第四节 定积分的几何应用

一、定积分的元素法

二、平面图形的面积

三、体积

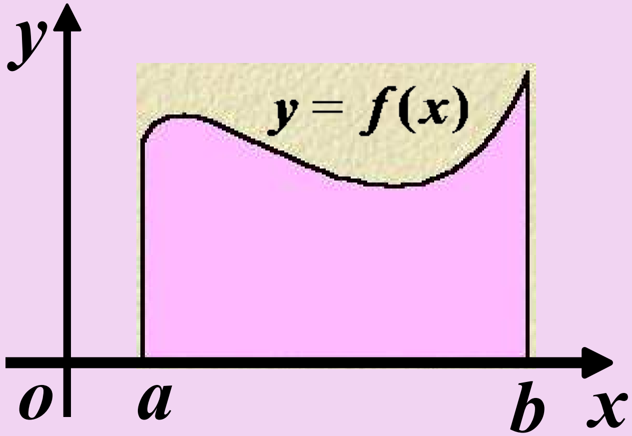
四、内容小结

一、定积分的元素法

什么问题可以用定积分解决？

回顾　曲边梯形求面积的问题

曲边梯形由连续曲线 $y=f(x)(f(x)\geq 0)$、x轴与两条直线$x=a$、$x=b$所围成。



$$A=\int_a^b f(x)dx$$

面积表示为定积分的步骤如下

（1）把区间$[a,b]$分成n个长度分别为 Δx_i 的小区间，

那么相应的曲边梯形被分为 n 个小窄曲边梯形，

第 i 个小窄曲边梯形的面积为ΔA_i，则$A=\sum_{i=1}^{n}\Delta A_i$.

（2）计算ΔA_i的近似值

$$\Delta A_i \approx f(\xi_i)\Delta x_i \quad \xi_i \in \Delta x_i$$

（3）求和，得A的近似值 $A \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$.

（4） 求极限，得A的精确值

$$A=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i=\int_a^b f(x)dx$$

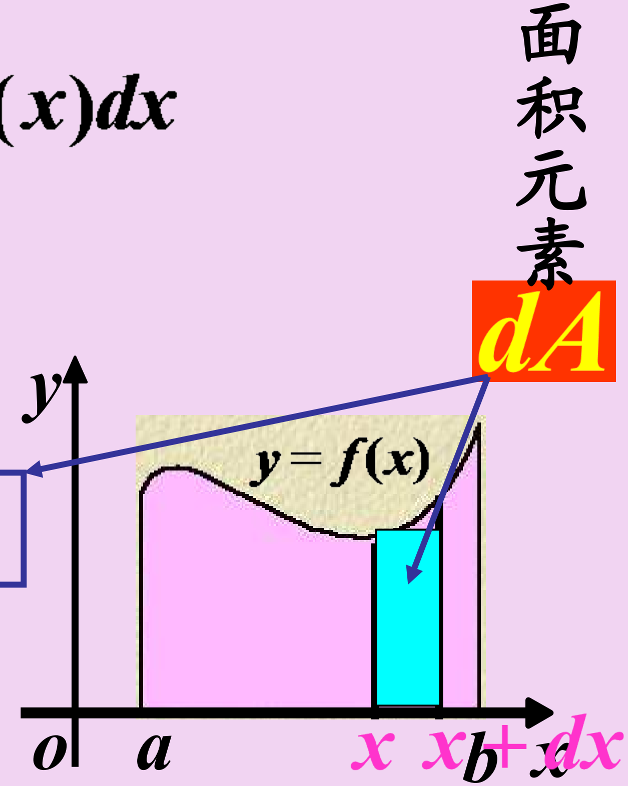
提示 若用 ΔA 表示任一小区间

$[x, x+\Delta x]$上的窄曲边梯形的面积

则 $A=\sum \Delta A$，并取 $\Delta A\approx \boxed{f(x)dx}$

于是 $A\approx\sum f(x)dx$

$$A=\lim\sum f(x)dx=\int_a^b f(x)dx.$$



1、什么问题可以用定积分解决？

1) 所求量 U 是与区间$[a\,,b]$上的某分布 $f(x)$ 有关的一个整体量；

2) U 对区间 $[a\,,b]$ 具有可加性，即可通过

“大化小, 常代变, 近似和, 取极限”

