人教A版2019必修第二册

第六章《平面向量及其应用》

6.3.5平面向量数量积的坐标表示

学习目标

1.掌握平面向量数量积坐标表示及模、夹角的公式

。

2.能用公式求向量的数量积、模、夹角；

3.掌握两个向量垂直的坐标判断，会证明两向量垂直，以及能解决一些简单问题.

环节一：创设情境，引入课题

探究 已知$\vec{a}=(x_1,y_1),\vec{b}=(x_2,y_2)$，怎样用$\vec{a}$与$\vec{b}$的坐标表示$\vec{a}\cdot\vec{b}$呢？

因为$\vec{a}=x_1\vec{i}+y_1\vec{j},\vec{b}=x_2\vec{i}+y_2\vec{j}$，

所以$\vec{a}\cdot\vec{b}=(x_1\vec{i}+y_1\vec{j})\cdot(x_2\vec{i}+y_2\vec{j})=x_1x_2\vec{i}^2+x_1y_2\vec{i}\cdot\vec{j}+y_1x_2\vec{j}\cdot\vec{i}+y_1y_2\vec{j}^2$，

又$\vec{i}\cdot\vec{i}=1,\vec{j}\cdot\vec{j}=1,\vec{i}\cdot\vec{j}=\vec{j}\cdot\vec{i}=0$，所以$\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2$

这就是说，两个向量的数量积等于它们对应坐标的乘积的和．

环节二：观察分析，感知概念

由此可得

(1) 若$\vec{a}=(x, y)$, 则$\left|\vec{a}\right|^2=x^2+y^2$, 或$\left|\vec{a}\right|=\sqrt{x^2+y^2}$

如果表示向量$\vec{a}$的有向线段的起点和终点的坐标分别为$(x_1, y_1), (x_2, y_2)$,

那么$\vec{a}=(x_2-x_1, y_2-y_1)$, $\left|\vec{a}\right|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

这就是平面内两点间的距离公式.

(2) 设$\vec{a}=(x_1, y_1)$, $\vec{b}=(x_2, y_2)$, 则$\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow x_1x_2+y_1y_2=0$

注意区别: $\boxed{\vec{a}\,//\,\vec{b}\Leftrightarrow x_1y_2-x_2y_1=0}$, $\boxed{\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow x_1x_2+y_1y_2=0}$

环节三：抽象概括，形成概念

例10 若$A(1,2)$, $B(2,3)$, $C(-2,5)$, 则$\triangle ABC$是什么形状？证明你的猜想.

如图6.3－19, 在平面直角坐标系中画出点A, B, C, 我们发现$\triangle ABC$是直角三角形, 证明如下：

因为$\overrightarrow{AB}=(2-1,3-2)=(1,1)$, $\overrightarrow{AC}=(-2-1,5-2)=(-3,3)$,

所以$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=1\times(-3)+1\times3=0$. 于是$\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AC}$,

因此, $\triangle ABC$是直角三角形.

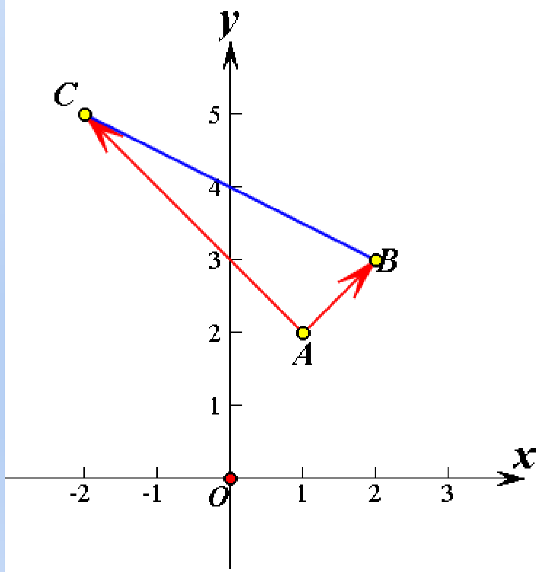


图6. 3-19

补充例题 在$\triangle ABC$中，设$\overrightarrow{AB}=(2,3)$，$\overrightarrow{AC}=(1,k)$，且$\triangle ABC$是直角三角形，求$k$的值. 分析：直角没有指明，需要分类讨论.

