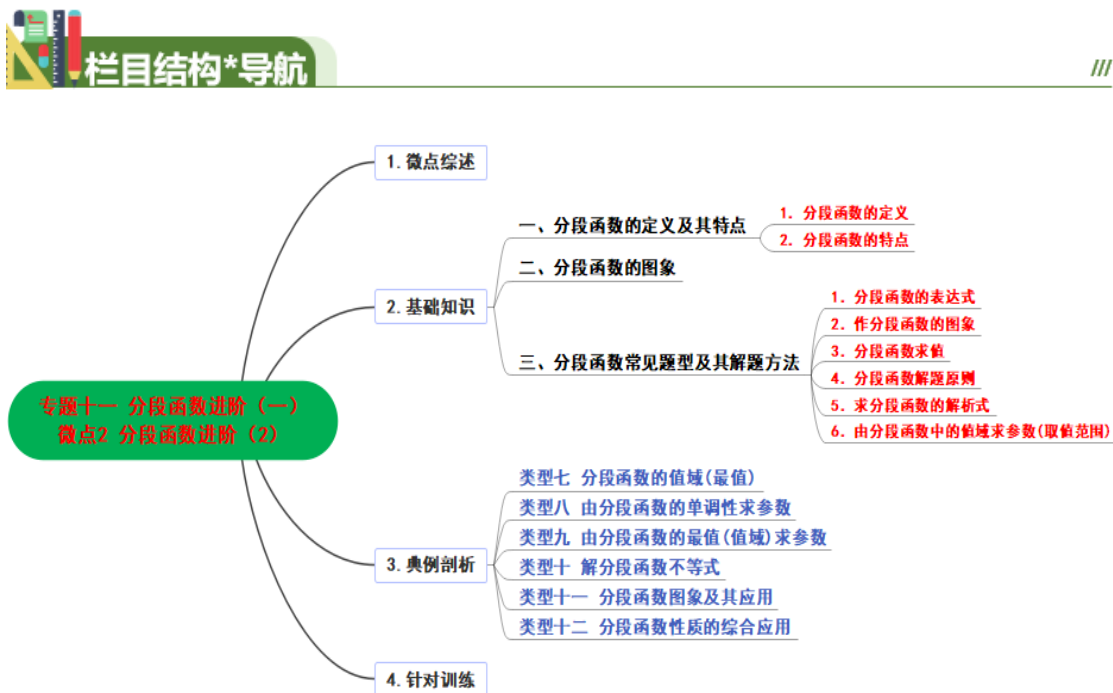


函数微专题

第一章 函数的基本概念和性质

专题十一 分段函数进阶（一）

微点 2 分段函数进阶（2）【基础版】



微点综述*阐释

分段函数是一种最要的函数模型，是研究函数单调性、奇偶性等性质的重要载体，以分段函数为载体可以全面考查函数的各种问题，备受高考命题者青睐。在高考中，分段函数常常出现在择题和填空题中，考查函数的基本概念，如定义域、值域、函数值的计算等。

本节介绍分段函数的基本概念、基本题型及其解题方法。

基础知识*归纳

一、分段函数的定义及其特点

1. 分段函数的定义

函数 $y=|x|$ 与函数 $y=\begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$ 是同一函数，但在表达方式上有所区别，前者在定义域内有一个表达式，而後者的定义域被分成两部分，而在不同的部分有不同的解析式。

在函数的定义域内，对于自变量 x 在不同取值范围内，函数有着不同的对应关系，这样的函数

通常叫作分段函数. 例如 $f(x) = \begin{cases} x, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases}$

2. 分段函数的特点

- (1) 注意分段函数是一个函数，并非几个函数.
- (2) 分段函数的定义域是各段定义域的并集.
- (3) 分段函数的值域是各段值域的并集.
- (4) 分段函数的图象要分段来画.

二、分段函数的图象

分段函数有几段，它的图象就由几条曲线组成. 在同一直角坐标系中，根据每段定义区间和表达式依次画图象，要注意每段图象的端点是空心点还是实心点，将每段图象组合到一起就得到整个分段函数的图象.

三、分段函数常见题型及其解题方法

1. 分段函数的表达式

分段函数的表达式因其特点可以分解成两个或两个以上的不同表达式，所以它的图象也由几部分构成，有的可以是光滑的曲线段，有的也可以是一些孤立的点或线段，而分段函数的值域，也就是各部分的函数值集合的并集，最好的求解方法是“图象法”. 重要的是分段函数虽由几部分构成，但它表示的仍是一个函数.