表示为 $U=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$

定积分定义 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$

2、如何应用定积分解决问题？

第一步 利用“化整为零，以常代变”求出局部量的近似值——微分表达式

$$\mathrm{d}U = f(x)\,\mathrm{d}x$$

第二步 利用“积零为整，无限累加”求出整体量的精确值——积分表达式

$$U = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

这种分析方法成为**元素法**(或**微元法**)

元素的几何形状常取为：条，带，段，环，扇，片，壳等

元素法的一般步骤:

1）根据问题的具体情况，选取一个变量，例如 x 为积分变量，并确定它的变化区间 $[a,b]$;

2）设想把区间 $[a,b]$ 分成n个小区间，取其中任一小区间并记为 $[x,x+dx]$，求出相应于这小区间的部分量 ΔU 的近似值.如果 ΔU 能近似地表示为 $[a,b]$ 上的一个连续函数在 x 处的值 $f(x)$ 与 dx 的乘积，就把 $f(x)dx$ 称为量 U 的元素且记作 dU，即 $dU=f(x)dx$;

3）以所求量U的元素$f(x)dx$为被积表达式，在区间$[a,b]$上作定积分，得$U=\int_a^b f(x)dx.$

即为所求量 U 的积分表达式.

这个方法通常叫做元素法.

应用方向:

平面图形的面积；体积；平面曲线的弧长；功；水压力；引力等.

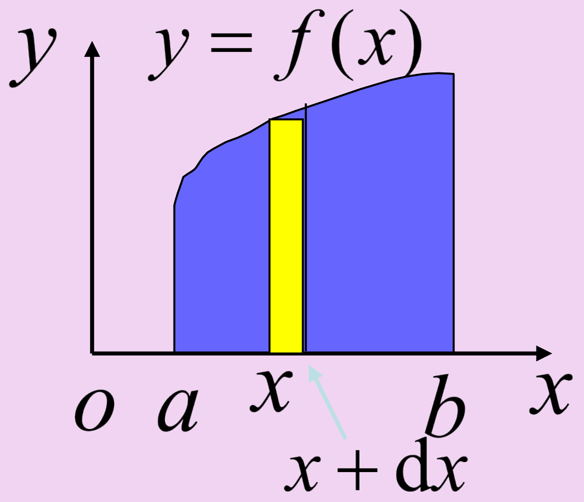
二、平面图形的面积

1. 直角坐标情形

设曲线 $y = f(x)\ (\geq 0)$ 与直线 $x = a, x = b\ (a < b)$ 及 x 轴所围曲边梯形面积为 A，则

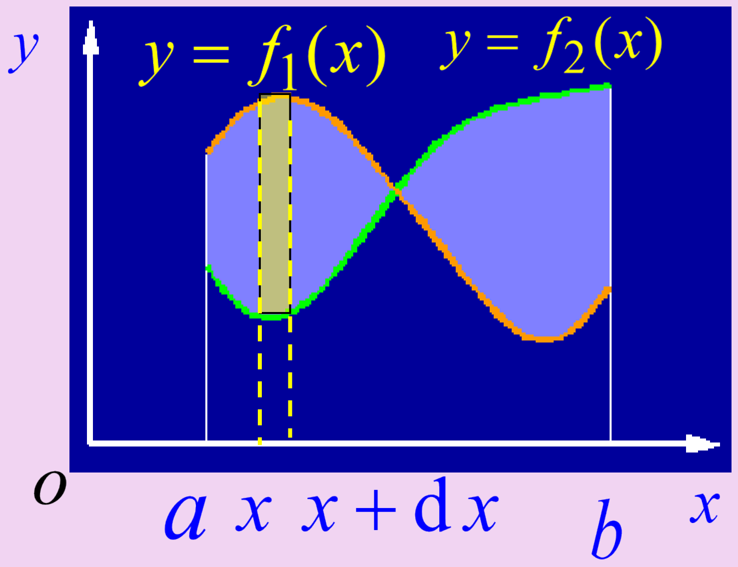
$$\mathrm{d}A = f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$A = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$



右下图所示图形面积为

$$A = \int_a^b \left| f_1(x) - f_2(x) \right| \mathrm{d}x$$



例1. 计算两条抛物线 $y^2 = x,\ y = x^2$ 在第一象限所围所围图形的面积 .