如果$\angle A=90^\circ$，那么$\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AC}$，$2\times 1+3k=0$，$\therefore k=-\dfrac{2}{3}$

如果$\angle B=90^\circ$，那么$\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=(-1,k-3)$，

$\therefore \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=2\times(-1)+3(k-3)=0$，解得$k=\dfrac{11}{3}$

如果$\angle C=90^\circ$，那么$\overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{BC}$，$\therefore \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}=1\times(-1)+k(k-3)=0$，

解得$k=\dfrac{3\pm\sqrt{13}}{2}$ $\qquad \therefore k=-\dfrac{2}{3}$或$\dfrac{11}{3}$或$\dfrac{3\pm\sqrt{13}}{2}$

设$\vec{a}, \vec{b}$都是非零向量，$\vec{a}=(x_1, y_1), \vec{b}=(x_2, y_2)$，$\theta$是$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角，根据向量数量积的定义及坐标表示可得

$$\boxed{\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2}}}$$

环节四：辨析理解，深化概念

例11 设$\vec{a}=(5,-7)$, $\vec{b}=(-6,-4)$, 求$\vec{a}\cdot\vec{b}$及$\vec{a}$, $\vec{b}$的夹角θ(精确到1°)

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=5\times(-6)+(-7)\times(-4)=-30+28=-2$$

因为$|\vec{a}|=\sqrt{5^2+(-7)^2}=\sqrt{74}$, $|\vec{b}|=\sqrt{(-6)^2+(-4)^2}=\sqrt{52}$,

所以用计算器计算可得$\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=\dfrac{-2}{\sqrt{74}\times\sqrt{52}}\approx-0.03$

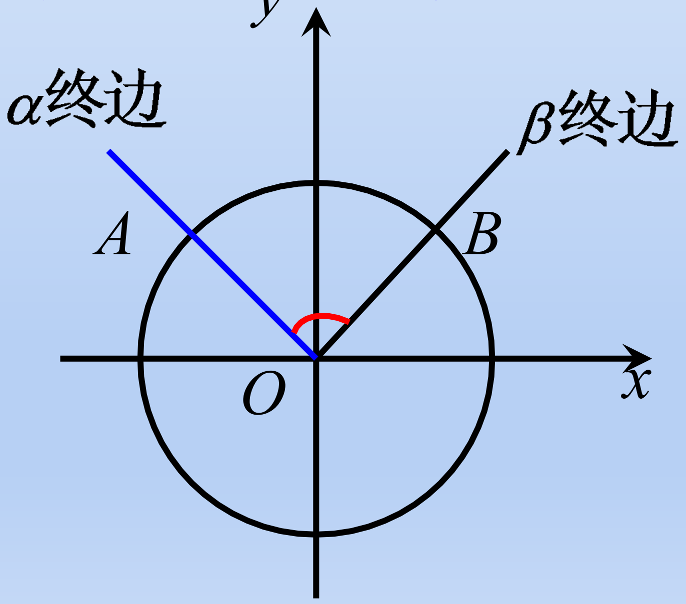
利用计算器中的“ $\cos^{-1}$ ”键，得$\theta\approx92°$

