专题 8-1　几何体的外接球与内接球，阿氏球等 17 类题型

模块一　热点题型解读（目录）

【题型 1】球的截面问题

【题型 2】可以补成长方体的外接球模型

【题型 3】直棱柱和圆柱外接球模型

【题型 4】正四面体的内切球和外接球结论

【题型 5】直棱锥外接球模型（一条侧棱垂直底面）

【题型 6】球心在高上（圆锥形）

【题型 7】圆台，棱台外接球模型

【题型 8】棱锥外接球之切瓜模型（一个面垂直外接圆直径）

【题型 9】两个外心+中垂线确定球心

【题型 10】外接球之共斜边拼接模型

【题型 11】外接球之二面角模型

【题型 12】内切球之棱锥，圆锥模型

【题型 13】内切球之圆台，棱台模型

【题型 14】多球相切问题

【题型 15】棱切球问题

【题型 16】构造球解决空间中动点构成的直角问题

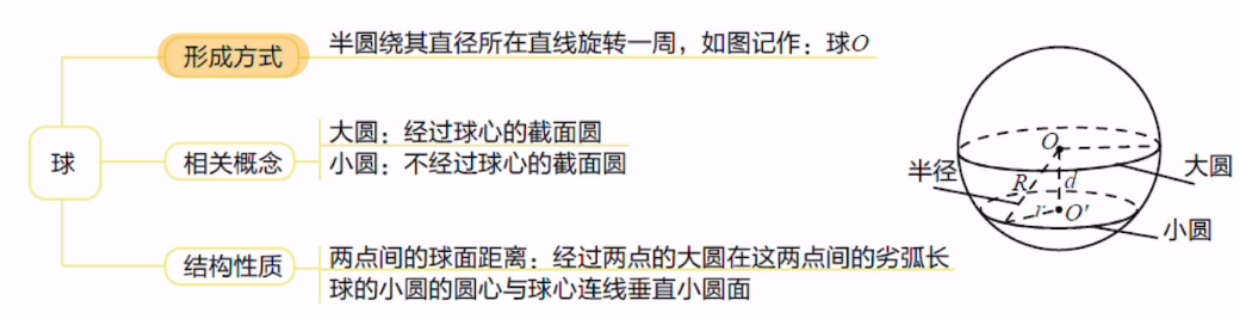
【题型 17】阿氏球问题

模块二　核心题型·举一反三

【题型 1】球的截面问题

基础知识

球体的相关计算关键是找出球心到相关平面的距离，再结合勾股定理计算求值



【例 1】（2020·全国 2 卷 T11）已知$\triangle ABC$是面积为$\frac{9\sqrt{3}}{4}$的等边三角形，且其顶点都在球O的球面上.若球O的表面积为16π，则O到平面ABC的距离为（　）

A．$\sqrt{3}$　　B．$\frac{3}{2}$　　C．1　　D．$\frac{\sqrt{3}}{2}$

【例 2】（24-25 高二上·贵州遵义·阶段练习）已知A，B，C，D四点都在球O的球面上，且A，B，C三点所在平面经过球心，$AB=4\sqrt{3}$，$\angle ACB=\frac{\pi}{3}$，则点D到平面ABC的距离的最大值为_____，球O的表面积为_____.

【例 3】（23-24 高三下·广东江门·阶段练习）已知正四面体$A-BCD$的内切球的表面积为36π，过该四面体的一条棱以及球心的平面截正四面体$A-BCD$，则所得截面的面积为_____.

【巩固练习 1】已知$\triangle ABC$是面积为$\frac{9\sqrt{3}}{4}$的等边三角形，且其顶点都在球O的球面上，若球O的表面积为28π，则点O到平面ABC的距离为_____.

【巩固练习 2】已知过球面上A，B，C三点的截面和球心的距离为球半径的一半，且$AB=BC=1, AC=\sqrt{3}$，则球的表面积是_____.

【巩固练习 3】（2024·辽宁丹东·一模）已知球O的直径为AB，C，D为球面上的两点，点M在AB上，且$AM=3MB$，$AB\perp$平面MCD，若$\triangle MCD$是边长为$\sqrt{3}$的等边三角形，则球心O到平面BCD的距离为_____.

