

【基础练】

一、解答题

1. (2022秋·陕西宝鸡·高三统考阶段练习) 已知 $f(x) = \ln x$.

(1) 若直线 $y = kx + 1$ 与函数 $f(x)$ 图象相切, 求 k 的值;

(2) 若函数 $g(x) = mx^2 + \frac{1}{2}$ 与函数 $f(x)$ 有两个不同的交点, 求 m 的取值范围;

(3) 设, $f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数, 试比较与 $f'(x_1) + f'(x_2)$ 的大小.

2. (2022秋·甘肃张掖高三高台县第一中学校考阶段练习) 已知函数 $f(x) = \ln x + \frac{1}{ax} - \frac{1}{a}$, $a \in \mathbb{R}$ 且 $a \neq 0$.

(1) 讨论函数 $f(x)$ 的单调性;

(2) 当 $x \in [\frac{1}{e}, e]$ 时, 试判断函数 $g(x) = (\ln x - 1)e^x + x - m$ 的零点个数.

3. (2021·高二单元测试) 对于三次函数 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$), 给出定义: 设 $f'(x)$ 是函数 $y = f(x)$ 的导数, $f''(x)$ 是 $f'(x)$ 的导数, 若方程 $f''(x) = 0$ 有实数解 x_0 , 则

称点为函数 $y = f(x)$ 的“拐点”. 经过探究发现: 任何一个三次函数都有“拐点”; 任何一个

三次函数都有对称中心, 且“拐点”就是对称中心. 设函数 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{m}{2}x^2 + \frac{13}{12}$.

(1) 当 $m = 1$ 时, 求 $f(\frac{1}{100}) + f(\frac{2}{100}) + \cdots + f(\frac{98}{100}) + f(\frac{99}{100})$ 的值;

(2) 若不等式 $2x \ln x + f'(x) + 3 \geq 0$ 恒成立, 求实数 m 的取值范围.

4. (2019·甘肃兰州·统考一模) 若函数 $f(x) = \frac{1}{3}ax^3 + bx + 4$, 当 $x = -2$ 时, 函数 $f(x)$ 有极值 $\frac{28}{3}$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的解析式;

(2) 若方程 $f(x) = k$ 有 3 个不同的根, 求实数 k 的取值范围.

5. (2019·湖北·统考一模) 已知函数 $f(x) = (x-2)e^x + \frac{1}{2}ax^2 - bx$ 的导函数为 $f'(x)$, 其中 e 为自然对数的底数, $e = 2.7182818L$, 且 $f'(1) = 0$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 若存在正数 x_0 , 使得 $f(x_0) < 2a$, 求实数 a 的取值范围.

6. (2021·河北衡水·统考三模) 设函数 $g(x) = -x^3 + bx^2 + cx$ (b 为实数, c 为正整数) 有两个不同的极值点 A 、 B , 且 A 、 B 与坐标原点 O 共线:

(1) 求 $f(x)$ 的表达式;

(2) 试求 b 的值;

(3) 若 $x \geq 0$ 时, 函数 $g(x)$ 的图象恒在函数 $f(x)$ 图象的下方, 求正整数 c 的值.

7. (2014·陕西西安·统考一模) 二次函数 $f(x)$ 满足 $f(0)=2, f(x)=f(-2-x)$, 它的导函数的图象与直线 $y=2x$ 平行.

(1) 求 $f(x)$ 的解析式;

(2) 若函数 $g(x)=xf(x)-x$ 的图象与直线 $y=m$ 有三个公共点, 求 m 的取值范围.

8. (2014·湖北省直辖县级单位·高三阶段练习) 已知 $m, t \in R$, 函数 $f(x)=(x-t)^3+m$.

(I) 当 $t=1$ 时,

(1) 若 $f(1)=1$, 求函数 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 若关于 x 的不等式 $f(x) \geq x^3-1$ 在区间 $[1,2]$ 上有解, 求 m 的取值范围;

(II) 已知曲线 $y=f(x)$ 在其图象上的两点 $A(x_1, f(x_1)), B(x_2, f(x_2))$ ($x_1 \neq x_2$) 处的切线分别为 l_1, l_2 . 若直线 l_1 与 l_2 平行, 试探究点 A 与点 B 的关系, 并证明你的结论.

9. (2023·山西·校联考模拟预测) 已知 $a > 0$, 函数 $f(x)=a(x+1)\ln x - x + 1$.

(1) 若 $f(x)$ 是增函数, 求 a 的取值范围;

(2) 证明: 当 $0 < a < \frac{1}{2}$, 且 $a \neq \frac{1}{e}$ 时, 存在三条直线 l_1, l_2, l_3 是曲线 $y=\ln x$ 的切线, 也是曲线 $y=a\left(x-\frac{1}{x}\right)$ 的切线.

10. (2020·山东济宁·校考模拟预测) 设函数 $g(x)=\ln x + ae^x$, $h(x)=axe^x$, $0 < a < \frac{1}{e}$,

(1) 求 $g(x)$ 在 $x=1$ 处的切线的一般式方程;

(2) 请判断 $g(x)$ 与 $h(x)$ 的图像有几个交点?

(3) 设 x_0 为函数的极值点, x_1 为 $g(x)$ 与 $h(x)$ 的图像一个交点的横坐标, 且 $x_1 > x_0$, 证明: .

【提升练】

11. (2021·全国·模拟预测) 已知函数, e 是自然对数的底数.

(1) 求曲线 $y=f(x)$ 在处的切线方程;

(2) 若 $x \in (0, +\infty)$, 证明: 曲线 $y=f(x)$ 不落在 $y=(x-2)^3$ 图像的下方.

12. (2021·全国·校联考模拟预测) 已知函数 $f(x)=\frac{x^2-m\ln x}{x}, m>0$.

(1) 当 $f'(1)=0$ 时, 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 若曲线 $y=f(x)$ 与直线 $y=m$ 有交点, 求证: $m \geq 1$.

13. (2019·陕西榆林·统考模拟预测) 已知函数

$$f(x) = \frac{x^2 + (a+2)x + a}{e^x} (a \in \mathbf{R}), g(x) = e^x f(x).$$

(1) 若 $A = \{x | g(x) \leq 9, x \in [a, +\infty)\} \neq \emptyset$, 求实数 a 的取值范围;

(2) 设 $f(x)$ 的极大值为 M , 极小值为 N , 求 $\frac{M}{N}$ 的取值范围.