环节五：课堂练习，巩固运用

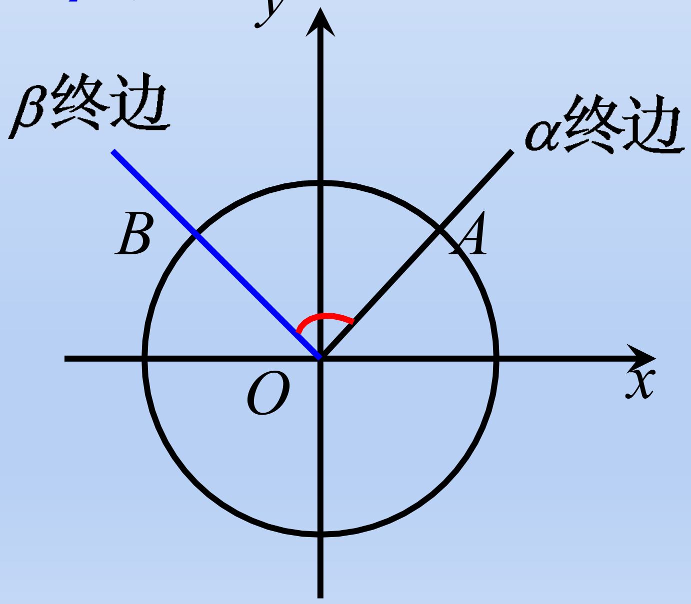
例12 用向量方法证明两角差的余弦公式

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$

证明：如图6.3 − 20，在平面直角坐标系xOy内作单位圆O，以x轴的非负半轴为始边作角α，β. 它们的终边与单位圆O的交点分别为A，B，则$\overrightarrow{OA}=(\cos\alpha,\sin\alpha)$，$\overrightarrow{OB}=(\cos\beta,\sin\beta)$



(1)



(2)

由向量数量积的坐标表示，有$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$.

设$\overrightarrow{OA}$与$\overrightarrow{OB}$的夹角为θ，则$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\left|\overrightarrow{OA}\right|\cdot\left|\overrightarrow{OB}\right|\cos\theta=\cos\theta$,

所以$\cos\theta=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

另一方面，由图6.3 − 20(1)可知，$\alpha=2k\pi+\beta+\theta$;

由图6.3 − 20(2)可知，$\alpha=2k\pi+\beta-\theta$，于是$\alpha-\beta=2k\pi\pm\theta$，$k\in\mathrm{Z}$,

所以$\cos(\alpha-\beta)=\cos\theta$，于是$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

运用向量工具进行探索，过程多么简洁啊 ！

环节六:归纳总结，反思提升

1.数量积的运算转化为向量的坐标运算；

已知两个向量$\vec{a}=(x_1,y_1)$，$\vec{b}=(x_2,y_2)$，

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2$$

2.向量模的坐标公式；

设$\vec{a}=(x,y)$,则$|\vec{a}|=\sqrt{x^2+y^2}$.

3.向量夹角的坐标公式

$$\cos\theta=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2}}.$$

4.平行、垂直的坐标表示.

$$\vec{a}//\vec{b}\Leftrightarrow x_1y_2-x_2y_1=0.$$

$$\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow x_1x_2+y_1y_2=0.$$

两向量的数量积 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=x_1x_2+y_1y_2$

两向量垂直 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0 \Leftrightarrow x_1x_2+y_1y_2=0$

若$\boldsymbol{a}=(x,y)$，则$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{x^2+y^2}$