2. 作分段函数的图象

作分段函数的图象时，应按分段区间分别作出其图象，在作每一段图象时，先不考虑定义域的限制，用虚线作出其图象，再用实线保留定义域内的一段图象即可，即“分段作图”.

3. 分段函数求值

在求分段函数值 $f(x_0)$ 时，分清 x_0 所在的取值范围是关键，然后选择相应的解析式代入即可. 反之由 $f(x_0)$ 的值求 x_0 ，可通过图象得出 x_0 所在的范围，再选择相应的解析式列方程求解.

4. 分段函数解题原则

由于分段函数在自变量 x

的不同取值范围内有不同的对应关系, 因此我们在解决有关分段函数的问题时, 要讨论自变量的取值, 确定自变量的取值属于哪一个区间范围, 从而选择相应的对应关系.

5. 求分段函数的解析式

分段函数解析式的求法: 在定义域的不同段内, 分别求其解析式, 做到不重不漏, 然后写成统一的分段解析式形式, 注意要标明每段中自变量的取值范围.

6. 由分段函数中的值域求参数(取值范围)

解题方法: 已知函数的值域(常见题型如下)确定参数的取值范围需要以下几步, 已知函数

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x), & x \in I_1 \rightarrow \text{此段为具体函数,} \\ f_1(x), & x \in I_1 \rightarrow \text{此段为含有参数的函数} \end{cases} \text{ 的值域为 } D, \text{ 首先把分段函数中的一段具体}$$

函数的值域 D_1 求出来, 其次根据已知条件函数的值域为 D , 由 $D_1 \cup D_2 = D$ 确定出 D_2 的范围,

最后通过 D_2 的范围确定出参量的取值范围.



典例剖析*展示

///

类型七 分段函数的值域(最值)

【典例 19】函数 $f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 + 1, & x \leq 1 \\ x+2, & x > 1 \end{cases}$ 的值域为_____.

【答案】 $[1, +\infty)$

【分析】分类讨论, 分别求 $x \leq 1$ 、 $x > 1$ 时 $f(x)$ 的取值范围, 再取两者的并集.

当 $x \leq 1$ 时, 则 $f(x) = (x-1)^2 + 1 \geq 1$

当 $x > 1$ 时, 则 $f(x) = x+2 > 3$

综上所述: $f(x) \geq 1$, 即 $f(x)$ 的值域为 $[1, +\infty)$

故答案为: $[1, +\infty)$.

【举一反三】

1. 函数 $y = \begin{cases} x^2, & x > 0 \\ -2, & x < 0 \end{cases}$ 的定义域为_____, 值域为_____.

【典例 20】已知函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2x-1}, & x \geq 2 \\ -x^2 + 2x - 2, & -1 \leq x < 2 \end{cases}$, 则 $f(x)$ 的值域为 ()

- A. $[-5, -1] \cup \left(-\infty, \frac{1}{3}\right]$ B. $[-5, -1] \cup \left(0, \frac{1}{3}\right]$
 C. $[-5, -2) \cup \left(0, \frac{1}{3}\right]$ D. $[-5, -2) \cup \left(-\infty, \frac{1}{3}\right]$

【答案】B

【分析】根据分段函数各区间上的解析式，由分式、二次函数的性质求对应区间上的值域，进而取并即可。

当 $x \geq 2$ 时，函数单调递减，故 $f(x) = \frac{1}{2x-1} \in (0, \frac{1}{3}]$ ；

当 $-1 \leq x < 2$ 时， $f(x) = -(x-1)^2 - 1$ 开口向下且对称轴为 $x=1$ ，且在对称轴左侧递增，右侧递减，

$\therefore$ 易知： $f(x) \in [-5, -1]$ ；

综上， $f(x)$ 的值域为 $[-5, -1] \cup \left(0, \frac{1}{3}\right]$ 。

故选 B。

【举一反三】

2. 函数 $y = \begin{cases} 2x^2, & 0 \leq x \leq 1 \\ 2, & 1 < x < 2 \\ 3, & x \geq 2 \end{cases}$ 的值域是 ()

- A. R B. $[0, +\infty)$
 C. $[0, 3]$ D. $\{y | 0 \leq y \leq 2 \text{ 或 } y = 3\}$

