a x)^2-2\log_a x-1$，结合题意解得 $a=2$，进而可得 $m=\log_2 6,n=\log_2 3$，结合换底公式运算求解；

（2）换元令 $t=\log_a x$，根据二次函数值域结合 t 的值域特征分析可得 $t\in[-2,2]$，列式求解即可.

【详解】(1)因为函数 $f(x)$ 是 $g(x)=a^x(a>0$ 且 $a\neq 1)$ 的反函数,则 $f(x)=\log_a x$,

即 $F(x)=(\log_a x)^2-2\log_a x-1$,

则 $F(4)=(\log_a 4)^2-2\log_a 4-1=-1$,解得 $\log_a 4=2$ 或 $\log_a 4=0$(舍),

可得 $a=2$,即 $f(x)=\log_2 x$,$g(x)=2^x$,

又因为 $f(6)=\log_2 6=m,g(n)=2^n=3$,即 $m=\log_2 6,n=\log_2 3$,

所以 $3^{\frac{m}{n}}=3^{\frac{\log_2 6}{\log_2 3}}=3^{\log_3 6}=6$.

(2)由(1)可知:$F(x)=(\log_a x)^2-2\log_a x-1$,且 $x\in\left[\frac{1}{2},2\right]$,

令 $t=\log_a x$,则 $t\in[\log_a 2,-\log_a 2],(0<a<1$ 时$)$或 $t\in[-\log_a 2,\log_a 2],(a>1$ 时$)$,

可得 $y=t^2-2t-1$,

若函数F(x)在 $\left[\frac{1}{2},2\right]$ 上有最小值 -2,最大值 7,

可知 $y=t^2-2t-1$ 的最小值 -2,最大值 7,

令 $y=t^2-2t-1=-2$,解得 $t=1$;

令 $y=t^2-2t-1=7$,解得 $t=-2$ 或 $t=4$;

且 $\log_a 2$ 与 $-\log_a 2$ 互为相反数,可知 $t\in[-2,2]$,

则 $-\log_a 2=2$ 或 $\log_a 2=2$,解得 $a=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 或 $a=\sqrt{2}$,

综上所述,$a=\sqrt{2}$ 或 $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

5.(23-24 高三上·河北邢台·期中)已知 $g(x)=\log_a x(a>0,a\neq 1)$,且 $g(x)$ 的图象过点 $(4,2)$,又 $f(x)=-g(x)$.

(1)若 $f(3x-1)>f(-x+5)$ 成立,求 x 的取值范围;

(2)若对于任意 $x\in[1,4]$,不等式 $f(2x)g\left(\frac{x}{4}\right)-m<0$ 恒成立,求实数 m 的取值范围.

【答案】(1) $\left(\frac{1}{3},\frac{3}{2}\right)$

(2) $m>\frac{9}{4}$

【分析】(1)由对数函数的性质可得 $\begin{cases}3x-1>0\\-x+5>0\\3x-1<-x+5\end{cases}$,解不等式即可得出答案.

（2）由题意可得对于任意 $x\in[1,4]$ 恒成立等价于 $m>\left[f(2x)g\left(\frac{x}{4}\right)\right]_{\max}$，利用换元法求出 $\left[f(2x)g\left(\frac{x}{4}\right)\right]_{\max}$ 即可得出答案.

【详解】（1）因为 $g(x)=\log_a x(a>0,a\neq 1)$ 的图象过点 $(4,2)$，

所以 $g(4)=\log_a 4=2$，所以 $a^2=4$，因为 $a>0,a\neq 1$，

所以 $a=2$，所以 $g(x)=\log_2 x$，又因为 $f(x)=-g(x)=-\log_2 x=\log_{\frac{1}{2}}x$，

而 $f(x)=\log_{\frac{1}{2}}x$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，

由 $f(3x-1)>f(-x+5)$ 可得：

所以 $\begin{cases}3x-1>0,\\-x+5>0,\\3x-1<-x+5,\end{cases}$ 解得 $x\in\left(\frac{1}{3},\frac{3}{2}\right)$，

所以 x 的取值范围为 $\left(\frac{1}{3},\frac{3}{2}\right)$.

