

2014 年全国硕士研究生入学统一考试 数学试题详解及评分参考

数 学 (一)

一. 选择题: 1-8 小题, 每小题 4 分, 共 32 分. 下列每题给出的四个选项中, 只有一个符合题目要求的, 请将所选项前的字母填在答题纸指定的位置上.

(1) 下列曲线中有渐近线的是

(A) $y = x + \sin x$

(B) $y = x^2 + \sin x$

(C) $y = x + \sin \frac{1}{x}$

(D) $y = x^2 + \sin \frac{1}{x}$

【答】 应选 (C).

【解】 显然, 对四个选项中的 y , 均有 $\lim_{x \rightarrow \infty} y = ?$, 故四条曲线都没有水平渐近线;

又在四个选项中, 只有(C)和(D)有间断点 $x = 0$, 但 $\lim_{x \rightarrow 0} y = ??$, 故四条曲线都没有铅直渐近线; 所以只需考察斜渐近线.

对于选项(A), 因 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sin x}{x} = 1$, 但 $\lim_{x \rightarrow \infty} [(x + \sin x) - x] = ?$, 故没有斜渐近线;

对于选项(B)和(D), 因 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + \sin x}{x} = ?$, 且 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + \sin \frac{1}{x}}{x} = ?$, 故都没有斜渐近线;

对于选项(C), 因 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sin \frac{1}{x}}{x} = 1$, 且 $\lim_{x \rightarrow \infty} [(x + \sin \frac{1}{x}) - x] = 0$, 故 $y = x$ 是其斜渐近线.

综上所述, 应选 (C).

(2) 设函数 $f(x)$ 具有 2 阶导数, $g(x) = f(0)(1-x) + f(1)x$, 则在区间 $[0,1]$ 上

(A) 当 $f'(x) \geq 0$ 时, $f(x) \geq g(x)$

(B) 当 $f'(x) \geq 0$ 时, $f(x) \leq g(x)$

(C) 当 $f''(x) \geq 0$ 时, $f(x) \geq g(x)$

(D) 当 $f''(x) \geq 0$ 时, $f(x) \leq g(x)$

【答】 应选 (D).

【解】 记 $h(x) = f(x) - g(x)$, 知 $h'(x) = f'(x) + f(0) - f(1)$, $h''(x) = f''(x)$, 于是当 $f''(x) \geq 0$ 时, 有 $h''(x) \geq 0$, 即 $h(x)$ 是凹函数. 又易见 $h(0) = 0$, $h(1) = 0$, 故在区间 $[0,1]$ 上有 $h(x) \leq 0$, 即 $f(x) \leq g(x)$, 可见应选 (D).

(3) 设 $f(x, y)$ 是连续函数, 则 $\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x, y) dx =$

- (A) $\int_0^1 dx \int_0^{x-1} f(x, y) dy + \int_{-1}^0 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy$
- (B) $\int_0^1 dx \int_0^{1-x} f(x, y) dy + \int_{-1}^0 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^0 f(x, y) dy$
- (C) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}} f(r \cos\theta, r \sin\theta) dr + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\theta \int_0^1 f(r \cos\theta, r \sin\theta) dr$
- (D) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}} f(r \cos\theta, r \sin\theta) r dr + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\theta \int_0^1 f(r \cos\theta, r \sin\theta) r dr$

【答】 应选 (D).

【解】 由 $\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x, y) dx$, 知其积分区域 D 是由 $y=0$, $y=1$, $x=-\sqrt{1-y^2}$ 和 $x=1-y$ 围成的平面区域. 画图易见 $D=D_1 \cap D_2$, 其中

$$D_1 = \{(x, y) | 0 < x < 1, 0 < y < 1-x\} = \{(r, \theta) | 0 < \theta < \frac{\pi}{2}, 0 < r < \frac{1}{\cos\theta + \sin\theta}\},$$

$$D_2 = \{(x, y) | -1 < x < 0, 0 < y < \sqrt{1-x^2}\} = \{(r, \theta) | \frac{\pi}{2} < \theta < \pi, 0 < r < 1\}.$$

由此可见, 选项(A)中积分上限 $x-1$ 是错误的; 选项(B)中内层积分上下限都是错误的; 选项(C)中的被积函数是错误的 (少了个 r); 只有选项(D), 满足

$$\begin{aligned} \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x, y) dx &= \iint_{D_1} f(x, y) dx dy + \iint_{D_2} f(x, y) dx dy \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}} f(r \cos\theta, r \sin\theta) r dr + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\theta \int_0^1 f(r \cos\theta, r \sin\theta) r dr. \end{aligned}$$

故应选 (D).