14. (2020·全国·高三专题练习) 已知函数 $f(x) = a(x+1)^2$, $g(x) = xe^x$.

(1) 若 $g(x)$ 的切线过 $(-4, 0)$, 求该切线方程;

(2) 讨论 $f(x)$ 与 $g(x)$ 图像的交点个数.

15. (2020·江西抚州·高三临川一中校考阶段练习) 已知函数 $f(x) = e^{2x} - a$,

$g(x) = e^x - b$, 且 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的图象有一个斜率为 1 的公切线 (e 为自然对数的底数).

(1) 求 $b-a$;

(2) 设函数 $h(x) = f(x) - g(x) - mx + \frac{\ln 2}{2} - \frac{1}{2}$, 讨论函数 $h(x)$ 的零点个数.

16. (2020·湖南永州·统考二模) 已知函数

$$f(x) = 2 \cos x + x \sin x, g(x) = -3 \sin x + 3x \cos x + x^2 \sin x.$$

(1) 证明: $f(x)$ 在区间上存在唯一零点;

(2) 令 $h(x) = af(x) - g(x) (a > 0)$, 若 $x \in (-\pi, \pi)$ 时 $h(x)$ 有最大值, 求实数 a 的取值范围.

17. (2019·江西抚州·校联考三模) 已知函数 $f(x) = \frac{5(x+1)}{3(x^2+3)}$, $x \in [0, 2]$.

(1) 求使方程 $f(x) - \frac{m}{2} + 1 = 0 (m \in \mathbf{R})$ 存在两个实数解时, m 的取值范围;

(2) 设 $a \neq 0$, 函数 $g(x) = \frac{1}{3}ax^3 - a^2x$, $x \in [0, 2]$. 若对任意 $x_1 \in [0, 2]$, 总存在 $x_0 \in [0, 2]$,

使得 $f(x_1) - g(x_0) = 0$, 求实数 a 的取值范围.

18. (2020·全国·校联考模拟预测) 已知函数 $f(x) = e^{ax+b} (a, b \in \mathbf{R})$ 的图象与直线

$l: y = x+1$ 相切, $f'(x)$ 是 $f(x)$ 的导函数, 且 $f(1) = e$.

(1) 求 $f(x)$;

(2) 函数 $g(x)$ 的图象与曲线 $y = kf'(x) (k \in \mathbf{R})$ 关于 y 轴对称, 若直线 l 与函数 $g(x)$ 的图象有两个不同的交点 $A(x_1, g(x_1)), B(x_2, g(x_2))$, 求证: $x_1 + x_2 < -4$.

【能力练】

19. (2019·湖南·湖南师大附中校联考一模) 设函数 $f(x) = \ln x + a(x^2 - 3x + 2)$, 其中 $a \in \mathbf{R}$.

(1) 讨论 $f(x)$ 极值点的个数;

(2) 设 $a = -\frac{1}{2}$, 函数 $g(x) = 2f(x) - (\lambda + 3)x + 2$, 若 x_1, x_2 ($x_1 \neq x_2$) 满足 $g(x_1) = g(x_2)$ 且, 证明: $g'(x_0) \neq 0$.

20. (2019·山西吕梁·统考一模) 已知函数 $f(x) = xe^x - ax - 1$.

(1) 当 $a = -1$ 时, 求函数 $f(x)$ 在点处的切线方程;

(2) 对于任意的 $x > 0$, $y = f(x)$ 的图象恒在 $y = \ln x$ 图象的上方, 求实数 a 的取值范围.

21. (2018·湖南张家界·统考三模) 已知关于 x 的方程 $(1-x)e^x - ax^2 = a$ 有两个不同的实数根 x_1, x_2 .

(1) 求实数 a 的取值范围;

(2) 求证: $x_1 + x_2 < 0$.

22. (2019·山东·山东师范大学附中校考二模) 若对于函数 $f(x) = x^3 - \frac{1}{2}x - 1 - e^x$ 图像上的点 P , 在函数 $g(x) = x^3 + \frac{m}{x}$ 的图象上存在点 Q , 使得 P 与 Q 关于坐标原点对称, 求实数 m 的取值范围.

23. (2019·江西上饶·校联考二模) 已知函数 $f(x) = x^x (x > 0)$, $g(x) = -ax + 2 \ln x (a \in R)$

(1) 若函数 $g(x)$ 在 $x = 1$ 处取得极值, 求实数 a 的值;

(2) 若, 且函数的图像恒在 $y = -1$ 图像下方, 求实数 a 的取值范围;

(3) 证明: $2018^{2019} > 2019^{2018}$.

24. (2020 秋·甘肃武威·高三甘肃省武威第一中学校考阶段练习) 已知函数在处的切线平行于 x 轴.

(1) 当 $m = -1$ 时, 求 $f(x)$ 在上的最大值;

(2) 若 $m > 0$, $f(x)$ 在上只有一个零点, 求 m 的取值范围.

【磨尖练】

25. (2023·全国·高三专题练习) 函数 $f(x) = \ln(x+1) + ax$ 的图像与直线 $y = 2x$ 相切.

(1) 求 a 的值;

(2) 证明: 对于任意正整数 n , $n^n \cdot e^{\frac{n}{n+1}} < \frac{(2n)!}{n!} < n^n \cdot e^{\frac{n+1}{2}}$.

26. (2021 秋·甘肃兰州·高三兰州市外国语高级中学校考阶段练习) 已知函数

$$f(x) = \ln x - \frac{1}{x}, \quad g(x) = ax + b.$$

(1) 若函数 $h(x) = f(x) - g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 求实数 a 的取值范围;

(2) 若直线 $y = ax + b$ 是函数 $f(x) = \ln x - \frac{1}{x}$ 图象的切线, 求 $a + b$ 的最小值;

27. (2018·安徽·校联考一模) 已知 $f(x) = x \ln x - ax^2$.

(1) 若 $f(x)$ 有两个零点, 求 a 的范围;

(2) 若 $f(x)$ 有两个极值点, 求 a 的范围;

(3) 在 (2) 的条件下, 若 $f(x)$ 的两个极值点为 $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$, 求证: $f(x_1) > -\frac{1}{2}$.