（2）因为 $f(2x)g\left(\frac{x}{4}\right)-m<0$，

所以 $m>f(2x)g\left(\frac{x}{4}\right)$ 对于任意 $x\in[1,4]$ 恒成立等价于 $m>\left[f(2x)g\left(\frac{x}{4}\right)\right]_{\max}$，

因为 $y=f(2x)g\left(\frac{x}{4}\right)=-\log_2(2x)\log_2\frac{x}{4}$

$=-(1+\log_2 x)(\log_2 x-2)=-(\log_2 x)^2+\log_2 x+2$.

令 $u=\log_2 x,1\leq x\leq 4$，则 $u\in[0,2]$，

所以 $y=-u^2+u+2=-\left(u-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{9}{4}$，

当 $u=\frac{1}{2}$，即 $\log_2 x=\frac{1}{2}$，即 $x=\sqrt{2}$ 时，$y_{\max}=\frac{9}{4}$，

所以 $m>\frac{9}{4}$.

题型 5　指对数函数的复合函数及其应用

一、单选题

1．（23-24 高一上·重庆·期末）函数 $y=\log_{\frac{1}{2}}\left(x^2-2x-8\right)$ 的单调递增区间为（　　）

A．$(4,+\infty)$　　B．$(-\infty,-2)$　　C．$(1,+\infty)$　　D．$(-\infty,1)$

【答案】B

【分析】先求出函数的定义域，再利用复合函数的单调区间的求法，即可求出结果.

【详解】由 $x^2-2x-8>0$ 得到 $x>4$ 或 $x<-2$，

令 $u=x^2-2x-8$，则 $y=\log_{\frac{1}{2}}u$，

因为 $y=\log_{\frac{1}{2}}u$ 在定义域上是减函数，

又 $u=x^2-2x-8$ 的开口向上且对称轴为 $x=1$，

易知，$u=x^2-2x-8$ 在区间 $(-\infty,-2)$ 上单调递减，在区间 $(4,+\infty)$ 上单调递增，

所以 $y=\log_{\frac{1}{2}}(x^2-2x-8)$ 的单调递增区间为 $(-\infty,-2)$，

故选：B.

2．（22-23 高一上·河北保定·期末）若函数 $f(x)=\log_3 x$ 的定义域为 $[1,9]$，则 $y=[f(x)]^2+f(x^2)$ 的值域为（　）

A．$[0,3]$　　B．$[-1,3]$

C．$[0,8]$　　D．$[-1,8]$

【答案】A

【分析】求出 $y=[f(x)]^2+f(x^2)$ 的定义域，结合对数函数、二次函数的性质，采用换元法求解即可.

【详解】解：因为 $f(x)=\log_3 x, x\in[1,9]$，

由 $\begin{cases}1\le x\le 9\\ 1\le x^2\le 9\end{cases}$，可得 $1\le x\le 3$，

所以 $y=[f(x)]^2+f(x^2)$ 的定义域为 $[1,3]$，

所以 $\log_3 x\in[0,1]$，

又 $f(x^2)=\log_3 x^2=2\log_3 x$，

设 $t=\log_3 x\in[0,1]$，

将原问题转化为求 $y=t^2+2t, t\in[0,1]$ 的值域，

由二次函数性质可知 $y=t^2+2t$ 在 $t\in[0,1]$ 上单调递增，

所以 $y\in[0,3]$.

故选：A.

3．（23-24 高三上·全国·阶段练习）已知函数 $f(x)=\begin{cases}(2-a)x+3a, x<1\\ 2^{x^2+2x-2}-1, x\ge 1\end{cases}$ 的值域为 **R**，则 a 的取值范围是（　）

A．$[-1,2)$　　B．$(-1,2)$

C. $\left[-\dfrac{1}{2},2\right)$　　　　D. $\left(-\dfrac{1}{2},2\right)$

【答案】C

【分析】求出函数 $f(x)=2^{x^2+2x-2}-1, x\geq 1$ 的函数值集合，再由分段函数值域的意义求出 a 的范围作答.