【典例 21】已知函数 $f(x) = \begin{cases} 1-|x|, & x \leq 2 \\ x^2 - 6x + 3, & x > 2 \end{cases}$ ，

(1) 若 $f(m) = 10$ ，则 $m =$ _____；

(2) 若 $f(f(m)) \geq 0$ ，则实数 m 的取值范围是 _____。

【答案】7 $-2 \leq m \leq 2$ 或 $3 + \sqrt{5} \leq m \leq 3 + \sqrt{7}$ 或 $m \geq 3 + \sqrt{9 + \sqrt{6}}$ 。

【分析】在不同区间上令 $f(x) = 10$ 求自变量即可；令 $f(x) \geq 0$ 求出不同区间上对应的解集，即可确定 $f[f(m)] \geq 0$ 中 $f(m)$ 的范围，再结合解析式求 m 的范围。

当 $x \leq 2$ 时， $1 - |x| = 10$ ，显然无解；

当 $x > 2$ 时， $x^2 - 6x + 3 = 10$ ，即 $x^2 - 6x - 7 = (x-7)(x+1) = 0$ ，则 $x = 7$ ($x = -1$ 舍)，

$\therefore f(m) = 10$ ，则 $m = 7$ ；

当 $x \leq 2$ 时, $1 - |x| \geq 0$, 即 $-1 \leq x \leq 1$, 此时 $-1 \leq x \leq 1$;

当 $x > 2$ 时, $x^2 - 6x + 3 \geq 0$, 即 $x \geq 3 + \sqrt{6}$ 或 $x \leq 3 - \sqrt{6}$, 此时 $x \geq 3 + \sqrt{6}$;

$\therefore f[f(m)] \geq 0$, 即 $-1 \leq f(m) \leq 1$ 或 $f(m) \geq 3 + \sqrt{6}$,

对于 $-1 \leq f(x) \leq 1$, 有:

当 $x \leq 2$ 时, $-1 \leq 1 - |x| \leq 1$, 即 $0 \leq |x| \leq 2$, 可得 $-2 \leq x \leq 2$;

当 $x > 2$ 时, $-1 \leq x^2 - 6x + 3 \leq 1$, 即 $\begin{cases} x^2 - 6x + 4 \geq 0 \\ x^2 - 6x + 2 \leq 0 \end{cases}$, 可得 $3 + \sqrt{5} \leq x \leq 3 + \sqrt{7}$;

对于 $f(x) \geq 3 + \sqrt{6}$, 由 $1 - |x| \leq 1$, 故无解,

$\therefore x > 2$ 时有 $x^2 - 6x + 3 \geq 3 + \sqrt{6}$, 即 $x^2 - 6x - \sqrt{6} \geq 0$, 解得 $x \geq 3 + \sqrt{9 + \sqrt{6}}$ ($x \leq 3 - \sqrt{9 + \sqrt{6}}$ 舍).

综上, $f[f(m)] \geq 0$ 时有 $-2 \leq m \leq 2$ 或 $3 + \sqrt{5} \leq m \leq 3 + \sqrt{7}$ 或 $m \geq 3 + \sqrt{9 + \sqrt{6}}$.

故答案为: 7, $-2 \leq m \leq 2$ 或 $3 + \sqrt{5} \leq m \leq 3 + \sqrt{7}$ 或 $m \geq 3 + \sqrt{9 + \sqrt{6}}$.

【举一反三】

3. 函数 $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 1, & 0 < x < 1 \\ 0, & x = 0, \\ x^2 - 1, & -1 < x < 0, \end{cases}$ 的定义域为_____, 值域为_____.

类型八 由分段函数的单调性求参数

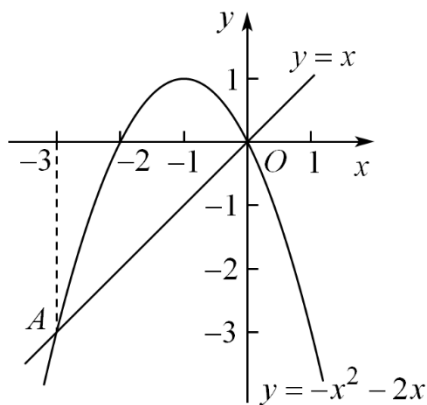
【典例 22】已知函数 $f(x) = \begin{cases} -x^2 - 2x, & x \leq m \\ x, & x > m \end{cases}$ 在 $\mathbb{R}$ 上单调递增, 则实数 m 的取值范围是()

A. $m \leq -3$ B. $-3 \leq m \leq -1$ C. $m \leq -1$ D. $m \leq -3$ 或 $m \geq -1$

【答案】A

【分析】根据分段函数解析式, 分别在坐标系画出分段函数两个函数图象, 结合图象可得满足函数 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上单调递增时实数 m 的取值范围.