【题型 2】可以补成长方体的外接球模型

基础知识

一、长方体外接球：长方体的外接球的球心为其体对角线的中点，半径为体对角线长的一半.

二、补成长方体

（1）若三棱锥中有三条棱互相垂直，则可将其放入某个长方体内，如下图所示.

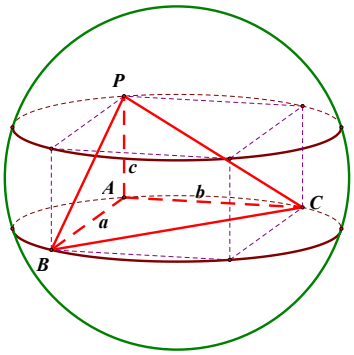


图1-1

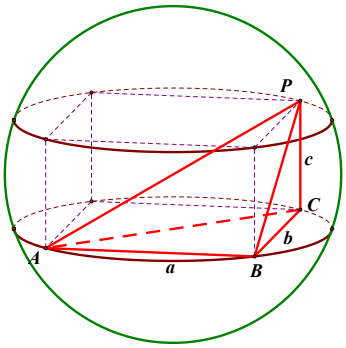


图1-2

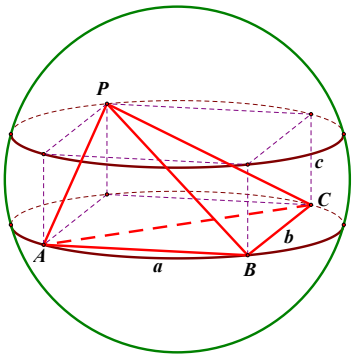


图1-3

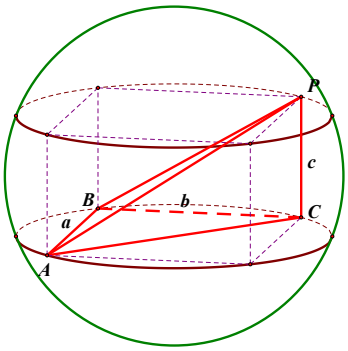


图1-4

（2）若三棱锥的对棱两两相等，则可将其放入某个长方体内，如图 4 所示

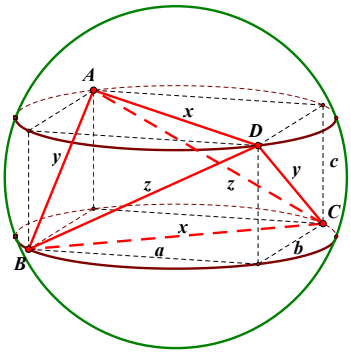
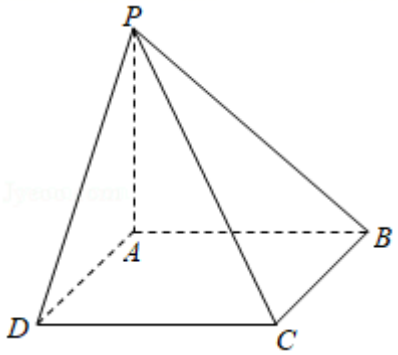


图2-1

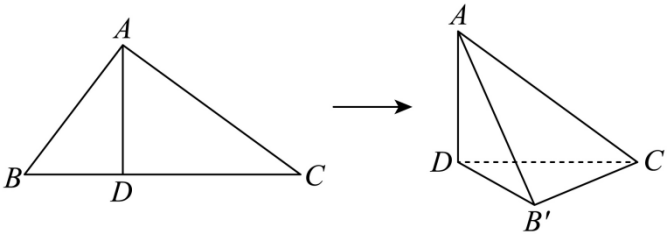
注：《九章算术》中的三棱锥均可补为长方体

【例 1】我国古代数学名著《九章算术》中将底面为矩形且有一侧棱垂直于底面的四棱锥称为“阳马”，现有一“阳马”如图所示，$PA\perp$平面$ABCD$，$PA=5$，$AB=3$，$BC=4$，则该“阳马”外接球的表面积为(　　)