【详解】当 $x\geq 1$ 时，$f(x)=2^{x^2+2x-2}-1$，而函数 $t=x^2+2x-2$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递增，又 $y=2^t$ 是增函数，因此函数 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递增，$f(x)\geq f(1)=1$，即函数 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上的值域为 $[1,+\infty)$，

当 $x<1$ 时，函数 $f(x)$ 的值域为 A，而函数 $f(x)$ 的值域为 **R**，因此 $(-\infty,1)\subseteq A$，

而当 $x<1$ 时，$f(x)=(2-a)x+3a$，必有 $\begin{cases}2-a>0\\2-a+3a\geq 1\end{cases}$，解得 $-\dfrac{1}{2}\leq a<2$，

所以 a 的取值范围是 $[-\dfrac{1}{2},2)$.

故选：C

4.（24-25 高三上·江苏南通·阶段练习）若函数 $f(x)=\log_2\left(-x^2+ax+2\right)$ 在 $(1,2)$ 上单调递减，则实数 a 的取值范围是（　）

A. $(1,2)$　　　　B. $[1,2)$

C. $(1,2]$　　　　D. $[1,2]$

【答案】D

【分析】设 $t=-x^2+ax+2$，由复合函数的单调性可知，函数 $t=-x^2+ax+2$ 在 $(1,2)$ 上单调递减，且 $t>0$，再根据二次函数的性质即可求解.

【详解】设 $t=-x^2+ax+2$，

由题意可知，函数 $t=-x^2+ax+2$ 在 $(1,2)$ 上单调递减，且 $t>0$，

函数 $t=-x^2+ax+2$ 的对称轴为 $x=\dfrac{a}{2}$，

所以 $\begin{cases}\dfrac{a}{2}\leq 1\\-4+2a+2\geq 0\end{cases}$，解得 $1\leq a\leq 2$.

故选：D.

5.（2024 高一·全国·专题练习）设函数 $f\left(x\right)=a^{|2x-a|}$（$a>0$ 且 $a\neq 1$）在区间 $(1,+\infty)$ 上单调递增，则 a 的取值范围是（　）

A. $(1,2]$　　B. $[2,+\infty)$　　C. $\left[\dfrac{1}{2},1\right)$　　D. $\left[\dfrac{1}{2},1\right)\cup[2,+\infty)$

【答案】A

【分析】利用指数函数及复合函数的单调性计算即可.

【详解】易知 $y=|2x-a|=\begin{cases}2x-a, x\ge\dfrac{a}{2}\\ a-2x, x<\dfrac{a}{2}\end{cases}$，显然 $y=|2x-a|$ 在 $\left(\dfrac{a}{2},+\infty\right)$ 上单调递增，

在 $\left(-\infty,\dfrac{a}{2}\right)$ 上单调递减，

因为 $f(x)$ 在区间 $(1,+\infty)$ 上单调递增，结合复合函数的单调性可知 $a>1$，且 $\dfrac{a}{2}\le1$，

所以 $a\in(1,2]$.

故选：A

6．（23-24高三上·河北·期末）高斯是德国数学家、天文学家和物理学家，被誉为历史上伟大的数学家之一，和阿基米德、牛顿并列，同享盛名.用他名字命名的高斯函数也称取整函数，记作 $[x]$，是指不超过实数 x 的最大整数，例如 $[6.8]=6,[-4.1]=-5$，该函数被广泛应用于数论、函数绘图和计算机领域.若函数 $f(x)=\log_2(-x^2+x+2)$，则当 $x\in[0,1]$ 时，$[f(x)]$ 的值域为（　）

A．$\left[2,\dfrac{9}{4}\right]$　　B．$\left\{2,\dfrac{9}{4}\right\}$　　C．$\{1\}$　　D．$\{2\}$

【答案】C

【分析】确定函数 $f(x)$ 的定义域，结合复合函数的单调性判断 $f(x)$ 在 $x\in[0,1]$ 时的单调性，即可求得 $f(x)$ 的值域，根据取整函数的定义，即可求得答案.

