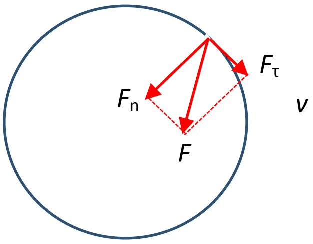
2024版高三物理培优——模型与方法

专题09 竖直面内的圆周运动模型

目录

一．一般圆周运动的动力学分析

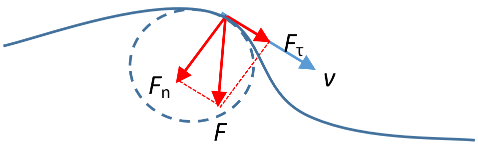
如图所示，做圆周运动的物体，所受合外力与速度成一般夹角时，可将合外力沿速度和垂直速度分解，则由牛顿第二定律，有：



$F_\tau=ma_\tau$，a_τ改变速度v的大小

$F_n=ma_n$，a_n改变速度v的方向，$a_n=\dfrac{v^2}{r}$

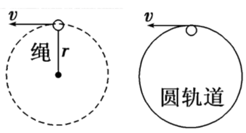
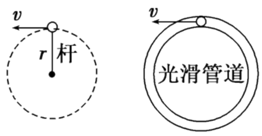
作一般曲线运动的物体，处理轨迹线上某一点的动力学时，可先以该点附近的一小段曲线为圆周的一部分作曲率圆，然后即可按一般圆周运动动力学处理。

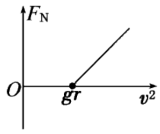
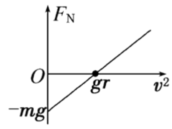


$F_\tau=ma_\tau$，a_τ改变速度v的大小

$F_n=ma_n$，a_n改变速度v的方向，$a_n=\dfrac{v^2}{\rho}$，ρ为曲率圆半径。

二．竖直面内“绳、杆（单、双轨道）”模型对比分析

	轻绳模型（没有支撑）	轻杆模型（有支撑）
常见类型		
过最高点的临界条件	由$mg=m\dfrac{v^2}{r}$得$v_{临}=\sqrt{gr}$	由小球能运动即可得$v_{临}=0$
	对应最低点速度$v_{低}\geq\sqrt{5gr}$	对应最低点速度$v_{低}\geq\sqrt{4gr}$

绳不松不脱轨条件	$v_{低}\ge\sqrt{5gr}$ 或 $v_{低}\le\sqrt{2gr}$	不脱轨
最低点弹力	$F_{低}-mg=mv_{低}^2/r$ $F_{低}=mg+mv_{低}^2/r$，向上拉力	$F_{低}-mg=mv_{低}^2/r$ $F_{低}=mg+mv_{低}^2/r$，向上拉力
最高点弹力	过最高点时，$v\ge\sqrt{gr}$，$F_N+mg=m\frac{v^2}{r}$，绳、轨道对球产生弹力 $F_N=m\frac{v^2}{r}-mg$ 向下压力	(1)当 $v=0$ 时，$F_N=mg$，F_N为向上支持力 (2)当 $0<v<\sqrt{gr}$时，$-F_N+mg=m\frac{v^2}{r}$，F_N向上支持力，随 v 的增大而减小 (3)当 $v=\sqrt{gr}$时，$F_N=0$ (4)当 $v>\sqrt{gr}$时，$F_N+mg=m\frac{v^2}{r}$，F_N为向下压力并随 v 的增大而增大
在最高点的 F_N 图线	 取竖直向下为正方向	 取竖直向下为正方向

三．竖直面内圆周运动常见问题与二级结论

【问题 1】一个小球沿一竖直放置的光滑圆轨道内侧做完整的圆周运动，轨道的最高点记为 A 和最低点记为 C，与原点等高的位置记为 B。圆周的半径为 R

要使小球做完整的圆周运动，当在最高点 A 的向心力恰好等于重力时，由 $mg=m\frac{v^2}{R}$ 可得 $v=\sqrt{gR}$ ①

对应 C 点的速度有机械能守恒

$mg2R=\frac{1}{2}mv_C^2-\frac{1}{2}mv_A^2$ 得 $v_C=\sqrt{5gR}$ ②

当小球在 C 点时给小球一个水平向左的速度若小球恰能到达与 O 点等高的 D 位置则由机械能守恒

$mgR=\frac{1}{2}mv_c^2$ 得 $v_c=\sqrt{2gR}$ ③

小结：(1).当 $v_c>\sqrt{5gR}$ 时小球能通过最高点 A 小球在 A 点受轨道向内的支持力

由牛顿第二定律 $F_A+mg=m\frac{v_A^2}{R}$ ④

(2).当 $v_c=\sqrt{5gR}$ 时小球恰能通过最高点 A 小球在 A 点受轨道的支持力为 0

由牛顿第二定律$mg = m\frac{v_A^2}{R}$。⑤

(3).当$\sqrt{2gR} < v_c < \sqrt{5gR}$时小球不能通过最高点$A$小球在$A$点，上升至$DA$圆弧间的某一位向右做斜抛运动离开圆周，且$v$越大离开的位置越高，离开时轨道的支持力为0