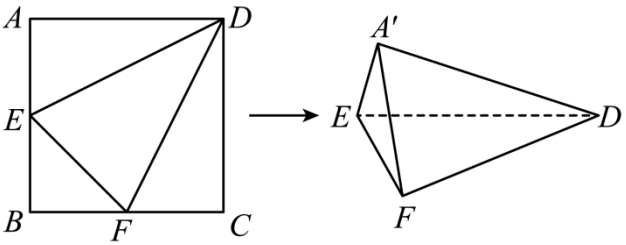


A．$\frac{125\sqrt{2}\pi}{3}$　　B．50π　　C．100π　　D．$\frac{500\pi}{3}$

【例 2】在中国古代数学著作《九章算术》中，鳖臑是指四个面都是直角三角形的四面体．如图，在直角$\triangle ABC$中，AD为斜边BC上的高，$AB=3,AC=4$，现将$\triangle ABD$沿AD翻折成$\triangle AB'D$，使得四面体$AB'CD$为一个鳖臑，则该鳖臑外接球的表面积为_____



【例 3】如图，在边长为 2 的正方形$ABCD$中，E，F分别是AB，BC的中点，将$\triangle AED$，$\triangle BEF$，$\triangle DCF$分别沿DE，EF，DF折起，使得A,B,C三点重合于点A'，若三棱锥$A'-EFD$的所有顶点均在球O的球面上，则球O的体积为（　）



A．$\frac{3}{2}\pi$　　B．$\frac{3\sqrt{6}}{4}\pi$　　C．$\sqrt{6}\pi$　　D．$\frac{4\sqrt{6}}{3}\pi$

【例 4】在四面体$ABCD$中，若$AB=CD=\sqrt{3}$，$AC=BD=2$，$AD=BC=\sqrt{5}$，则四面体$ABCD$的外接球的表面积为（　　）

A．2π　　B．4π　　C．6π　　D．8π

【巩固练习 1】（24-25 高三上·江苏泰州·期中）在中国古代数学著作《九章算术》中，鳖臑是指四个面都是直角三角形的四面体．在直角$\triangle ABC$中，AD为斜边BC上的高，$AB=1$，$AC=\sqrt{3}$，现将$\triangle ABD$沿AD翻折成$\triangle AB'D$，使得四面体$AB'CD$为一个鳖臑，则该鳖臑外接球的表面积为（　）

A．$\frac{5\pi}{2}$　　B．5π　　C．3π　　D．$\frac{13\pi}{4}$

【巩固练习 2】将边长为$2\sqrt{3}$的正方形纸片折成一个三棱锥，使三棱锥的四个面刚好可以组成该正方形纸片，若三棱锥的各顶点都在同一球面上，则该球的表面积为_____

【巩固练习 3】（2024·广东揭阳·高二校联考期中）在三棱锥$S-ABC$中，$SA=BC=5$，$SB=AC=\sqrt{41}$，$SC=AB=\sqrt{34}$，则该三棱锥的外接球表面积是（　）