【详解】由 $-x^2+x+2>0$，得 $(x+1)(x-2)<0$，解得 $-1<x<2$，

则 $f(x)$ 的定义域为 $\{x|-1<x<2\}$，

当 $x\in[0,1]$ 时，令 $t=-x^2+x+2$，函数 $y=-x^2+x+2$ 在 $\left[0,\dfrac{1}{2}\right]$ 上单调递增，在 $\left[\dfrac{1}{2},1\right]$ 上单调递减，

又 $u=\log_2 t$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，所以 $f(x)$ 在 $\left[0,\dfrac{1}{2}\right]$ 上单调递增，在 $\left[\dfrac{1}{2},1\right]$ 上单调递减，

所以 $f(x)$ 的值域为 $\left[1,\log_2\dfrac{9}{4}\right]$，所以 $[f(x)]$ 的值域为 $\{1\}$，

故选：C.

7．（24-25高三上·湖北·期中）若关于 x 的函数 $f(x)=\lg\left[\log_a(x^2+ax+2)\right]$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，则实数 a 的取值范围为（　）

A．$(0,1)\cup(1,2)$　　B．$(0,1)\cup(1,2\sqrt{2})$　　C．$(1,2)$　　D．$(1,2\sqrt{2})$

【答案】C

【分析】根据定义域为实数集，转化为 $x^2+ax+2>0$ 且 $\log_a(x^2+ax+2)>0$ 恒成立，

结合二次不等式恒成立求解即可.

【详解】由题意，$a>0,a\neq 1$，且对任意$x\in\mathbf{R}$，

$x^2+ax+2>0$，①

且$\log_a\left(x^2+ax+2\right)>0$，②

对于①，$\Delta_1=a^2-8<0$，结合$a>0,a\neq 1$，得$a\in(0,1)\cup\left(1,2\sqrt{2}\right)$.

若$a\in(0,1)$，由②知对任意$x\in\mathbf{R},x^2+ax+2\in(0,1)$，矛盾；

若$a\in\left(1,2\sqrt{2}\right)$，由②知对任意$x\in\mathbf{R},x^2+ax+2>1$，即$x^2+ax+1>0$，

则$\Delta_2=a^2-4<0$，得$a\in(1,2)$，

综上，当$a\in(1,2)$时，对任意$x\in\mathbf{R}$，①②同时成立.

故选：C

8．（23-24高二上·江苏南京·开学考试）已知函数$f(x+1)$是定义在R上的偶函数.$\forall x_1$，$x_2\in[1,+\infty)$，且$x_1\neq x_2$，都有$(x_1-x_2)\left[f(x_2)-f(x_1)\right]<0$，则不等式$f\left(-2^{x+1}+1\right)<f(5)$的解集为（　）

A．$\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)$　　B．$(-\infty,1)$　　C．$\left(-\frac{1}{2},+\infty\right)$　　D．$(-1,+\infty)$

【答案】B

【分析】由题意$y=f(x)$关于直线$x=1$对称，且$y=f(x)$在$[1,+\infty)$上单调递增，在$(-\infty,1)$上单调递减，注意到$f(5)=f(-3)$，且$-2^{x+1}+1<1$，从而原不等式等价于$-2^{x+1}+1>-3$，由此即可得解.

【详解】因为函数$f(x+1)$是定义在R上的偶函数，所以$f(x+1)$关于y轴对称，

由$y=f(x)$向左平移1个单位得到$f(x+1)$，所以$y=f(x)$关于直线$x=1$对称，

$\forall x_1$，$x_2\in[1,+\infty)$，且$x_1\neq x_2$，都有$(x_1-x_2)\left[f(x_2)-f(x_1)\right]<0$，

$y=f(x)$在$[1,+\infty)$上单调递增，

$\therefore y=f(x)$在$(-\infty,1)$上单调递减，

$\because f\left(-2^{x+1}+1\right)<f(5)$，且$f(5)=f(-3)$，而$-2^{x+1}+1<1$，

$\therefore -2^{x+1}+1>-3$，$\therefore 2^{x+1}<4$，解得$x<1$，

$\therefore$原不等式的解集为$(-\infty,1)$.

故选：B.