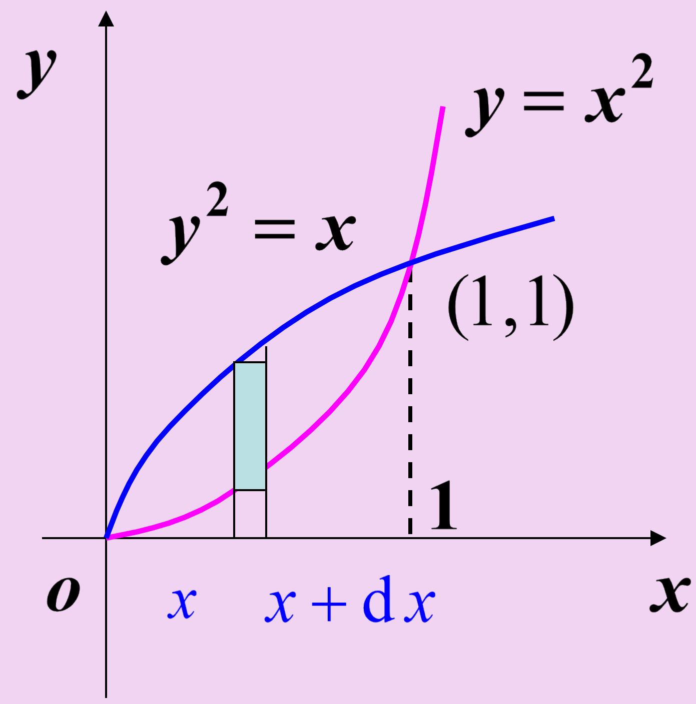
解 由 $\begin{cases} y^2 = x \\ y = x^2 \end{cases}$

得交点 $(0,0)$, $(1,1)$

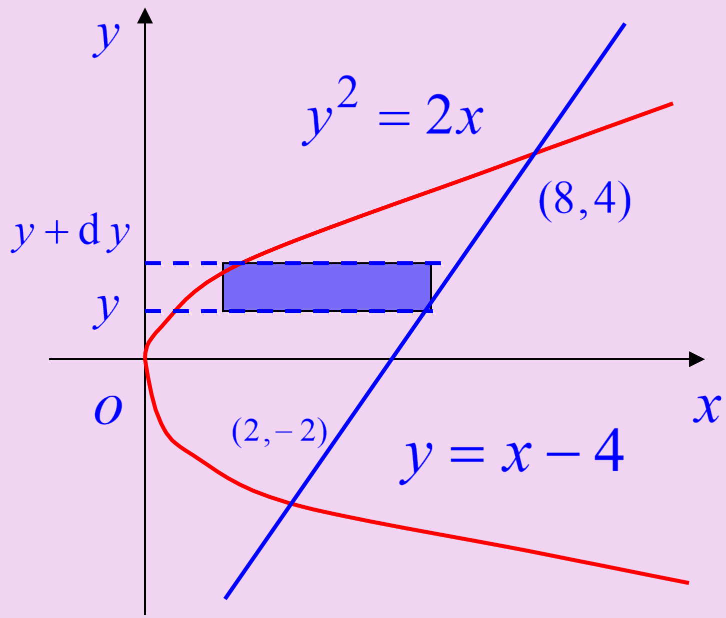
$\therefore\quad A = \int_0^1 \left(\sqrt{x} - x^2\right) \mathrm{d}x$

$= \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3}x^3\right]_0^1$

$= \frac{1}{3}$



例2. 计算抛物线 $y^2=2x$ 与直线 $y=x-4$ 所围图形的面积.