A．50π　　B．100π　　C．150π　　D．200π

【题型 3】直棱柱和圆柱外接球模型

基础知识

汉堡模型（直棱柱的外接球、圆柱的外接球）

如图 1，图 2，图 3，直三棱柱内接于球（同时直棱柱也内接于圆柱，棱柱的上下底面可以是任意三角形）

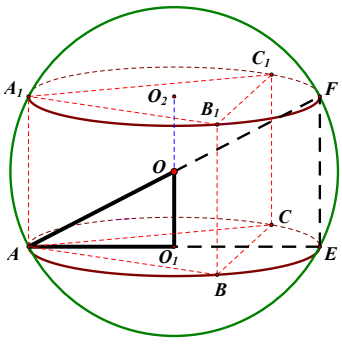


图 1

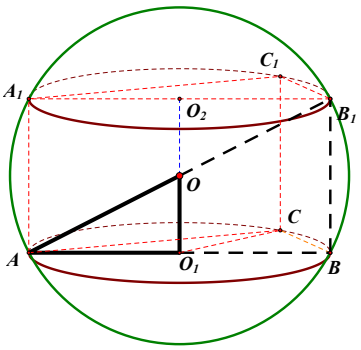


图 2

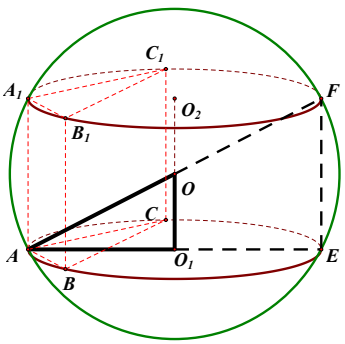


图 3

第一步：确定球心O的位置，O_1是ΔABC的外心，则$OO_1\perp$平面ABC；

第二步：算出小圆O_1的半径$AO_1=r$，$OO_1=\frac{1}{2}AA_1=\frac{1}{2}h$（$AA_1=h$也是圆柱的高）；

第三步：勾股定理：$OA^2=O_1A^2+O_1O^2\Rightarrow R^2=(\frac{h}{2})^2+r^2\Rightarrow R=\sqrt{r^2+(\frac{h}{2})^2}$，解出 R

【例 1】已知正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 所有棱长都为 6，则此三棱柱外接球的表面积为（　）

A．48π　　B．60π　　C．64π　　D．84π

【例 2】设直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的所有顶点都在一个表面积是 40π 的球面上，且 $AB=AC=AA_1,\angle BAC=120°$，则此直三棱柱的表面积是（　）

A．$16+8\sqrt{3}$　　B．$8+12\sqrt{3}$　　C．$8+16\sqrt{3}$　　D．$16+12\sqrt{3}$

【巩固练习 1】（24-25 高三上·安徽亳州·开学考试）已知圆柱的底面直径为 2，它的两个底面的圆周都在同一个体积为 $\frac{20}{3}\sqrt{5}\pi$ 的球面上，该圆柱的侧面积为（　）

A．8π　　B．6π　　C．5π　　D．4π

【巩固练习 2】在三棱锥 $P-ABC$ 中，$PA\perp$面 ABC，$\triangle ABC$ 为等边三角形，且 $PA=AB=\sqrt{3}$，则三棱锥 $P-ABC$ 的外接球的表面积为_____.

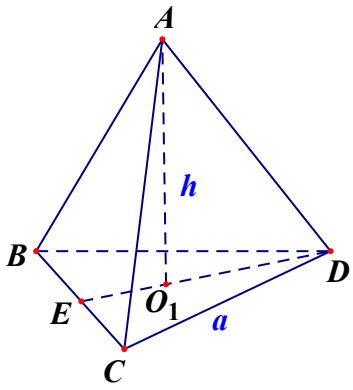
【巩固练习 3】已知圆柱的轴截面为正方形，其外接球为球 O，球 O 的表面积为 8π，则该圆柱的体积为（　）

A．$\frac{\sqrt{2}}{2}\pi$　　B．$\sqrt{2}\pi$　　C．2π　　D．$2\sqrt{2}\pi$

【题型 4】正四面体的内切球和外接球结论

基础知识

在棱长为 a 的正四面体中



设正四面体 $ABCD$ 的的棱长为 a，则有

1、正四面体的高为 $h=\frac{\sqrt{6}}{3}a$

2、正四面体外接球半径为 $R=\frac{\sqrt{6}}{4}a$

3、正四面体内切球半径为 $r=\frac{\sqrt{6}}{12}a$

4、正四面体体积 $V=\frac{\sqrt{2}}{12}a^3$

【例 1】（2024·湖北宜昌·宜昌市夷陵中学校考模拟预测）已知正四面体 $ABCD$ 的表面积为 $2\sqrt{3}$，且 A，B，C，D 四点都在球 O 的球面上，则球 O 的体积为_____.