题型6　指对幂比较大小

一、单选题

1．（2024·江苏南京·三模）已知$e^a=\lg 3$，$b=\lg(\ln 3)$，$c=\ln\frac{1}{3}$，则a，b，c的大小关系是（　）

A．$c<b<a$　　B．$a<c<b$　　C．$c<a<b$　　D．$b<c<a$

【答案】C

【分析】根据题意结合对数函数单调性分析判断即可．

【详解】因为$e^a=\lg 3$，可得$a=\ln(\lg 3)$，

且$3\lg 3=\lg 27>1$，则$\lg 3>\frac{1}{3}$，可得$\ln(\lg 3)>\ln\frac{1}{3}$，所以$a>c$；

又因为$\ln 3>1>\lg 3>0$，则$\lg(\ln 3)>0>\ln(\lg 3)$，所以$b>a$；

综上所述：$c<a<b$．

故选：C

2．（24-25高三上·云南昆明·期中）已知函数$f(x)=x^{\frac{2}{3}}$，记$a=f\left(5^{-\frac{1}{2}}\right)$，$b=f\left(\log_3\frac{1}{2}\right)$，$c=f\left(\frac{1}{2}\right)$，则（　）

A．$a<b<c$　　B．$a<c<b$

C．$b<a<c$　　D．$c<a<b$

【答案】B

【分析】确定函数的奇偶性与单调性，利用奇偶性转化，结合对数函数与指数函数性质比较大小,再利用单调性得结论．

【详解】$f(x)=x^{\frac{2}{3}}$是偶函数，在$(0,+\infty)$上是增函数，

$b=f(\log_3\frac{1}{2})=f(-\log_3 2)=f(\log_3 2)$，

$\log_3 2>\log_3\sqrt{3}=\frac{1}{2}$，$5^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{5}}<\frac{1}{2}$，

即$0<5^{-\frac{1}{2}}<\frac{1}{2}<\log_3 2$，所以$f(5^{-\frac{1}{2}})<f(\frac{1}{2})<f(\log_3 2)$，即$a<c<b$，

故选：B．

3．（2025·江苏南通·一模）设$a=2^{\sqrt{\pi}}$，$b=\log_2\pi$，$c=\sqrt{\pi}$，则（　）

A．$c>b>a$　　B．$b>c>a$　　C．$a>c>b$　　D．$a>b>c$

【答案】C

【分析】利用中间值法，再结合指数函数和对数函数的单调性即可比较大小．

【详解】由$a=2^{\sqrt{\pi}}>2$，$1<b=\log_2\pi<\log_2 4=2$，$1<c=\sqrt{\pi}<\sqrt{4}=2$，知$a>b$，$a>c$，

又$\pi^3<2^5$，所以$\pi<2^{\frac{5}{3}}$，故$b=\log_2\pi<\log_2 2^{\frac{5}{3}}=\frac{5}{3}$，

又$\left(\frac{5}{3}\right)^2=\frac{25}{9}<\pi$，故$\frac{5}{3}<\sqrt{\pi}=c$，所以$b<c$，

因此可得$a>c>b$．

故选：C.

4．（24-25高三上·河北衡水·阶段练习）$f\left(x\right)$是定义在**R**上的偶函数，$f\left(x\right)$在$(0,+\infty)$上单调递增，$a=f\left(\log_2\frac{1}{3}\right)$，$b=f\left(\frac{3}{2}\right)$，$c=f\left(\log_3 2\right)$，则下列不等式成立的是（　）

A．$a<b<c$　　B．$a<c<b$　　C．$c<b<a$　　D．$c<a<b$

【答案】C

【分析】根据对数运算及偶函数的定义将括号内的自变量转换到$(0,+\infty)$上，进行自变量的大小比较，再根据$f\left(x\right)$在$(0,+\infty)$上单调递增可得到对应函数值的大小关系，即可得到结果.

【详解】由于$f\left(x\right)$是定义在R上的偶函数，所以有$f(-x)=f(x)$，

所以$a=f\left(\log_2\frac{1}{3}\right)=f\left(-\log_2 3\right)=f\left(\log_2 3\right)$，

因为$1<\frac{3}{2}=\log_2 2\sqrt{2}<\log_2 3$，$0<\log_3 2<1$，

所以$0<\log_3 2<\frac{3}{2}<\log_2 3$，又因为$f\left(x\right)$在$(0,+\infty)$上单调递增，

所以$f\left(\log_3 2\right)<f\left(\frac{3}{2}\right)<f\left(\log_2 3\right)$，即$c<b<a$.