28. (2020·浙江宁波·镇海中学校考模拟预测) 已知函数 $f(x) = \ln a^2 x - 2\sqrt{ax} + a \ln a$;

(I) 求证: $f(x) \leq a^2 - 3$;

(II) 是否存在实数 k , 使得只有唯一的正整数 a , 对于 $x \in (0, +\infty)$ 恒有:

$f(x) \leq ea + k$, 若存在, 请求出 k 的范围以及正整数 a 的值; 若不存在请说明理由. (下

表的近似值供参考)

参考答案:

1. (1) $k = \frac{1}{e^2}$; (2) $m \in \left(0, \frac{1}{2e^2}\right)$; (3) $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < f'(x_1) + f'(x_2)$.

【分析】(1) 根据导数几何意义, 设切点, 且直线过定点(0, 1), 则 $k = \frac{\ln x_0 - 1}{x_0} = \frac{1}{x_0}$, 从而解得 k ;

(2) 分离参数, 构造函数, 通过导数研究单调性, 数形结合解得参数取值范围;

(3) 两式作差, 令 $t = \frac{x_2}{x_1} > 1$, 构造函数 $g(t) = \ln t - \left(t - \frac{1}{t}\right)$, 利用导数研究新函数值域情况, 从而比较两式大小.

【详解】解: (1) $f'(x) = \frac{1}{x}$, 且直线过定点(0, 1), 设切点为,

则 $k = \frac{\ln x_0 - 1}{x_0} = \frac{1}{x_0}$, 可得 $x_0 = e^2$. 故 $k = \frac{1}{e^2}$.

(2) $mx^2 + \frac{1}{2} = \ln x (x > 0)$, $m = \frac{\ln x - \frac{1}{2}}{x^2}$, 令 $h(x) = \frac{\ln x - \frac{1}{2}}{x^2}$, $h'(x) = \frac{2 - 2\ln x}{x^3}$

当 $x \in (0, e)$ 时, $h'(x) > 0$; $x \in (e, +\infty)$ 时, $h'(x) < 0$. $h(x)$ 在 $(0, e)$ 单增, 在 $(e, +\infty)$ 单减,

故 $h(x)_{\max} = h(e) = \frac{1}{2e^2}$

由图可知: $m \in \left(0, \frac{1}{2e^2}\right)$.

(3) $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{\ln \frac{x_2}{x_1}}{x_2 - x_1}$, $f'(x_1) + f'(x_2) = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2}$, 作差

$$\frac{\ln \frac{x_2}{x_1}}{x_2 - x_1} - \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = \frac{1}{x_2 - x_1} \left(\ln \frac{x_2}{x_1} - \frac{x_2^2 - x_1^2}{x_1 x_2} \right)$$

令 $t = \frac{x_2}{x_1} > 1$, 设 $g(t) = \ln t - \left(t - \frac{1}{t}\right)$, $g'(t) = \frac{1}{t} - 1 - \frac{1}{t^2} = \frac{-t^2 + t - 1}{t^2} = \frac{-(t^2 - t + 1)}{t^2} < 0$, $g(t)$ 在 $t > 1$ 上单调递减,

则 $g(t) < g(1) = 0$, $\therefore \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < f'(x_1) + f'(x_2)$

【点睛】方法点睛: (1) 导数几何意义求切线斜率;

(2) 分离参数, 把函数图像交点问题转化为新函数交点问题, 借助数形结合解得参数取值范围;

(3) 双变量问题可以通过一个变量如 $t = \frac{x_2}{x_1}$ 来表示, 从而构造新函数, 通过导数研究新函数单调性, 求得其他相关的量.

2. (1)答案见解析；(2)答案见解析.

【详解】试题分析：

(1) 求出导函数，根据导函数的符号的到函数的单调性；(2) 将问题转化为求方程 $(\ln x - 1)e^x + x = m$ 根的个数的问题处理，分离参数后转化为判断 $h(x) = (\ln x - 1)e^x + x$ 和函数 $y = m$ 的图象的公共点的个数的问题. 通过分析函数 $h(x)$ 的单调性得到图象的大致形状即可.

试题解析：

(1) 函数的定义域为,

$\therefore$,

$$\therefore f'(x) = \frac{ax-1}{ax^2},$$

①当 $a < 0$ 时, $f'(x) > 0$ 恒成立,

所以函数 $f(x)$ 在上单调递增;

②当 $a > 0$ 时,

则当 $x \in \left(0, \frac{1}{a}\right)$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减,

当 $x \in \left(\frac{1}{a}, +\infty\right)$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增.

综上所述, 当 $a < 0$ 时, 函数 $f(x)$ 在上单调递增;

当 $a > 0$ 时, 函数 $f(x)$ 在 $\left(\frac{1}{a}, +\infty\right)$ 上单调递增, 在 $\left(0, \frac{1}{a}\right)$ 上单调递减.

(2) 由题意知, 函数的零点个数即方程的根的个数.

$$\text{令 } h(x) = (\ln x - 1)e^x + x, \quad x \in \left[\frac{1}{e}, e\right]$$

$$\text{则 } h'(x) = \left(\frac{1}{x} + \ln x - 1\right)e^x + 1.$$

由(1)知当 $a = 1$ 时, $f(x) = \ln x + \frac{1}{x} - 1$ 在递减, 在上递增,

$\therefore$

$$\therefore \frac{1}{x} + \ln x - 1 \geq 0 \text{ 在 } x \in \left[\frac{1}{e}, e\right] \text{ 上恒成立.}$$

$$\therefore h'(x) = \left(\frac{1}{x} + \ln x - 1\right)e^x + 1 \geq 0 + 1 > 0,$$

$$\therefore h(x) = (\ln x - 1)e^x + x \text{ 在 } x \in \left[\frac{1}{e}, e\right] \text{ 上单调递增.}$$

$$\therefore h(x)_{\min} = h\left(\frac{1}{e}\right) = -2e^{\frac{1}{e}} + \frac{1}{e}, \quad h(x)_{\max} = h(e) = e.$$

所以当 $m < -2e^{\frac{1}{e}} + \frac{1}{e}$ 或 $m > e$ 时，函数没有零点；

当 $-2e^{\frac{1}{e}} + \frac{1}{e} \leq m \leq e$ 时函数有一个零点.