【例 2】（24-25 高三上·广东·开学考试）外接球半径为 $\sqrt{6}$ 的正四面体的体积为（　）

A．$\frac{16\sqrt{2}}{3}$　　B．24　　C．32　　D．$48\sqrt{2}$

【例 3】正四面体的外接球与内切球的半径比为（　）

A．1:1　　B．2:1　　C．3:1　　D．4:1

【巩固练习 1】已知正三棱锥 $A-BCD$，各棱长均为 $\sqrt{3}$，则其外接球的体积为（　）

A．$\frac{9\sqrt{3}}{8}\pi$　　B．$\frac{81\sqrt{2}}{16}\pi$　　C．$\frac{9\sqrt{2}}{8}\pi$　　D．$\frac{9\sqrt{3}}{16}\pi$

【巩固练习 2】正四面体 $P-ABC$ 中，其侧面积与底面积之差为 $2\sqrt{3}$，则该正四面体外接球的体积为_____.

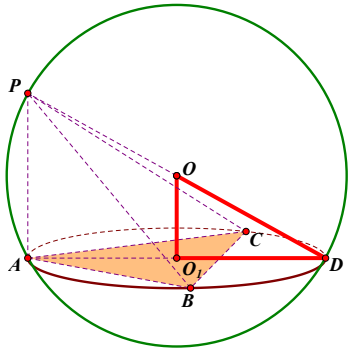
【巩固练习 3】一个正四面体的棱长为 2，则它的外接球与内切球体积之比为（　）

A．3:1　　B．$\sqrt{3}:1$　　C．9:1　　D．27:1

【题型 5】直棱锥外接球模型（一条侧棱垂直底面）

基础知识

题设：如图，$PA\perp$平面 ABC，求外接球半径.（一条侧棱垂直底面）



解题步骤：

第一步：将ΔABC画在小圆面上，A为小圆直径的一个端点，作小圆的直径AD，连接PD，则PD必过球心O；

第二步：O_1为ΔABC的外心，所以$OO_1\perp$平面ABC，算出小圆O_1的半径$O_1D=r$（三角形的外接圆直径算法：利用正弦定理，得$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2r$），$OO_1=\frac{1}{2}PA$；

第三步：利用勾股定理求三棱锥的外接球半径：①$(2R)^2=PA^2+(2r)^2\Leftrightarrow 2R=\sqrt{PA^2+(2r)^2}$；

②$R^2=r^2+OO_1^2\Leftrightarrow R=\sqrt{r^2+OO_1^2}$.

【例 1】已知三棱锥$P-ABC$的底面ABC为直角三角形，且$\angle ACB=\frac{\pi}{2}$.若$PA\perp$平面ABC，且$AB=3$，$PA=4$，三棱锥$P-ABC$的所有顶点均在球O的球面上，记球O的体积和表面积分别为V，S，则$\frac{V}{S}=$

A．$\frac{5}{12}$　　B．$\frac{5}{6}$　　C．$\frac{5}{3}$　　D．$\frac{5}{2}$

【巩固练习 1】已知S，A，B，C是球O表面上的不同点，$SA\perp$平面ABC，$AB\perp BC$，$AB=1$，

$BC=\sqrt{2}$，若球 O 的表面积为 4π，则 $SA=$（　）

A．$\frac{\sqrt{2}}{2}$　　B．1　　C．$\sqrt{2}$　　D．$\sqrt{3}$

【巩固练习 2】2023 年高考全国乙卷数学(文)T16

已知点 S,A,B,C 均在半径为 2 的球面上，$\triangle ABC$ 是边长为 3 的等边三角形，$SA\perp$ 平面 ABC，则 $SA=$_____.

【巩固练习 3】已知三棱锥 $S-ABC$ 所在顶点都在球 O 的球面上，且 $SC\perp$ 平面 ABC，若 $SC=AB=AC=2,\angle BAC=120°$，则球 O 的体积为（　）

A．$\frac{20\sqrt{5}\pi}{3}$　　B．$\frac{32\pi}{3}$　　C．$\frac{20\pi}{3}$　　D．$\frac{32\sqrt{5}\pi}{3}$

【题型 6】球心在高上（圆锥形）

基础知识

如图 5-1 至 5-8 这七个图形，P 的射影是 ΔABC 的外心 $\Leftrightarrow$ 三棱锥 $P-ABC$ 的三条侧棱相等 $\Leftrightarrow$ 三棱锥 $P-ABC$ 的底面 ΔABC 在圆锥的底上，顶点 P 点也是圆锥的顶点.