在同一坐标系下, 作出函数 $y = -x^2 - 2x$ 与 $y = x$ 的图象, 如图所示:



当 $-x^2 - 2x = x$ 时, $x = -3$ 或 $x = 0$, 由图可知函数 $f(x) = \begin{cases} -x^2 - 2x, & x \leq m \\ x, & x > m \end{cases}$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增,

当 $m \leq -3$ 时能满足. 故选 A.

【举一反三】

4. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 2x, & x < a \\ x, & x \geq a \end{cases}$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增, 则 ()

A. $a \leq 1$

B. $a \leq 0$

C. $a \geq 1$ 或 $a = 0$

D. $a \leq 0$ 或 $a = 1$

【典例 23】(多选题) 设函数 $f(x) = \begin{cases} ax - 1, & x < a \\ x^2 - 2ax + 1, & x \geq a \end{cases}$, 当 $f(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上增函数时, 实数 a 的

值可能是 ()

A. $\frac{1}{2}$ B. 1 C. 0 D. $\frac{2}{3}$

【答案】ABD

【分析】由每一段上为增函数, 且当 $x = a$ 时, $a^2 - 1 \leq a^2 - 2a^2 + 1$, 从而可求出实数 a 的范围, 进而可得答案.

当 $x < a$ 时, $f(x) = ax - 1$ 为增函数, 则 $a > 0$,

当 $x \geq a$ 时, $f(x) = x^2 - 2ax + 1 = (x - a)^2 + 1 - a^2$ 为增函数,

若 $f(x)$ 为增函数, 则 $a^2 - 1 \leq a^2 - 2a^2 + 1$, 且 $a > 0$, 解得 $0 < a \leq 1$,

$\therefore$ 实数 a 的值可能是 $(0, 1]$ 内的任意实数. 故选 ABD.

【举一反三】

5. 若函数 $f(x) = \begin{cases} x - 2, & x \leq m \\ x^2 - 2x, & x > m \end{cases}$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的增函数, 则实数 m 的取值范围是 ()

- A. $(-\infty, 1] \cup \{2\}$ B. $\{1\} \cup [2, +\infty)$ C. $(-\infty, 1]$ D. $[2, +\infty)$

【典例 24】已知函数 $f(x) = \begin{cases} 2^{x+1} - 1, & x > t \\ 1 - |x - 1|, & x \leq t \end{cases}$, $t \in \mathbf{R}$, 则“ $t \leq \frac{1}{2}$ ”是“函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递

增”的 ()

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件 C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

【答案】A

【分析】首先根据函数的解析式, 研究函数的单调性; 然后作出函数的图象, 根据函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增, 结合函数的图象, 得出 $t \leq 1$, 即可得出答案.

第一步: 研究函数 $y = 2^{x+1} - 1$, $y = 1 - |x - 1|$ 的单调性

易知函数 $y = 2^{x+1} - 1$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增,

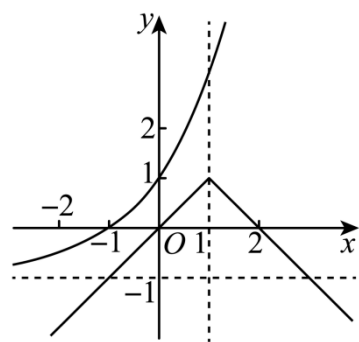
函数 $y = 1 - |x - 1|$ 在 $(-\infty, 1)$ 上单调递增, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减.

第二步: 数形结合, 将函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增进行转化

在同一平面直角坐标系中作出函数 $y = 2^{x+1} - 1$, $y = 1 - |x - 1|$ 的图象如图所示.

由图象可知, 函数 $y = 1 - |x - 1|$ 的图象始终在 $y = 2^{x+1} - 1$ 的下方,

$\therefore$ 要使函数 $f(x) = \begin{cases} 2^{x+1} - 1, & x > t \\ 1 - |x - 1|, & x \leq t \end{cases}$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增, 则 $t \leq 1$.