点睛：研究方程根的个数（函数零点的个数、两函数图象公共点的个数）时，可以通过导数研究函数的单调性、最大值、最小值、变化趋势等，并根据题目要求，画出函数图象的大致图象，通过数形结合的思想去分析问题，可以使得问题的求解有一个清晰、直观的整体展现.

3. (1) 99; (2)

【分析】(1) 将 $m=1$ 代入，结合定义可求得对称中心，进而可知 $f(x)+f(1-x)=2$. 结合所求式子特征即可求解.

(2) 将 $f'(x)=x^2-mx$ 代入不等式，结合定义域可分离参数 m ，构造函数 $t(x)=\frac{2x\ln x+x^2+3}{x}$ ，求得 $t'(x)$ 并令 $t'(x)=0$ ，求得极值点，即可由导函数符号判断函数的单调性，进而求得 $t(x)_{\min}$ ，即可确定 m 的取值范围.

【详解】(1) 函数 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{m}{2}x^2+\frac{13}{12}$,

当 $m=1$ 时， $f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+\frac{13}{12}$

因为 $f'(x)=x^2-x$,

$$\therefore f''(x)=2x-1,$$

令 $f''(x)=2x-1=0$ ，解得 $x=\frac{1}{2}$ ，

则对称中心的纵坐标为 $f\left(\frac{1}{2}\right)=1$ ，故对称中心为 $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ ，

所以 $f(x)+f(1-x)=2$ ，

所以，，...

则.

(2) $\because 2x\ln x + f'(x) + 3 \geq 0$ ， $f'(x)=x^2-mx$ ，

即 $mx \leq 2x\ln x + x^2 + 3$ ，

又 $x > 0$ ，

$\therefore m \leq \frac{2x \ln x + x^2 + 3}{x}$ 在 $x \in (0, +\infty)$ 上恒成立.

$$\text{令 } t(x) = \frac{2x \ln x + x^2 + 3}{x} = 2 \ln x + x + \frac{3}{x}.$$

$\therefore m \leq t(x)_{\min}.$

$$\therefore t'(x) = \frac{2}{x} + 1 - \frac{3}{x^2} = \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2} = \frac{(x+3)(x-1)}{x^2},$$

令 $t'(x) = 0$, 得 $x = 1$ 或 $x = -3$ (舍去).

当 $x \in (0, 1)$ 时, $t'(x) < 0$, 函数 $t(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减;

当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $t'(x) > 0$, 函数 $t(x)$ 在上单调递增.

$$\therefore t(x)_{\min} = t(1) = 4.$$

$$\therefore m \leq t(x)_{\min} = 4,$$

即 m 的取值范围为.

【点睛】本题考查了函数新定义的应用, 导函数的运算及中心对称性质的应用, 分离参数并构造函数法求参数的取值范围, 由导数研究函数的单调性与最值, 属于中档题.

$$4. (1) f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x + 4 \quad (2) -\frac{4}{3} < k < \frac{28}{3}$$

【分析】(1) 由题得

解出 a, b 即得到函数 $f(x)$ 的解析式.

(2) 若 $f(x) = k$ 有 3 个不同的根, 则直线 $y = k$ 与函数 $y = f(x)$ 的图象有 3 个交点, 通过图像求实数 k 的取值范围.

【详解】(1) 因为 $f'(x) = ax^2 + b$, 由题意得, 解得 $\begin{cases} a = 1 \\ b = -4 \end{cases}$

故所求函数的解析式为 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x + 4$.

(2) 由 (1) 可得, 令 $f'(x) = 0$, 得 $x = 2$ 或 $x = -2$.

当 $x = 2$ 变化时 $x = 2$, $x = 2$ 变化情况如下表:

x		-2		2	
-----	--	----	--	---	--

$f'(x)$	+	0		0	+
$f(x)$	递增	$\frac{28}{3}$	递减	$-\frac{4}{3}$	递增

因此, 当 $x = -2$ 时, $f(x)$ 有极大值 $\frac{28}{3}$,

当 $x = 2$ 时, $f(x)$ 有极小值 $-\frac{4}{3}$,

因为函数 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x + 4$ 的图象大致如图所示:

若 $f(x) = k$ 有 3 个不同的根, 则直线 $y = k$ 与函数

$y = f(x)$ 的图象有 3 个交点, 所以 $-\frac{4}{3} < k < \frac{28}{3}$.

【点睛】本题考查导函数, 极值点处的导数值等于 0

第 (2) 问解题的关键是刻画出函数 $f(x)$ 的图像.

5. (1) 见解析. (2) $(-\infty, -e^4) \cup \left(-\frac{2}{5}e, +\infty\right)$.

【分析】(1) 先求出 $a=b$, 再对 a 分类讨论, 利用导数求 $f(x)$ 的单调性; (2) 对 a 分类讨论, 利用上一问的结论解答得解.

【详解】(1) $f'(x) = (x-1)e^x + ax - b$, $\because f'(1) = 0$, $\therefore a - b = 0$, 即 $b = a$,

$\therefore f(x) = (x-2)e^x + \frac{1}{2}ax^2 - ax$,

① 当 $a \geq 0$ 时, $x < 1$, $f'(x) < 0$, $x > 1$, $f'(x) > 0$,

$\therefore f(x)$ 在上单调递减, 在上单调递增;

② 当 $-e < a < 0$ 时, $\ln(-a) < 1$, 令 $f'(x) > 0$, 解得 $x < \ln(-a)$ 或 $x > 1$;

令 $f'(x) < 0$, 解得 $\ln(-a) < x < 1$,

$\therefore f(x)$ 在 $(-\infty, \ln(-a))$ 和上单调递增, 在上单调递减;

③ 当 $a < -e$ 时, $\ln(-a) > 1$, 令 $f'(x) > 0$, 解得 $x > \ln(-a)$ 或 $x < 1$;