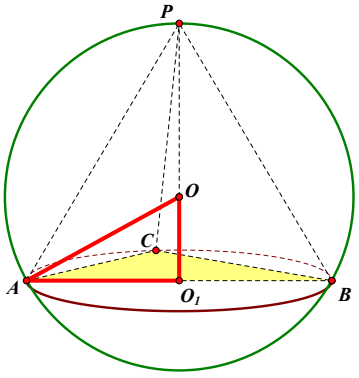


图5-1

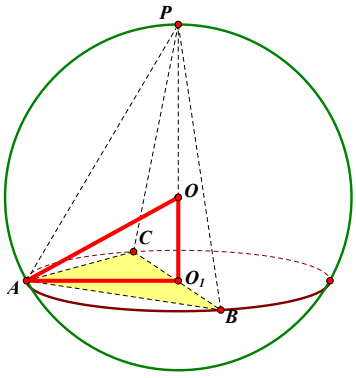


图5-2

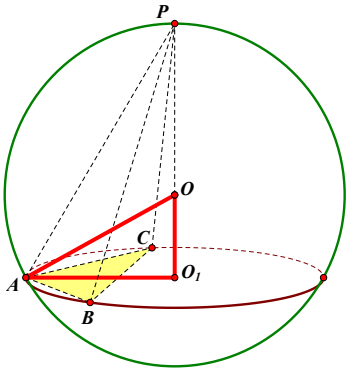


图5-3

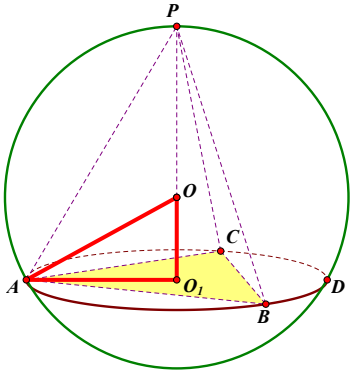


图5-4

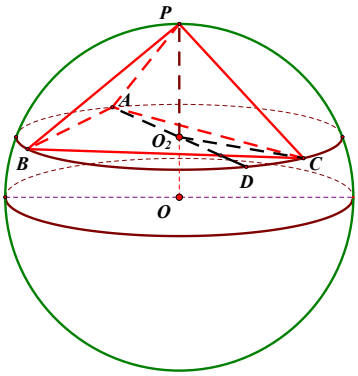


图5-6

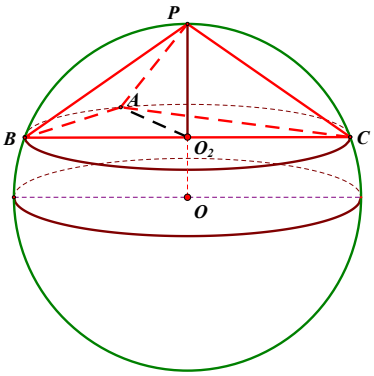


图5-7

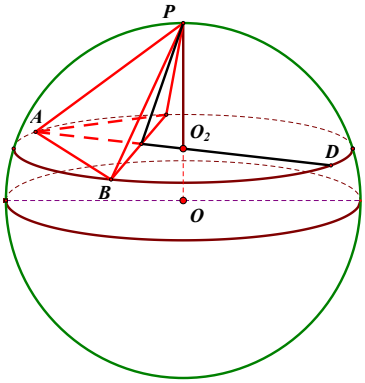


图5-8

解题步骤：

第一步：确定球心 O 的位置，取 ΔABC 的外心 O_1，则 P,O,O_1 三点共线；

第二步：先算出小圆 O_1 的半径 $AO_1=r$，再算出棱锥的高 $PO_1=h$（也是圆锥的高）；

第三步：勾股定理：$OA^2=O_1A^2+O_1O^2\Rightarrow R^2=(h-R)^2+r^2$，解出 $R=\dfrac{r^2+h^2}{2h}$

方法二：小圆直径参与构造大圆，用正弦定理求大圆直径得球的直径.