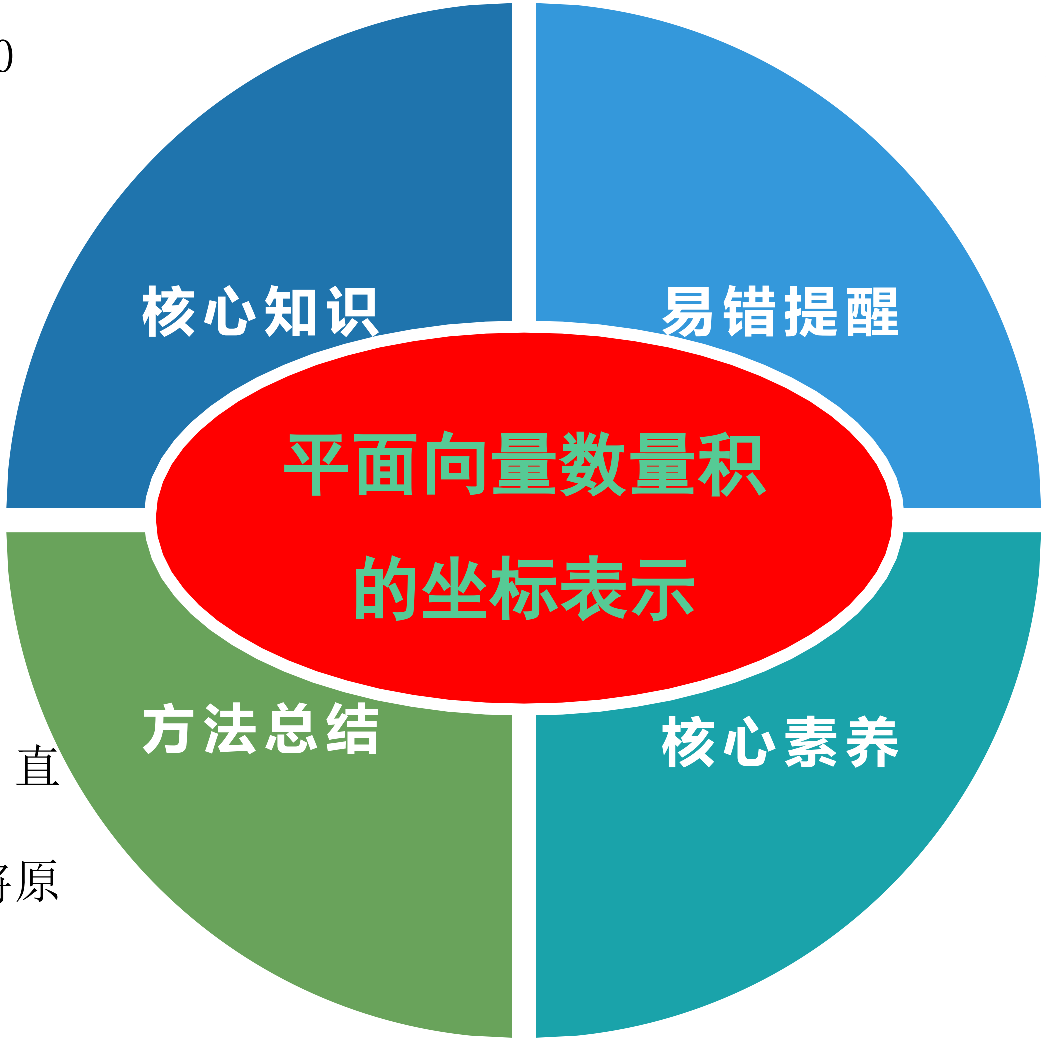
若$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则两点A、B间的距离为

设$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$都是非零向量，$\boldsymbol{a}=(x_1,y_1)$，$\boldsymbol{b}=(x_2,y_2)$，$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$.

利用$\cos\theta=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}$来判断角θ时

①$\cos\theta<0$有两种情况：一是θ是钝角，二是$\theta=\pi$；

②$\cos\theta>0$有两种情况：一是θ为锐角，二是$\theta=0$.



$$\cos\theta=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2}}$$

数量积运算

①先将各向量用坐标表示，直接进行数量积运算；

②先利用数量积的运算律将原式展开，再依据已知计算.

1. 数学抽象：数量积的坐标运算；
2. 逻辑推理：平面向量的夹角公式，模长公式，垂直关系等；
3. 数学运算：根据已知信息求数量积、夹角、模长等，根据向量垂直求参数；

环节七：目标检测，作业布置

完成教材：

第36页 习题6.3 第 10,14题

练习（第36页）

1. 已知$\vec{a}=(-3,4)$, $\vec{b}=(5,2)$, 求$|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$, $\vec{a}\cdot\vec{b}$

解: $|\vec{a}|=\sqrt{\vec{a}^2}=\sqrt{9+16}=5$,

$|\vec{b}|=\sqrt{\vec{b}^2}=\sqrt{25+4}=\sqrt{29}$,

$\vec{a}\cdot\vec{b}=(-3,4)\cdot(5,2)=-15+8=-7$

2. 已知$\vec{a}=(2,3),\vec{b}=(-2,4),\vec{c}=(-1,-2)$. 求$\vec{a}\cdot\vec{b},(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b}),\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}),(\vec{a}+\vec{b})^2$.