(4) 若 $\int_{-\pi}^{\pi} (x - a_1 \cos x - b_1 \sin x)^2 dx = \min_{a, b} \{ \int_{-\pi}^{\pi} (x - a \cos x - b \sin x)^2 dx \}$, 则

$$a_1 \cos x + b_1 \sin x =$$

- (A) $2 \sin x$ (B) $2 \cos x$ (C) $2\pi \sin x$ (D) $2\pi \cos x$

【答】 应选择 (A).

【解】 记 $f(a, b) = \int_{-\pi}^{\pi} (x - a \cos x - b \sin x)^2 dx$, 则

$$\frac{\partial f(a, b)}{\partial a} = -2 \int_{-\pi}^{\pi} (x - a \cos x - b \sin x) \cos x dx = 2a \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 x dx,$$

$$\frac{\partial f(a, b)}{\partial b} = -2 \int_{-\pi}^{\pi} (x - a \cos x - b \sin x) \sin x dx = 2b \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 x dx - 2 \int_{-\pi}^{\pi} x \sin x dx = 2b\pi - 4\pi,$$

令 $\frac{\partial f(a, b)}{\partial a} = 0, \frac{\partial f(a, b)}{\partial b} = 0$, 解得 $a = 0, b = 2$. 所以 $a_1 \cos x + b_1 \sin x = 2 \sin x$.

(5) 行列式
$$\begin{vmatrix} 0 & a & b & 0 \\ a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ c & 0 & 0 & d \end{vmatrix} =$$

- (A) $(ad-bc)^2$ (B) $-(ad-bc)^2$ (C) $a^2d^2-b^2c^2$ (D) $b^2c^2-a^2d^2$

【答】 应选 (B).

【解】 根据拉普拉斯展开定理, 选定第二行和第四行进行展开, 可得

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b & 0 \\ a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ c & 0 & 0 & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \cdot (-1)^{2+4+1+4} \cdot \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = -(ad-bc)^2, \text{ 故选 (B).}$$

- (6) 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 均为 3 维向量, 则对任意常数 k, l , 向量组 $\alpha_1 + k\alpha_3, \alpha_2 + l\alpha_3$ 线性无关是向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关的

- (A) 必要非充分条件 (B) 充分非必要条件
(C) 充分必要条件 (D) 既非充分也非必要条件

【答】 应选 (A).

【解】 设 $\lambda_1(\alpha_1 + k\alpha_3) + \lambda_2(\alpha_2 + l\alpha_3) = 0$, 即 $\lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 + (\lambda_1k + \lambda_2l)\alpha_3 = 0$,

则当 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关时, 有 $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, 从而 $\alpha_1 + k\alpha_3, \alpha_2 + l\alpha_3$ 线性无关. 此表明 $\alpha_1 + k\alpha_3, \alpha_2 + l\alpha_3$ 线性无关是向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关的必要条件;

又取 $\alpha_3 = 0$, 及 α_1, α_2 线性无关, 知对任意常数 k, l , 向量组 $\alpha_1 + k\alpha_3, \alpha_2 + l\alpha_3$ 都线性无关, 但 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 却线性相关. 此表明 $\alpha_1 + k\alpha_3, \alpha_2 + l\alpha_3$ 线性无关不是向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关的充分条件. 故应选 (A).

- (7) 设随机事件 A 与 B 相互独立, $P(B) = 0.5$, $P(A-B) = 0.3$, 则 $P(B-A) =$

- (A) 0.1 (B) 0.2 (C) 0.3 (D) 0.4

【答】 应选 (B).

【解法一】 因 A 与 B 独立, 故 $P(A-B) = P(A\bar{B}) = P(A)P(\bar{B})$, 即 $0.5P(A) = 0.3$,

于是 $P(A) = 0.6$, 从而 $P(B-A) = P(B\bar{A}) = P(B)P(\bar{A}) = 0.2$. 故应选 (B).