解 由 $\begin{cases} y^2=2x \\ y=x-4 \end{cases}$ 得交点

$$(2,-2),(8,4)$$

为简便计算,选取 y 作积分变量,则有

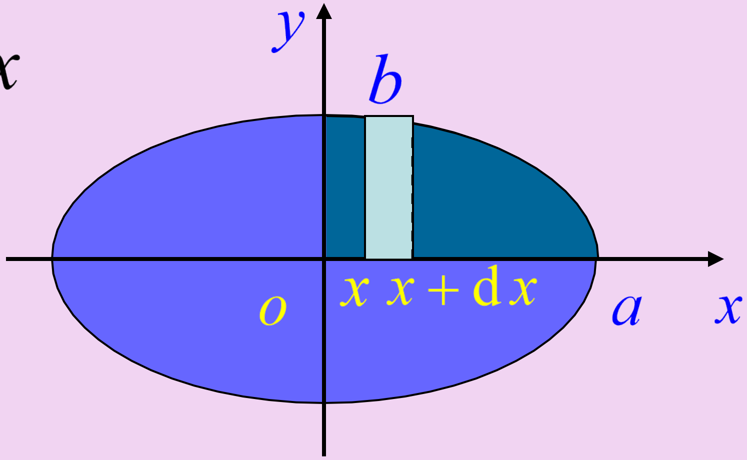
$$\therefore \quad A=\int_{-2}^{4}(y+4-\tfrac{1}{2}y^2)\,\mathrm{d}y$$

$$=\left[\tfrac{1}{2}y^2+4y-\tfrac{1}{6}y^3\right]_{-2}^{4}=18$$

例3. 求椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 所围图形的面积 .

解 利用对称性，有 $\mathrm{d}A = y\,\mathrm{d}x$

$$A = 4\int_0^a y\,\mathrm{d}x$$



利用椭圆的参数方程

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases} \quad (0 \le t \le 2\pi)$$

应用定积分换元法得

$$A = 4\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} b\sin t\cdot(-a\sin t)\,\mathrm{d}t = 4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\,\mathrm{d}t$$

$$= 4ab\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \pi ab$$

当 $a = b$ 时得圆面积公式

一般地，当曲边梯形的曲边由参数方程

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$$

给出时，起点和终点的参数值 t_1 , t_2

则曲边梯形面积 $A = \int_{t_1}^{t_2} \psi(t) \cdot \varphi'(t) \, \mathrm{d}t$

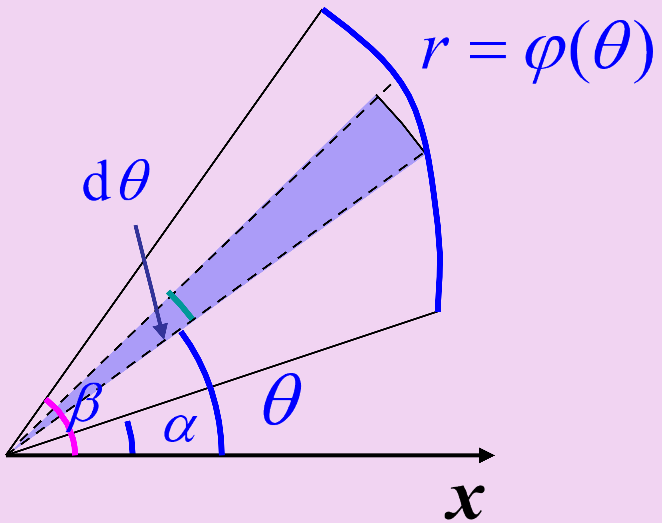
2. 极坐标情形

设 $\varphi(\theta)\in C[\alpha,\beta]$, $\varphi(\theta)\ge 0$, 求由曲线 $r=\varphi(\theta)$ 及射线 $\theta=\alpha,\theta=\beta$ 围成的曲边扇形的面积.

在区间$[\alpha,\beta]$上任取小区间 $[\theta,\theta+\mathrm{d}\theta]$

则对应该小区间上曲边扇形面积的近似值为

$$\mathrm{d}A=\frac{1}{2}[\varphi(\theta)]^2\,\mathrm{d}\theta$$



所求曲边扇形的面积为

$$A=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\varphi^2(\theta)\,\mathrm{d}\theta$$

例4. 计算阿基米德螺线 $r = a\theta \ (a>0)$ 对应 θ 从 0 变到 2π 所围图形面积 .

解 $$A = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}(a\theta)^2 \, \mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{a^2}{2}\left[\frac{1}{3}\theta^3\right]_0^{2\pi}$$

$$= \frac{4}{3}\pi^3 a^2$$