第三步: 判断充要关系

$\therefore$ “ $t \leq \frac{1}{2}$ ”是“ $t \leq 1$ ”的充分不必要条件, 则“ $t \leq \frac{1}{2}$ ”是“函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增”的充分不必要条件. 故选 A.

【举一反三】

6. 若函数 $f(x) = \begin{cases} 2x, & x \geq a \\ -x^2 + 4x, & x < a \end{cases}$ 为 $\mathbb{R}$ 上的单调函数, 则实数 a 的取值范围是_____.

类型九 由分段函数的最值(值域)求参数

【典例 25】已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2ax + 9, & x \leq 1 \\ x + \frac{4}{x} + a, & x > 1 \end{cases}$, 若 $f(x)$ 的最小值为 $f(1)$, 则实数 a 的值可以

是 ()

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

【答案】BCD

【分析】分别求得 $x > 1$ 和 $x \leq 1$ 时的最小值, 结合题意, 即可得答案.

当 $x > 1$, $f(x) = x + \frac{4}{x} + a \geq 4 + a$,

当且仅当 $x = 2$ 时, 等号成立,

当 $x \leq 1$ 时, $f(x) = x^2 - 2ax + 9$ 为二次函数, 要想在 $x = 1$ 处取最小,

则对称轴要满足 $x = a \geq 1$, 且 $f(1) \leq 4 + a$,

即 $1 - 2a + 9 \leq a + 4$, 解得 $a \geq 2$,

故选 BCD.

【举一反三】

7. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax, & x < 0 \\ -\frac{x}{x+1}, & x \geq 0 \end{cases}$ 的最小值为 -1, 则 $a =$ _____.

【典例 26】已知 $f(x) = \begin{cases} x^2, & -1 \leq x \leq 1 \\ 1, & x > 1 \text{ 或 } x < -1 \end{cases}$.

(1) 若 $f(x) \geq \frac{1}{4}$, 则 x 的取值范围为_;

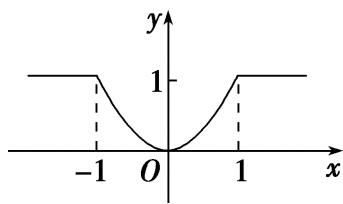
(2) $f(x)$ 的值域为_.

【答案】 $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$ [0, 1]

【分析】(1) 可分类讨论解不等式, 或者数形结合求解;

(2) 分别求分段函数每一段上的值域, 再求并集, 也可数形结合求解.

(1) 利用描点法, 作出 $f(x)$ 的图象, 如图所示:



由于 $f\left(\pm\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}$,

结合此函数图象可知, 使 $f(x) \geq \frac{1}{4}$ 的 x 的取值范围是 $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$.

(2) 由图象知, 当 $-1 \leq x \leq 1$ 时, $f(x) = x^2$ 的值域为 $[0, 1]$,

当 $x > 1$ 或 $x < -1$ 时, $f(x) = 1$.

$\therefore f(x)$ 的值域为 $[0, 1]$.

故答案为: $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{1}{2}, +\infty\right), [0, 1]$.

【反思与总结】

解题思路: 分段函数值域是各段函数值域的并集.

【举一反三】

8. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} a(x-a)^2 - 1, & x < a \\ |x-2a| - 2, & x \geq a \end{cases}$ 的值域为 $\mathbf{R}$, 则实数 a 的取值范围为_____.

【典例 27】已知函数 $f(x) = \begin{cases} -x^2 + mx - 2, & x \leq 2 \\ x - 3, & x > 2 \end{cases}$, 若 $f(x)$ 的值域是 $\mathbf{R}$, 则实数 m 的取值范围是_.

【答案】 $(-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$

【分析】根据函数解析式, 可得当 $x > 2$ 时, $f(x) \in (-1, +\infty)$, 然后利用二次函数的图象与性质讨论当 $x \leq 2$ 时, 函数 $f(x)$ 的值域, 然后根据整个函数的定义域为 $\mathbf{R}$, 列出不等式, 解之即可.

$$\therefore \text{函数 } f(x) = \begin{cases} -x^2 + mx - 2, & x \leq 2 \\ x - 3, & x > 2 \end{cases},$$