令 $f'(x) < 0$, 解得,

$\therefore f(x)$ 在和上单调递增，在上单调递减；

④当 $a = -e$ 时， $f(x)$ 在 R 上单调递增；

(2) 由 (1) 知，

①当 $a \geq 0$ 时，需 $f(1) = -e - \frac{1}{2}a < 2a$ ，满足题意；

②当 $-e < a < 0$ 时，需 $f(1) = -e - \frac{1}{2}a < 2a$ 或 $f(0) = -2 < 2a$ ，

解得 $a > -\frac{2}{5}e$ ， $\therefore -\frac{2}{5}e < a < 0$ ；

③当 $a < -e$ 时，需 $f(0) = -2 < 2a$ 或 $f(\ln(-a)) < 2a$ ，

当 $f(0) < 2a$ 时， $a > -1$ ，无解。

当 $f(\ln(-a)) < 2a$ 时，得 $\ln(-a) < 0$ 或 $\ln(-a) > 4$ ，

解得 $a > -1$ 或 $a < -e^4$ ， $\therefore a < -e^4$ ；

④当 $a = -e$ 时，需 $f(0) = -2 < 2a$ ，无解，不满足题意，

综上所述， a 的取值范围是 $(-\infty, -e^4) \cup \left(-\frac{2}{5}e, +\infty\right)$ 。

【点睛】本题主要考查利用导数研究函数的单调性和不等式的存在性问题，意在考查学生对这些知识的理解掌握水平和分析推理能力。

6. (1) $f(x) = |x+1| + |x-1|$ ；

(2) $b = 0$ ；

(3) $c = 1$ 或 2 。

【分析】(1) 由函数 $f(x)$ 的图象关于 y 轴对称，可知函数 $f(x)$ 是偶函数，则可根据恒成立，解得 a 的值，进而得到表达式；

(2) 设 x_1, x_2 是函数 $g(x)$ 的两个极值点，即 x_1, x_2 是 $g(x)$ 导函数的两个根，再由 A, B 与坐标原点 O 共线，可以结合斜率公式得到 $k_{OA} = k_{OB}$ ，最后根据根与系数关系，求出 b 的值；

(3) 将问题转化为当 $x \geq 0$ 时，函数 $g(x)$ 的最大值小于 $f(x)$ 的最小值恒成立问题。先根据绝对值不等式的性质求出 $f(x)$ 的最小值，再利用导数判断函数 $g(x)$ 的单调性，由于 $f(1) > g(1)$ ，则可根据函数 $g(x)$

的最大值小于 $f(x)$ 的最小值求出正整数 c 的值.

【详解】(1) 由函数 $f(x)$ 的图象关于 y 轴对称, 则,

$$\text{所以 } |x+a+1|+|x+a-1| = |-x+a+1|+|-x+a-1|,$$

$$\text{即 } |x+a+1|+|x+a-1| = |x-a-1|+|x-a+1|, \text{ 所以 } a=0,$$

$$\text{故 } f(x) = |x+1|+|x-1|.$$

(2) 设 x_1, x_2 是函数 $g(x)$ 的两个极值点, 即 x_1, x_2 是方程 $g'(x) = -3x^2 + 2bx + c = 0$ 的两个不等实根, 所以 $\Delta = 4b^2 + 12c > 0$ (c 为正整数),

$$\text{则 } x_1 + x_2 = \frac{2b}{3},$$

$$\text{又 } A、O、B \text{ 三点共线, 所以 } k_{OA} = k_{OB}, \text{ 则 } \frac{-x_1^3 + bx_1^2 + cx_1}{x_1} = \frac{-x_2^3 + bx_2^2 + cx_2}{x_2},$$

$$\text{即 } (x_1 - x_2)[-(x_1 + x_2) + b] = 0,$$

$$\text{又 } x_1 \neq x_2, \text{ 所以 } b = x_1 + x_2 = \frac{2b}{3}, \text{ 故 } b = 0.$$

$$(3) \text{ 因为 } f(x) = |x+1|+|x-1| \geq |(x+1)-(x-1)| = 2, \text{ 所以 } f(x)_{\min} = 2,$$

$$\text{又 由 (2) } g(x) = -x^3 + cx,$$

$$\text{令 } g'(x) = -3x^2 + c = 0, \text{ 则 } x = \pm\sqrt{\frac{c}{3}},$$

所以 $g(x)$ 在 $[-\sqrt{\frac{c}{3}}, \sqrt{\frac{c}{3}}]$ 上单调递减, 在 $[-\infty, -\sqrt{\frac{c}{3}}]$ 上单调递增,

$$\text{因为 } f(1) > g(1), \text{ 所以 } 0 < c < 3, \text{ 即 } 0 < \sqrt{\frac{c}{3}} < 1,$$

则满足题意只需,

$$\text{所以 } 1 \leq c < 3, \text{ 即 } c = 1 \text{ 或 } 2.$$

$$7. (1) f(x) = x^2 + 2x + 2; (2) (-\frac{4}{27}, 0).$$

【分析】(1) 设 $f(x) = ax^2 + bx + c$, 根据 $f(x) = f(-2-x)$ 可得 $f(x)$ 的对称轴, 再根据 $f(0) = 2$, 结合导函数的图象与直线 $y = 2x$ 平行列式求解参数即可

(2) 利用导数判断函数 $g(x)$ 的单调性, 求出极值点, 即可得与直线 $y = m$ 有三个公共点的 m 的取值范围.

【详解】(1) 设 $f(x) = ax^2 + bx + c$ ，因为 $f(x)$ 满足 $f(0) = 2$ ，故 $c = 2$ ，又 $f(x) = f(-2-x)$ ，所以图像的对称轴 $-\frac{b}{2a} = -1$ ，即 $b = 2a$

导函数 $f'(x) = 2ax + b$ ，因为导函数图象与直线 $y = 2x$ 平行，故 $2a = 2$ ，从而解得： $a = 1, b = 2, c = 2$ ，

$$\therefore f(x) = x^2 + 2x + 2$$

$$(2) \quad g(x) = xf(x) - x = x^3 + 2x^2 + x, \quad \therefore g'(x) = 3x^2 + 4x + 1 = (3x+1)(x+1),$$

设 $g'(x) \geq 0$ 则有 $x \leq -1$ 或 $x \geq -\frac{1}{3}$

$\therefore g(x)$ 在 $(-\infty, -1]$ 、 $[-\frac{1}{3}, +\infty)$ 上递增，在 $(-1, -\frac{1}{3})$ 上递减，

且 $g(-1) = 0, g(-\frac{1}{3}) = -\frac{4}{27}$ ，又函数 $g(x) = xf(x) - x$ 的图象与直线 $y = m$ 有三个公共点，故 m 的取值范围为

$$\left(-\frac{4}{27}, 0\right)$$

8. (I) (1) 单调递增区间为 $(-\infty, +\infty)$ ， m 的取值范围是 $[0, +\infty)$ ；(II) 答案见解析.