【注意】：若是已知外接球半径 R 和小圆半径 r 求圆锥的高，则有 2 个解

【例 1】（2024·浙江台州·高二校联考期末）已知圆锥的底面半径为 1，母线长为 2，则该圆锥的外接球的体积为_____.

【例 2】已知三棱锥 $P-ABC$ 的各侧棱长均为 $2\sqrt{3}$，且 $AB=3,BC=\sqrt{3},AC=2\sqrt{3}$，则三棱锥 $P-ABC$ 的外接球的表面积为_____.

【巩固练习 1】已知球 O 的体积为 36π，圆锥 SO_1 的顶点 S 及底面圆 O_1 上所有点都在球面上，且底面圆 O_1 半径为 $2\sqrt{2}$，则该圆锥侧面的面积为（　）

A．$6\sqrt{2}\pi$　　B．$4\sqrt{6}\pi$ 或 $6\sqrt{2}\pi$

C．$8\sqrt{3}\pi$或$4\sqrt{6}\pi$　　D．$8\sqrt{3}\pi$

【巩固练习 2】在三棱锥$P-ABC$中，$PA=PB=PC=3, AB=AC=2, BC=2\sqrt{2}$，则三棱锥$P-ABC$的外接球的半径为_____.

【巩固练习 3】已知三棱锥$S-ABC$中，顶点S在底面的射影恰好是$\triangle ABC$内切圆的圆心，底面$\triangle ABC$的最短边长为 6．若三个侧面面积分别为$3\sqrt{29}$，$4\sqrt{29}$，$5\sqrt{29}$，则顶点S到底面ABC的距离为_____；三棱锥$S-ABC$的外接球的表面积为_____.

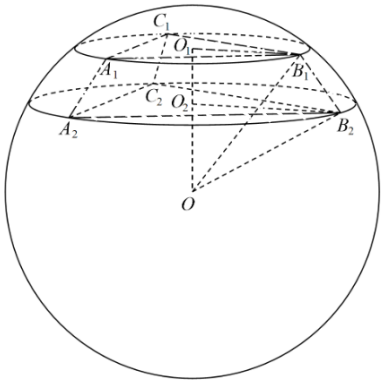
【题型 7】圆台，棱台外接球模型

基础知识

圆台，棱台外界球

基本规律:正棱台外接球，以棱轴截面为主

$R^2=r_2^2+\left(\dfrac{r_2^2-r_1^2-h^2}{2h}\right)^2$，其中$r_1, r_2, h$分别为圆台的上底面、下底面、高.



注：若球心位置不确定，也可以直接设$OO_2=x$，若解出来x为负数则说明球心在O_2另一侧

【例 1】（2024·云南·高三校联考开学考试）已知圆台的上下底面圆的半径分别为 3，4，母线长为$5\sqrt{2}$，若该圆台的上下底面圆的圆周均在球O的球面上，则球O的体积为（　）

A．$\dfrac{250}{3}\pi$　　B．$\dfrac{500}{3}\pi$　　C．$\dfrac{100}{3}\pi$　　D．$\dfrac{125}{3}\pi$

【例 2】2022 年新高考 II 卷 T7——台体外接球

已知正三棱台的高为 1，上、下底面边长分别为$3\sqrt{3}$和$4\sqrt{3}$

，其顶点都在同一球面上，则该球的表面积为（　）

A．100π　　B．128π　　C．144π　　D．192π

【例 3】在《九章算术》中，底面为矩形的棱台被称为“刍童”．已知棱台 $ABCD-A'B'C'D'$ 是一个侧棱相等、高为 1 的“刍童”，其中 $AB=2A'B'=2$，$BC=2B'C'=2\sqrt{3}$，则该“刍童”外接球的表面积为（　）