当 $x > 2$ 时, $f(x) = x - 3$ 在 $(2, +\infty)$ 上为增函数, $f(x) \in (-1, +\infty)$,

当 $x \leq 2$ 时, $f(x) = -x^2 + mx - 2 = -(x - \frac{m}{2})^2 + \frac{m^2}{4} - 2$,

①当 $\frac{m}{2} \leq 2$, 即 $m \leq 4$ 时, $f(x)_{\max} = f(\frac{m}{2}) = \frac{m^2}{4} - 2$,

要使函数 $f(x)$ 的值域是 $\mathbf{R}$ ，则有 $\frac{m^2}{4} - 2 \geq -1$ ，解得 $m \leq -2$ 或 $2 \leq m \leq 4$ ，

②当 $\frac{m}{2} > 2$ ，即 $m > 4$ 时， $f(x)_{\max} = f(2) = 2m - 6$ ，

要使函数 $f(x)$ 的值域是 $\mathbf{R}$ ，则有 $2m - 6 \geq -1$ ，解得 $m \geq \frac{5}{2}$ ，结合 $m > 4$ ， $\therefore m > 4$ ；

综合①②得 $m \leq -2$ 或 $m \geq 2$ ，

故答案为： $(-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$.

【举一反三】

(2025 高一上广东东莞期中考试)

9. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} (1-2a)x+3a, & x < 1 \\ x-\frac{1}{x}, & x \geq 1 \end{cases}$ 的值域为 $\mathbf{R}$ ，那么 a 的取值可以是 ()

A. 0

B. -1

C. 1

D. $\frac{1}{2}$

类型十 解分段函数不等式

【典例 28】已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^2+x, & x \geq 0 \\ -3x, & x < 0 \end{cases}$ ，若 $a[f(a)-f(-a)] > 0$ ，则实数 a 的取值范围为_.

【答案】 $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$

【分析】讨论 $a=0$ ， $a>0$ 和 $a<0$ 三种情况，分别解出 a 的范围，最后求并集即可.

当 $a=0$ 时，显然不成立；

当 $a>0$ 时，不等式 $a[f(a)-f(-a)] > 0$ 可化为 $a^2+a-3a > 0$ ，解得 $a > 2$ ；

当 $a<0$ 时，不等式 $a[f(a)-f(-a)] > 0$ 可化为 $-a^2-2a < 0$ ，解得 $a < -2$.

综上所述， a 的取值范围为 $a > 2$ 或 $a < -2$

故答案为： $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$.

【反思与总结】

分段函数的不等式的解集问题，一般都要通过分类讨论求解，每一类中条件与解得的范围取交集，而各类之间取并集.

【举一反三】

10. 设 $f(x) = \begin{cases} x+2, & x > 0 \\ x-2, & x \leq 0 \end{cases}$ ，则不等式 $f(x) < x^2$ 的解集是 ()

A. $(-\infty, 0] \cup (2, +\infty)$

B. $\mathbf{R}$

C. $[0, 2)$

D. $(-\infty, 0)$

【典例 29】已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2, & x \geq 0 \\ 1, & x < 0 \end{cases}$ ，则不等式 $f(1-x^2) > f(3x)$ 的解集为_.

【答案】 $\left[-1, \frac{-3+\sqrt{13}}{2}\right)$

【分析】当 $x \in [0, +\infty)$ 时，由单调性解不等式即可.

函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2, & x \geq 0 \\ 1, & x < 0 \end{cases}$,

当 $x \in [0, +\infty)$ ，函数 $f(x)$ 单调递增，

则 $f(1-x^2) > f(3x)$ 化为 $\begin{cases} 1-x^2 \geq 0 \\ 1-x^2 > 3x \end{cases}$,

解得 $-1 \leq x < \frac{-3+\sqrt{13}}{2}$,

故答案为: $\left[-1, \frac{-3+\sqrt{13}}{2}\right)$.

【举一反三】

11. 已知 $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 2x, & x \geq 0 \\ x^2 + 2x, & x < 0 \end{cases}$ ，满足 $f(a) < f(-a)$ ，则 a 的取值范围是_____.

【典例 30】已知 $f(x) = \begin{cases} x+1, & x \leq 0 \\ x^2+1, & x > 0 \end{cases}$ ，若 $f(x) + f\left(x - \frac{1}{2}\right) > 1$ ，则 x 的取值范围是 ()

A. $\left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$ B. $(-\infty, 0)$ C. $\left(-\frac{1}{4}, +\infty\right)$ D. $\left(\frac{1}{4}, +\infty\right)$

【答案】C

【分析】根据给定的分段函数，分段讨论求解不等式作答.