故选：C.

5．（24-25高三上·安徽安庆·阶段练习）设$a=\log_3 2$，$b=\log_5 2$，$c=\log_2 3$，则（　）

A．$a>c>b$　　B．$b>c>a$

C．$c>b>a$　　D．$c>a>b$

【答案】D

【分析】根据对数函数单调性得到$a,b\in\left(0,1\right),c>1$，再利用换底公式和作差法得到$0<b<a<1$，比较出大小关系.

【详解】$a=\log_3 2<\log_3 3=1,b=\log_5 2\langle\log_5 5=1,c=\log_2 3\rangle\log_2 2=1$，

其中$a=\frac{\lg 2}{\lg 3}$，$b=\frac{\lg 2}{\lg 5}$，所以$a-b=\frac{\lg 2}{\lg 3}-\frac{\lg 2}{\lg 5}=\frac{\lg 2\times\left(\lg 5-\lg 3\right)}{\lg 3\times\lg 5}>0$，

故$0<b<a<1$，所以$c>a>b$.

故选：D.

6．（24-25高二上·贵州贵阳·阶段练习）已知$a=\log_3 2$，$b=\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{1}{2}}$，$c=\left(\frac{1}{25}\right)^{\frac{1}{3}}$，则实数$a,b,c$的大小关系正确的是（　）

A．$a<b<c$　　B．$b<c<a$　　C．$c<b<a$　　D．$c<a<b$

【答案】C

【分析】利用中间变量法得到$a>b$，利用构造函数法得到$c<b$即可.

【详解】因为$a=\log_3 2>\log_3\sqrt{3}=\frac{1}{2}$，$b=\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{5}}<\frac{1}{2}$，

所以$a>b$，而$b=\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\frac{1}{25}\right)^{\frac{1}{4}}$，$c=\left(\frac{1}{25}\right)^{\frac{1}{3}}$，

故我们构造指数函数$f(x)=\left(\frac{1}{25}\right)^{x}$，得到$b=f(\frac{1}{4})$，$c=f(\frac{1}{3})$

由指数函数性质得$f(x)$在R上单调递减，

因为$\frac{1}{4}<\frac{1}{3}$，所以$c<b$，综上可得$c<b<a$，故C正确.

故选：C

题型 7　函数的零点、个数、参数问题

一、单选题

1．（2024高三·全国·专题练习）若函数$f\left(x\right)=2\mathrm{e}^{x}$的图象与函数$g\left(x\right)=\frac{1}{x}+5$的图象交点的横坐标所在的区间为$\left(k,k+1\right)$，则整数$k$可能为（　　）

A．-2　　B．0　　C．1　　D．2

【答案】C

【分析】作出函数$f\left(x\right)=2\mathrm{e}^{x}$与$g\left(x\right)=\frac{1}{x}+5$的大致图象，设$h\left(x\right)=f\left(x\right)-g\left(x\right)$，求出$h\left(-1\right)h\left(-\frac{1}{10}\right)$、$h\left(1\right)h\left(2\right)$的正负可得答案.

【详解】作图易知函数$f\left(x\right)=2\mathrm{e}^{x}$的图象与函数$g\left(x\right)=\frac{1}{x}+5$的图象

在y轴两侧各有一个交点，

设$h\left(x\right)=f\left(x\right)-g\left(x\right)=2\mathrm{e}^{x}-\frac{1}{x}-5$，

则$h\left(-1\right)=\frac{2}{\mathrm{e}}-4<0$，$h\left(-\frac{1}{10}\right)=2\mathrm{e}^{-\frac{1}{10}}+5>0$，

$h\left(1\right)=2\mathrm{e}-6<0$，$h\left(2\right)=2\mathrm{e}^{2}-\frac{11}{2}>0$，

故$h\left(-1\right)h\left(-\frac{1}{10}\right)<0$，$h\left(1\right)h\left(2\right)<0$，

所以函数h(x)的零点所在区间是$\left(-1,-\frac{1}{10}\right)$，$\left(1,2\right)$.