【分析】(I)

(1) 根据 $t = 1, f(1) = 1$ 求出 m 的值，然后求导即可.

(2) 参变分离转化为函数的最值问题.

(II) $f(x) = (x-t)^3 + m$ 的对称中心为 (t, m) ，故合情猜测，若直线 l_1 与 l_2 平行，则点 A 与点 B 关于点 (t, m) 对称. 然后对猜测进行证明，首先求其两点处的导数，即两切线的斜率，利用平行及斜率相等，证明 $x_1 + x_2 = 2t, f(x_1) + f(x_2) = 2m$

【详解】(I)

(1) 因为 $f(1) = 1$ ，所以 $m = 1$

$$\text{则 } f(x) = (x-1)^3 + 1 = x^3 - 3x^2 + 3x,$$

而恒成立，

所以函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty, +\infty)$

(2) 不等式 $f(x) \geq x^3 - 1$ 在区间 $[1, 2]$ 上有解，

即不等式 $3x^2 - 3x - m \leq 0$ 在区间 $[1, 2]$ 上有解，

即不等式 $m \geq 3x^2 - 3x$ 在区间 $[1, 2]$ 上有解，

等价于 m 不小于 $3x^2 - 3x$ 在区间 $[1, 2]$ 上的最小值

$$\text{因为 } x \in [1, 2] \text{ 时， } 3x^2 - 3x = 3\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{3}{4} \in [0, 6]$$

所以 m 的取值范围是 $[0, +\infty)$

(II) 因为 $f(x) = x^3$ 的对称中心为 $(0, 0)$,

而 $f(x) = (x-t)^3 + m$ 可以由 $f(x) = x^3$ 经平移得到,

所以 $f(x) = (x-t)^3 + m$ 的对称中心为, 故合情猜测, 若直线 l_1 与 l_2 平行,

则点 A 与点 B 关于点对称

对猜想证明如下:

因为 $f(x) = (x-t)^3 + m = x^3 - 3tx^2 + 3t^2x - t^3 + m$,

所以 $f'(x) = 3x^2 - 6tx + 3t^2 = 3(x-t)^2$,

所以 l_1, l_2 的斜率分别为,

又直线 l_1 与 l_2 平行, 所以 $k_1 = k_2$, 即 $(x_1 - t)^2 = (x_2 - t)^2$

因为 $x_1 \neq x_2$, 所以, $x_1 - t = -(x_2 - t)$

从而,

所以 $f(x_1) + f(x_2) = (x_1 - t)^3 + m + (x_2 - t)^3 + m = -(x_2 - t)^3 + m + (x_2 - t)^3 + m = 2m$.

又 $x_1 + x_2 = 2t$,

所以点 $A(x_1, f(x_1))$, $B(x_2, f(x_2))$ ($x_1 \neq x_2$) 关于点对称.

故当直线 l_1 与 l_2 平行时, 点 A 与点 B 关于点对称

【点睛】结论点睛: 三次函数图像都有对称中心.

9. (1)

(2) 证明见解析

【分析】(1) 先利用导数判断导函数的单调性, 再结合函数的单调性, 即可求解;

(2) 首先求曲线 $y = \ln x$ 的切线方程, 再与曲线 $y = a\left(x - \frac{1}{x}\right)$ 的方程联立, 再根据判别式构造函数,

$g(t) = (\ln t - 1)^2 - 4a\left(\frac{1}{t} - a\right)$, 利用导数判断函数的单调性, 并结合零点存在性定理判断函数有 3 个零点.

【详解】(1) $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, $f'(x) = a\left(\ln x + \frac{x+1}{x}\right) - 1$,

令 $F(x) = a\left(\ln x + \frac{x+1}{x}\right) - 1$, $F'(x) = a\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right) = \frac{a(x-1)}{x^2}$,

令 $F'(x) < 0$ ，得 $0 < x < 1$ ；令 $F'(x) > 0$ ，得 $x > 1$ ，

故 $f'(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，在上单调递增，

从而 $f'(x)_{\min} = f'(1) = 2a - 1 \geq 0, a \geq \frac{1}{2}$ ，故 a 的取值范围是.

(2) 设曲线 $y = \ln x$ 的切点为 $(t, \ln t)$, $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ ，

则曲线 $y = \ln x$ 在点处的切线方程为 $y - \ln t = \frac{1}{t}(x - t)$.

$$\text{联立} \begin{cases} y - \ln t = \frac{1}{t}(x - t) \\ y = a\left(x - \frac{1}{x}\right) \end{cases}, \text{得} \left(\frac{1}{t} - a\right)x^2 + (\ln t - 1)x + a = 0,$$

$$\text{必有} \begin{cases} \frac{1}{t} - a \neq 0 \\ \Delta = (\ln t - 1)^2 - 4a\left(\frac{1}{t} - a\right) = 0 \end{cases},$$

记函数 $g(t) = (\ln t - 1)^2 - 4a\left(\frac{1}{t} - a\right)$ ，由题，

故当 $g(t) = 0$ 时， $t \neq \frac{1}{a}, \frac{1}{t} - a \neq 0$.

$$g'(t) = \frac{2(\ln t - 1)}{t} + \frac{4a}{t^2} = \frac{2t(\ln t - 1) + 4a}{t^2}$$

记 $h(t) = 2t(\ln t - 1) + 4a, h'(t) = 2(\ln t - 1) + 2 = 2\ln t$ ，

令 $h'(t) < 0$ ，得 $0 < t < 1$ ；令 $h'(t) > 0$ ，得 $t > 1$ ，

故 $h(t)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，在上单调递增.

当 $0 < a < \frac{1}{2}$ ，且 $a \neq \frac{1}{e}$ 时， $h(1) = 4a - 2 < 0, h(e) = 4a > 0$ ，

当 $t \rightarrow 0$ 时， $h(t) \rightarrow 4a$ ，故存在 $0 < t_1 < 1 < t_2 < e$ ，使得 $h(t_1) = h(t_2) = 0$ ，

当，或 $t > t_2$ 时，；当时， $h(t) < 0, g'(t) < 0$ ，

故 $g(t)$ 在上单调递增，在上单调递减.