函数 $f(x) = \begin{cases} x+1, & x \leq 0 \\ x^2+1, & x > 0 \end{cases}$,

当 $x > \frac{1}{2}$ 时, $x - \frac{1}{2} > 0$, 不等式 $f(x) + f(x - \frac{1}{2}) > 1$ 化为: $x^2 + 1 + (x - \frac{1}{2})^2 + 1 > 1$ 恒成立, 则 $x > \frac{1}{2}$,

当 $0 < x \leq \frac{1}{2}$ 时, $x - \frac{1}{2} \leq 0$, 不等式 $f(x) + f(x - \frac{1}{2}) > 1$ 化为: $x^2 + 1 + x - \frac{1}{2} + 1 > 1$ 恒成立, 则 $0 < x \leq \frac{1}{2}$,

当 $x \leq 0$ 时, $x - \frac{1}{2} < x \leq 0$, 不等式 $f(x) + f(x - \frac{1}{2}) > 1$ 化为: $x + 1 + x - \frac{1}{2} + 1 > 1$,

解得 $x > -\frac{1}{4}$, 则 $-\frac{1}{4} < x \leq 0$,

$\therefore x$ 的取值范围是 $(-\frac{1}{4}, +\infty)$.

故选 C.

【举一反三】

12. 已知 $f(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$, 则不等式 $x + (x+2) \cdot f(x+2) \leq 5$ 的解集是_____.

类型十一 分段函数图象及其应用

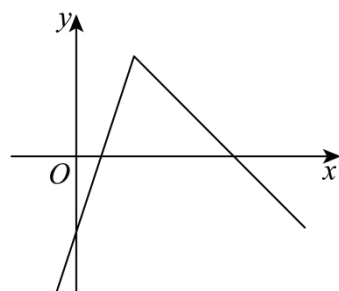
【典例 31】对于实数 a, b , 定义符号 $\min\{a, b\}$, 其意义为: 当 $a > b$ 时, $\min\{a, b\} = b$; 当 $a < b$ 时, $\min\{a, b\} = a$. 例如: $\min\{-2, 1\} = -2$, 若关于 x 的函数 $y = \min\{3x-1, -x+2\}$, 则该函数的最大值为_.

【答案】 $\frac{5}{4}$

【分析】根据符号 $\min\{a, b\}$ 的意义, 结合函数图象求解即可.

在平面直角坐标系中画出 $y = 3x-1$ 和 $y = -x+2$ 的图象, 根据符号 $\min\{a, b\}$ 的意义可知,

截取交点及其下方的图象, 得到函数 $y = \min\{3x-1, -x+2\}$ 的图象:



$$\text{联立方程 } \begin{cases} y=3x-1 \\ y=-x+2 \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} x=\frac{3}{4} \\ y=\frac{5}{4} \end{cases}.$$

$\therefore$ 函数最大值为 $\frac{5}{4}$.

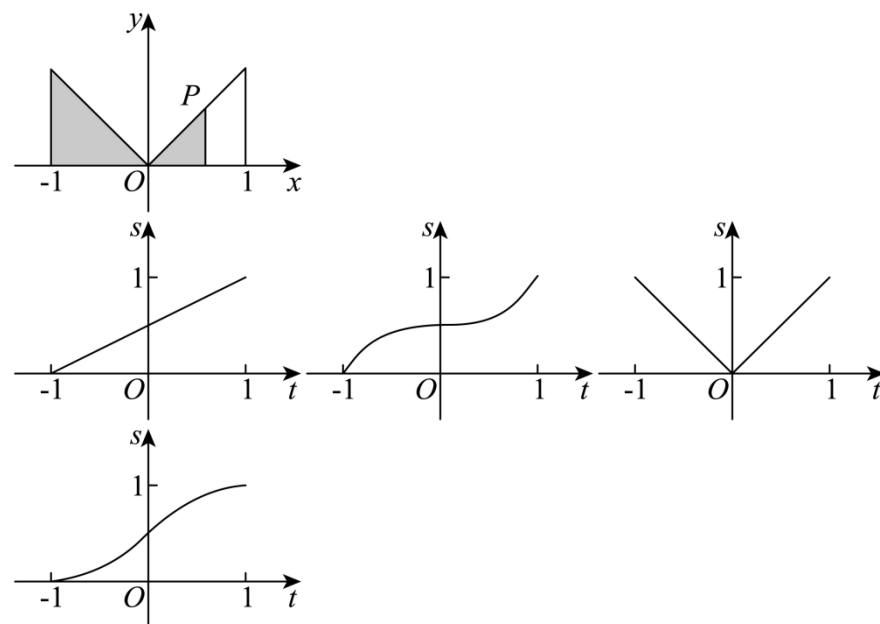
故答案为: $\frac{5}{4}$.