【解法二】 因 A 与 B 独立, 故 $P(A-B) = P(A) - P(AB) = P(A) - P(A)P(B) =$

$0.5P(A)$, 即 $0.3 = 0.5P(A)$, 于是 $P(A) = 0.6$. 从而 $P(B-A) = P(B) - P(A)P(B) =$

- (8) 设连续型随机变量 X_1 与 X_2 相互独立且方差均存在, X_1 与 X_2 的概率密度分别为 $f_1(x)$

与 $f_2(x)$, 随机变量 Y_1 的概率密度为 $f_{Y_1}(y) = \frac{1}{2}(f_1(y) + f_2(y))$, 随机变量 $Y_2 = \frac{1}{2}(X_1 + X_2)$,

则

(A) $EY_1 > EY_2, DY_1 > DY_2$

(B) $EY_1 = EY_2, DY_1 = DY_2$

(C) $EY_1 = EY_2, DY_1 < DY_2$

(D) $EY_1 = EY_2, DY_1 > DY_2$

【答】 应选 (D).

【解】 记 $\mu_1 = EX_1, \mu_2 = EX_2, \sigma_1^2 = DX_1, \sigma_2^2 = DX_2$, 有

$$EY_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} y \cdot \frac{1}{2} [f_1(y) + f_2(y)] dy = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} y f_1(y) dy + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} y f_2(y) dy = \frac{1}{2} (\mu_1 + \mu_2),$$

$$EY_2 = \frac{1}{2} (EX_1 + EX_2) = \frac{1}{2} (\mu_1 + \mu_2), \text{ 可见 } EY_1 = EY_2;$$

$$\begin{aligned} \text{又 } E(Y_1^2) &= \int_{-\infty}^{+\infty} y^2 \cdot \frac{1}{2} [f_1(y) + f_2(y)] dy = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} y^2 f_1(y) dy + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} y^2 f_2(y) dy \\ &= \frac{1}{2} (\sigma_1^2 + \mu_1^2) + \frac{1}{2} (\sigma_2^2 + \mu_2^2), \end{aligned}$$

$$\text{故 } DY_1 = E(Y_1^2) - (EY_1)^2 = \frac{1}{2} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2) + \frac{(\mu_1 - \mu_2)^2}{4},$$

$$\text{而由 } X_1 \text{ 与 } X_2 \text{ 相互独立, 知 } DY_2 = \frac{1}{4} (DX_1 + DX_2) = \frac{1}{4} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2), \text{ 可见 } DY_1 > DY_2.$$

因此应选 (D).

二、填空题: 9~14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分. 请将答案写在答题纸指定位置上.

(9) 曲面 $z = x^2(1 - \sin y) + y^2(1 - \sin x)$ 在点 $(1, 0, 1)$ 处的切平面方程为_____.

【答】 应填 $2x - y - z = 1$.

【解】 因 $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x(1 - \sin y) - y^2 \cos x$, $\frac{\partial z}{\partial y} = 2y(1 - \sin x) - x^2 \cos y$, 故

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2, \frac{\partial z}{\partial y} \Big|_{(1,0)} = -1. \text{ 从而所求切平面为 } -2(x-1) + y + (z-1) = 0, \text{ 即 } 2x - y - z = 1.$$

(10) 设 $f(x)$ 是周期为 4 的可导奇函数, 且 $f'(x) = 2(x-1), x \in [0, 2]$, 则 $f(7) =$ _____.

【答】 应填 1.

【解】 因 $f'(x) = 2(x-1), x \in [0, 2]$, 故 $f(x) = x^2 - 2x + c, x \in [0, 2]$. 由 $f(x)$

为奇函数, 知 $f(0) = -f(0)$, 即 $f(0) = 0$. 从而有 $c = 0$. 于是有 $f(x) = x^2 - 2x, x \in [0, 2]$.

再由 $f(x)$ 是周期为 4 的奇函数, 可得 $f(7) = f(-1) = f(1) = 1^2 - 2 \cdot 1 = -1$.

【答】 应填 $xe^{2^{x+1}}$.

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/446211005131010030>