由 $h(t_1) = 0$ ，得 $a = \frac{t_1(1 - \ln t_1)}{2}$ ，代入并整理得：

$$g(t_1) = (\ln t_1 - 1) \left[\frac{1}{2}(t_1^2 + 1) \ln t_1^2 - t_1^2 + 1 \right]$$

$$\text{同理 } g(t_2) = (\ln t_2 - 1) \left[\frac{1}{2}(t_2^2 + 1) \ln t_2^2 - t_2^2 + 1 \right],$$

记 $\varphi(x) = \frac{1}{2}(x+1)\ln x - x + 1$ ，由 (1) 知 $\varphi(x)$ 为增函数，

且 $0 < t_1 < 1 < t_2 < e$ ，

$\therefore \varphi(t_1^2) < \varphi(1) = 0, \varphi(t_2^2) > \varphi(1) = 0$ ， $\therefore g(t_1) = (\ln t_1 - 1)\varphi(t_1^2) > 0, g(t_2) = (\ln t_2 - 1)\varphi(t_2^2) < 0$

又 $Q g(e^2) = 1 - 4a\left(\frac{1}{e^2} - a\right) > 1 - \frac{4a}{e^2} > 1 - \frac{2}{e^2} > 0$ ，当 $t \rightarrow 0$ 时， $g(t) \rightarrow -\infty$ ，

$\therefore g(t)$ 有三个零点，

存在三条直线 l_1, l_2, l_3 是曲线 $y = \ln x$ 的切线，也是曲线 $y = a\left(x - \frac{1}{x}\right)$ 的切线。

【点睛】关键点睛：本题考查根据函数的导数判断函数的单调性，以及切线，零点，函数性质的综合应用问题，推理难度较大，第二问的关键是根据判别式来设函数 $g(t) = (\ln t - 1)^2 - 4a\left(\frac{1}{t} - a\right)$ ，转化为函数有 3 个零点问题。

10. (1) $(1+ae)x - y - 1 = 0$ (2) $g(x)$ 与 $h(x)$ 的图像有 2 交点 (3) 证明见解析

【解析】(1) 利用导数求得切线的斜率，结合切点坐标求得切线方程。

(2) 构造函数 $f(x) = g(x) - h(x)$ ，利用导数研究 $f(x)$ 的单调区间和零点，由此判断 $g(x)$ 与 $h(x)$ 的图像的交点个数。

(3) 结合 (2) 以及题意得到，化简得到，利用放缩法以及取对数运算，化简证得成立。

【详解】(1) 由 $g'(x) = \frac{1}{x} + ae^x$ 得切线的斜率为 $k = g'(1) = 1 + ae$ ，切点为。

$\therefore$ 切线方程为： $y - ae = (1 + ae)(x - 1)$ ，

$\therefore$ 所求切线的一般式方程为 $(1 + ae)x - y - 1 = 0$ 。

(2) 令 $f(x) = g(x) - h(x) = \ln x + ae^x - axe^x$ 由题意可知， $f(x)$ 的定义域为，

且 $f'(x) = \frac{1}{x} + ae^x - a(1+x)e^x = \frac{1 - ax^2e^x}{x}$ 。

令 $m(x) = 1 - ax^2e^x$ ，得 $m'(x) = -a(2xe^x + x^2e^x)$ ，由 $0 < a < \frac{1}{e}$ ， $x > 0$ 得，可知 $m(x)$ 在内单调递减，

又 $m(1) = 1 - ae > 0$ ，且 $m\left(\ln \frac{1}{a}\right) = 1 - a\left(\ln \frac{1}{a}\right)^2 \frac{1}{a} = 1 - \left(\ln \frac{1}{a}\right)^2 < 0$ ，

故 $m(x) = 0$ 在内有唯一解，从而 $f'(x) = 0$ 在内有唯一解，不妨设为 x_0 ，

则 $1 < x_0 < \ln \frac{1}{a}$, 当 $x \in (0, x_0)$ 时, $f'(x) = \frac{m(x)}{x} > \frac{m(x_0)}{x} = 0$, $\therefore f(x)$ 在内单调递增;

当 $x \in (x_0, +\infty)$ 时, $f'(x) = \frac{m(x)}{x} < \frac{m(x_0)}{x} = 0$, $\therefore f(x)$ 在 $(x_0, +\infty)$ 内单调递减,

因此 x_0 是 $f(x)$ 的唯一极值点.

令 $\varphi(x) = \ln x - x + 1$, 则当 $x > 1$ 时, $\varphi'(x) = \frac{1}{x} - 1 < 0$, 故 $\varphi(x)$ 在内单调递减,

$\therefore$ 当 $x > 1$ 时, 即,

从而 $f\left(\ln \frac{1}{a}\right) = \ln \ln \frac{1}{a} + a\left(1 - \ln \frac{1}{a}\right)e^{\ln \frac{1}{a}} = \ln \ln \frac{1}{a} - \ln \frac{1}{a} + 1 = \varphi\left(\ln \frac{1}{a}\right) < 0$,

又因为, $\therefore f(x)$ 在 $(x_0, +\infty)$ 内有唯一零点,

又 $f(x)$ 在内有唯一零点 1, 从而, $f(x)$ 在内恰有两个零点.

所以 $g(x)$ 与 $h(x)$ 的图像有 2 交点;

(3) 由 (2) 及题意, 即

从而 $\ln x_1 = \frac{x_1 - 1}{x_0^2} e^{x_1 - x_0}$, 即,

$\therefore$ 当 $x > 1$ 时, 又 $x_1 > x_0 > 1$, 故 $e^{x_1 - x_0} < \frac{x_0^2(x_1 - 1)}{x_1 - 1} = x_0^2$,

两边取对数, 得 $\ln e^{x_1 - x_0} < \ln x_0^2$,

于是 $x_1 - x_0 < 2 \ln x_0 < 2(x_0 - 1)$, 整理得, 命题得证.

【点睛】本小题主要考查利用导数求切线方程, 考查利用导数研究两个函数图像的交点个数, 考查利用导数研究函数的单调性和极值, 考查利用导数证明不等式, 考查化归与转化的数学思想方法, 考查运算求解能力, 属于难题.