【举一反三】

13. 给定函数 $f(x)=x+2, g(x)=4-x^2$, 对于 $\forall x \in R$, 用 $M(x)$ 表示 $f(x), g(x)$ 中的较小者, 记为 $M(x)=\min\{f(x), g(x)\}$, 则 $M(x)$ 的最大值为 ()

- A. 0 B. 1 C. 3 D. 4

【典例 32】设 $P(t, |t|)$ 为函数 $y=|x|, x \in [-1, 1]$ 图象上的动点, 若此函数图象与 x 轴, 直线 $x=-1$ 及 $x=t$ 围成图形 (如图阴影部分) 的面积为 $f(t)$, 则 $y=f(t)$ 的图象可表示为 ()



- A. B. C. D.

【答案】B

【分析】根据题意求出 $f(t)$, 再根据函数解析式判断函数图象.

由题意可知

当 $-1 \leq t \leq 0$ 时, $f(t) = \frac{1}{2}(-t+1)(t+1) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}t^2$, 且 $t \rightarrow 0$ 过程中增速变慢,

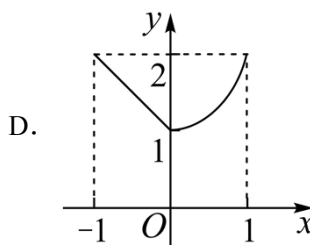
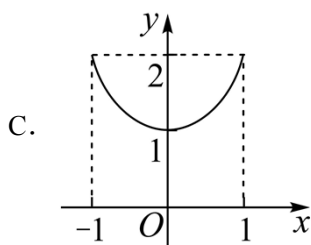
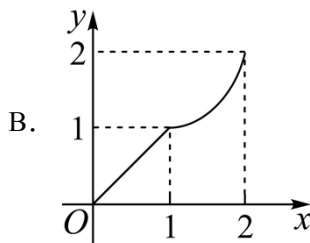
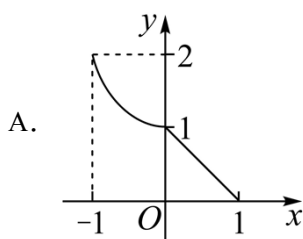
当 $0 < t \leq 1$ 时, $f(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}t^2$, 且 $t \rightarrow 1$ 过程中增速变快,

$\therefore y=f(t)$ 的图象可表示为选项 B,

故选 B.

【举一反三】

14. 已知 $f(x) = \begin{cases} x+1, & x \in [-1, 0) \\ x^2+1, & x \in [0, 1] \end{cases}$, 则函数 $y = f(-x)$ 的图象是 ()



【典例 33】已知 $f(x) = 3 - 2|x|$, $g(x) = x^2 - 2x$, $F(x) = \begin{cases} g(x), & \text{若 } f(x) \geq g(x) \\ f(x), & \text{若 } f(x) < g(x) \end{cases}$, 则 $F(x)$ 的最值是 ()

- A. 最大值为 -3 , 最小值为 -1 B. 最大值为 $7 - 2\sqrt{7}$, 无最小值
C. 最大值为 3 , 无最小值 D. 既无最大值, 又无最小值

【答案】B

【分析】根据函数表达式画出各自图象, $F(x)$ 其实表示的是 $f(x), g(x)$ 较小的值.

如图, 在同一坐标系中画出 $f(x), g(x)$ 图象, 又 $F(x)$ 表示两者较小值, $\therefore$ 很清楚发现 $F(x)$ 在

A 处取得最大值 $3 + 2x = x^2 - 2x \Rightarrow x_A = 2 - \sqrt{7} \Rightarrow y_A = 3 + 2x_A = 7 - 2\sqrt{7}$, 无最小值.

故选 B.

以上内容仅为本文档的试下载部分, 为可阅读页数的一半内容。

如要下载或阅读全文, 请访问:

<https://d.book118.com/446242100113011015>