A．20π　　B．$\frac{20}{3}\pi$　　C．$\frac{20\sqrt{5}}{3}\pi$　　D．$5\sqrt{5}\pi$

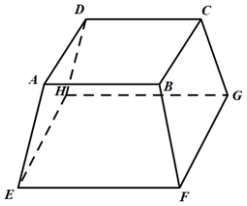
【巩固练习 1】（2024·辽宁·高三校联考期末）正四棱台高为 2，上下底边长分别为 2 和 4，所有顶点在同一球面上，则球的表面积为（　）

A．32π　　B．33π　　C．34π　　D．35π

【巩固练习 2】已知圆台的上下底面圆的半径分别为 3，4，母线长为 $5\sqrt{2}$，若该圆台的上下底面圆的圆周均在球 O 的球面上，则球 O 的体积为（　）

A．$\frac{250}{3}\pi$　　B．$\frac{500}{3}\pi$　　C．$\frac{100}{3}\pi$　　D．$\frac{125}{3}\pi$

【巩固练习 3】我国古代《九章算术》中将上，下两面为平行矩形的六面体称为刍童，如图的刍童 $ABCD-EFGH$ 有外接球，且 $AB=4\sqrt{3},AD=4,EH=4\sqrt{6},EF=4\sqrt{2}$，点 E 到平面 $ABCD$ 距离为 4，则该刍童外接球的表面积为_____.



【题型 8】棱锥外接球之切瓜模型（一个面垂直外接圆直径）

基础知识

如图 4-1，平面 $PAC\perp$ 平面 ABC，且 $AB\perp BC$（即 AC 为小圆的直径），且 P 的射影是 ΔABC 的外心 $\Leftrightarrow$ 三棱锥 $P-ABC$ 的三条侧棱相等 $\Leftrightarrow$ 三棱 $P-ABC$ 的底面 ΔABC 在圆锥的底上，顶点 P 点也是圆锥的顶点.

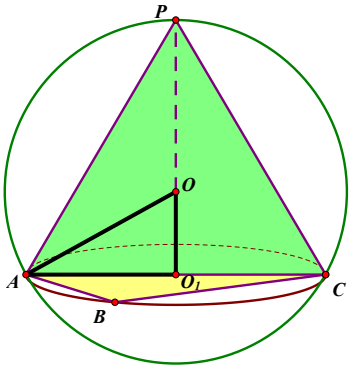


图4-1

解题步骤：

第一步：确定球心 O 的位置，取 ΔABC 的外心 O_1，则 P,O,O_1 三点共线；

第二步：先算出小圆 O_1 的半径 $AO_1=r$，再算出棱锥的高 $PO_1=h$（也是圆锥的高）；

第三步：勾股定理：$OA^2=O_1A^2+O_1O^2\Rightarrow R^2=(h-R)^2+r^2$，解出 R；

事实上，ΔACP 的外接圆就是大圆，直接用正弦定理也可求解出 R.

2．如图 4-2，平面 $PAC\perp$ 平面 ABC，且 $AB\perp BC$（即 AC 为小圆的直径），且 $PA\perp AC$，

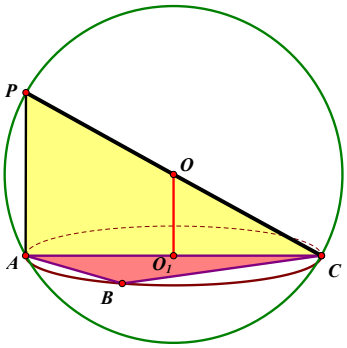


图4-2

利用勾股定理求三棱锥的外接球半径：①$(2R)^2=PA^2+(2r)^2\Leftrightarrow 2R=\sqrt{PA^2+(2r)^2}$；

②$R^2=r^2+OO_1^{\,2}\Leftrightarrow R=\sqrt{r^2+OO_1^{\,2}}$

3．如图 4-3，平面 $PAC\perp$ 平面 ABC，且 $AB\perp BC$（即 AC 为小圆的直径）

$OC^2=O_1C^2+O_1O^2\Leftrightarrow R^2=r^2+O_1O^2\Leftrightarrow AC=2\sqrt{R^2-O_1O^2}$

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：

https://d.book118.com/445314004000012102