11. (1) $3x - y - 4 = 0$; (2) 证明见解析.

【分析】(1) 求出导数, 即可求出 $f'(1)$, 即为切点出切线的斜率, 结合点斜式方程即可求出切线方程.

(2) 令 $g(x) = (x-2)^3 - 3(x-2)$, $x > 0$, $h(x) = e^{x-1} - 2\ln x + x$, 结合导数探究两函数的单调性即可得当 $0 < x \leq 3$

时, 设 $m(x) = h(x) - g(x) = e^{x-1} - 2\ln x - (x-2)^3 + 4x - 6$, 结合导数求函数的单调性, 从而可求出最小值, 即可

得当 $x > 3$ 时, $h(x) > g(x)$, 从而可证明曲线 $y = f(x)$ 不落在 $y = (x-2)^3$ 图像的下方.

【详解】(1) 解: 由题意知, $f'(x) = e^{x-1} - \frac{2}{x} + 4$, 故 $f'(1) = 3$, 而 $f(1) = -1$,

故所求切线方程为 $y+1=3(x-1)$ ，即 $3x-y-4=0$ 。

(2) 证明：要证曲线 $y=f(x)$ 不落在 $y=(x-2)^3$ 图像的下方，

即证，即证 $e^{x-1}-2\ln x+x \geq (x-2)^3-3(x-2)$ 。

令 $g(x)=(x-2)^3-3(x-2)$ ， $x>0$ ， $h(x)=e^{x-1}-2\ln x+x$ 。 $g'(x)=3(x-1)(x-3)$ ，

令 $g'(x)<0$ ，得 $1<x<3$ ；令 $g'(x)>0$ ，得 $0<x<1$ 或 $x>3$ ，

所以当 $x=1$ 时， $g(x)$ 取得极大值，且极大值为 2。而 $h'(x)=e^{x-1}-\frac{2}{x}+1$ ，

易知 $h'(x)=e^{x-1}-\frac{2}{x}+1$ 在上单调递增，且 $h'(1)=0$ 。

令 $h'(x)<0$ ，得 $0<x<1$ ，令 $h'(x)>0$ ，得 $x>1$ ，故 $h(x)_{\min}=h(1)=2$ 。

故当 $0<x\leq 3$ 时，设 $m(x)=h(x)-g(x)=e^{x-1}-2\ln x-(x-2)^3+4x-6$ ，

则 $m'(x)=e^{x-1}-\frac{2}{x}-3(x-2)^2+4$ 。设 $p(x)=m'(x)$ ，则 $p'(x)=e^{x-1}+\frac{2}{x^2}-6(x-2)$ 。

设，则，易知 $q'(x)$ 在上单调递增，

则，则 $q(x)$ 在上单调递增，

从而，则 $m'(x)$ 在上单调递增，

则，从而 $m(x)$ 在上单调递增，

所以当 $x\in(3,+\infty)$ 时， $m(x)>m(3)=e^2+5-2\ln 3>0$ ，故当 $x>3$ 时， $h(x)>g(x)$ 。

综上所述，当 $x\in(0,+\infty)$ 时，曲线 $y=f(x)$ 不落在 $y=(x-2)^3$ 图像的下方。

【点睛】关键点睛：

本题第二问的关键是证明 $e^{x-1}-2\ln x+x \geq (x-2)^3-3(x-2)$ 在定义域上恒成立。运用导数分别求

$g(x)=(x-2)^3-3(x-2)$ ， $x>0$ ， $h(x)=e^{x-1}-2\ln x+x$ 在 $0<x\leq 3$ 时的最值，可证原不等式；再利用多次导数求

$m(x)=h(x)-g(x)=e^{x-1}-2\ln x-(x-2)^3+4x-6$ 的单调性，可证原不等式成立。

12. (1) $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，在上单调递增；(2) 证明见解析。

【分析】(1) 首先求导令 $x=1$ 求得参数 $m=1$ ，接着讨论导函数的正负得到原函数的单调性即可；(2) 令

$h(x) = f(x) - m$ ，从而将函数图像有交点转化为 $h(x)$ 在有零点，参变分离得 $\frac{1}{m} = \frac{x + \ln x}{x^2}$ ，再转化为图像有交点的问题，令 $F(x) = \frac{x + \ln x}{x^2}, x > 0$ ，求导判断函数的单调性求出最值，最后证明 $m \geq 1$ 即可。

【详解】(1) 因为 $f(x) = \frac{x^2 - m \ln x}{x} = x - \frac{m \ln x}{x}$ ，

所以 $f'(x) = 1 - \frac{\frac{m}{x} \cdot x - m \ln x}{x^2} = \frac{x^2 + m \ln x - m}{x^2}, x > 0$ ，

则 $f'(1) = \frac{1^2 + m \ln 1 - m}{1^2} = 0 \Rightarrow m = 1$ ，

所以 $f'(x) = \frac{x^2 + \ln x - 1}{x^2}, x > 0$ ，

令 $g(x) = x^2 + \ln x - 1, x > 0$ ，

显然， $g(x)$ 在上单调递增，

又 $g(1) = 0$ ，

所以当 $0 < x < 1$ 时， $f'(x) < 0$ ，函数 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减，

当 $x > 1$ 时， $f'(x) > 0$ ，函数 $f(x)$ 在上单调递增；

(2) 证明：令 $h(x) = f(x) - m$ ，

当 $m > 0$ 时，曲线 $y = f(x)$ 与直线 $y = m$ 有交点即函数 $h(x)$ 在有零点，

由 $h(x) = 0$ 得， $\frac{1}{m} = \frac{x + \ln x}{x^2}$ ，

令 $F(x) = \frac{x + \ln x}{x^2}, x > 0$ ，

所以直线 $y = \frac{1}{m}$ 与 $F(x)$ 图像有交点

则 $F'(x) = \frac{x^2 \left(1 + \frac{1}{x}\right) - 2x(x + \ln x)}{x^4}$

$= \frac{-x - 2 \ln x + 1}{x^3}, x > 0$ ，

令 $\varphi(x) = -x - 2 \ln x + 1$ ，

显然 $\varphi(x)$ 在上单调递减，且 $\varphi(1) = 0$ ，

所以 $F(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递增，在 $(1, +\infty)$ 上单调递减，

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/445114320040011334>