解: $\because \vec{a}=(2,3),\vec{b}=(-2,4),\vec{c}=(-1,-2),\therefore \vec{a}\cdot\vec{b}=2\times(-2)+3\times 4=8;$

$\vec{a}+\vec{b}=(0,7),\vec{a}-\vec{b}=(4,-1),\therefore (\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=0\times 4+7\times(-1)=-7;$

$\vec{b}+\vec{c}=(-3,2),\therefore \vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=2\times(-3)+3\times 2=0;$

$\vec{a}+\vec{b}=(0,7),\therefore (\vec{a}+\vec{b})^2=0^2+7^2=49$

3. 已知$\vec{a}=(3,2)$, $\vec{b}=(5,-7)$, 利用计算工具, 求$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角θ(精确到1°)

解: $\because \vec{a}=(3,2), \vec{b}=(5,-7), \therefore \vec{a}\cdot\vec{b}=3\times5+2\times(-7)=1,$

$|\vec{a}|=\sqrt{9+4}=\sqrt{13}, \quad |\vec{b}|=\sqrt{25+49}=\sqrt{74}$

$\therefore \cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=\dfrac{1}{\sqrt{13}\cdot\sqrt{74}}, \therefore \theta\approx 88°$

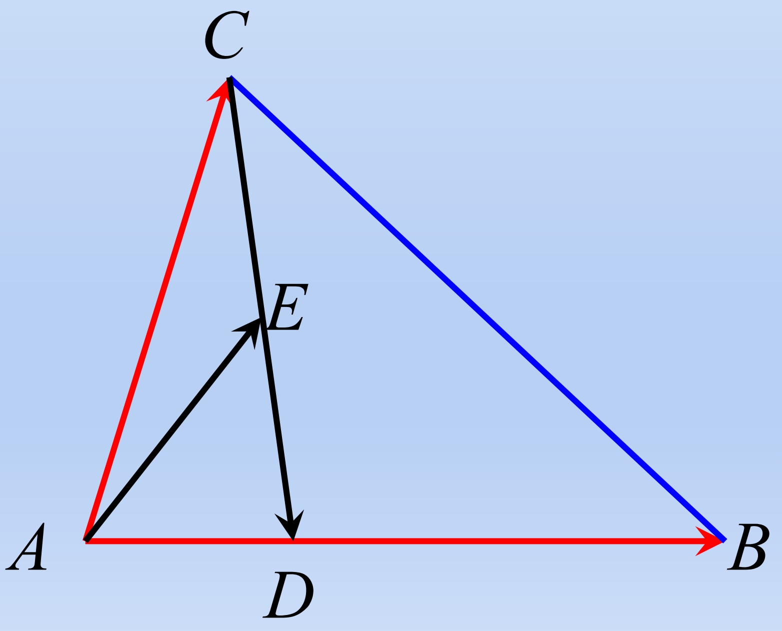
习题6.3（第36页）

1. 如图，在$\triangle ABC$中，$AD=\frac{1}{3}AB$，点E是CD的中点. 设$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{b}$，用$\vec{a}$，$\vec{b}$表示$\overrightarrow{CD}$，$\overrightarrow{AE}$

$$\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\frac{1}{3}\vec{a}-\vec{b}$$

$$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$$

$$=\vec{b}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\vec{a}-\vec{b}\right)=\frac{1}{6}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$$



2. 已知作用在坐标原点的三个力分别为$\vec{F_1}=(3,4)$, $\vec{F_2}=(2,-5)$, $\vec{F_3}=(3,1)$, 求作用在原点的合力$\vec{F_1}+\vec{F_2}+\vec{F_3}$的坐标.

解：$\vec{F_1}+\vec{F_2}+\vec{F_3}=(3,4)+(2,-5)+(3,1)=(8,0)$

3. 在下列各小题中，已知向量$\vec{a}$的坐标，以及表示$\vec{a}$的有向线段$\overrightarrow{AB}$的起点A的坐标，求终点B的坐标.

(1) $\vec{a}=(-2,1)$, $A(0,0)$;　　(2) $\vec{a}=(1,3)$, $A(-1,5)$;

(3) $\vec{a}=(-2,-5)$, $A(3,7)$.

设向量$\vec{a}$的终点B的坐标为(x,y)

(1) 由$(-2,1)=(x,y)$，得点B的坐标为$(-2,1)$;

(2) 由$(1,3)=(x+1,y-5)$，得点B的坐标为$(0,8)$;

(3) 由$(-2,-5)=(x-3,y-7)$，得点B的坐标为$(1,2)$