在DA段射重力与半径方向的夹角为θ则$mg\cos\theta = m\frac{v^2}{R}$、$\cos\theta = \frac{h}{R}$

(4).当$0 < v_c \le \sqrt{2gR}$时小球不能通过最高点A上升至CD圆弧的某一位置速度减为0之后沿圆弧返回。上升的最高点为C永不脱离轨道

【问题2】常见几种情况下物体受轨道的作用力

(1)从最高点A点静止释放的小球到达最低点C：由机械能守恒$mg2R = \frac{1}{2}mv_C^2$

在C点由牛顿运动定律：$F_N - mg = m\frac{v_C^2}{R}$ 得$F_N = 5mg$⑥

(2)从与O等高的D点（四分之一圆弧）处静止释放到达最低点C：由机械能守恒 $mgR = \frac{1}{2}mv_C^2$

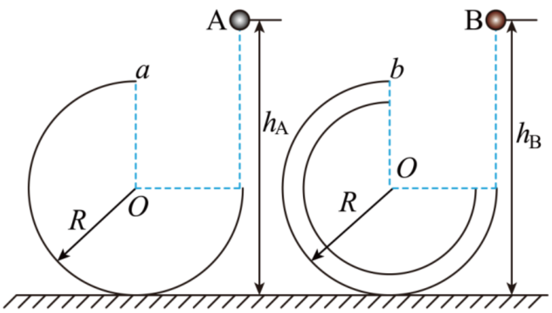
在C点由牛顿运动定律：$F_N - mg = m\frac{v_C^2}{R}$ 得$F_N = 3mg$⑦

(3)从A点以初速度$v_A = \sqrt{gR}$释放小球到达最低点

由机械能守恒$mg2R = \frac{1}{2}mv_C^2 - \frac{1}{2}mv_A^2$

在C点由牛顿运动定律：$F_N - mg = m\frac{v_C^2}{R}$ 得$F_N = 6mg$⑧

【模型演练1】（2023·山东·模拟预测）如图所示，两个圆弧轨道竖直固定在水平地面上，半径均为R，a轨道由金属凹槽制成，b轨道由金属圆管制成（圆管内径远小于R），均可视为光滑轨道。在两轨道右端的正上方分别将金属小球A和B（直径略小于圆管内径）由静止释放，小球距离地面的高度分别用h_A和h_B表示，两小球均可视为质点，下列说法中正确的是（　　）



A．若 $h_A=h_B\geq 2R$，两小球都能沿轨道运动到轨道最高点

B．若 $h_A=h_B=R$，两小球沿轨道上升的最大高度均为 R

C．适当调整 h_A 和 h_B，均可使两小球从轨道最高点飞出后，恰好落在轨道右端口处

D．若使小球沿轨道运动并且从最高点飞出，h_A 的最小值为 $\frac{5}{2}R$，B 小球在 $h_B>2R$ 的任何高度释放均可

【答案】BD

【详解】AD．B 轨道是双轨模型，到达最高点的最小速度为零。即若 $h_B\geq 2R$ 时，B 球能沿轨道运动到最高点；若 A 小球恰好运动到最高点，则有

$$m_A g=m_A\frac{v_0^2}{R}$$

$$m_A g\left(h_A-2R\right)=\frac{1}{2}m_A v_0^2$$

解得

$$h_A=2.5R$$

可知，若小球 A 能够到达最高点，需要

$$h_A\geq 2.5R$$

选项 A 错误，D 正确；

B．若 $h_A=h_B=R$，根据机械能守恒定律可知，两小球沿轨道上升的最大高度均为 R，不超过过圆心的水平线，选项 B 正确；

C．B 小球从轨道最高点飞出后，恰好落在轨道右端口，则有

$$R=\frac{1}{2}gt^2$$

$$R=vt$$

对 B 球有

$$m_B g\left(h_B-2R\right)=\frac{1}{2}m_B v^2$$

解得

$$h_B=\frac{9}{4}R$$

对 A 球，从最高点射出时最小速度为$v_{\min}=\sqrt{gR}$此时根据

$$R=\frac{1}{2}gt^2$$

$$x_{\min}=v_{\min}t$$

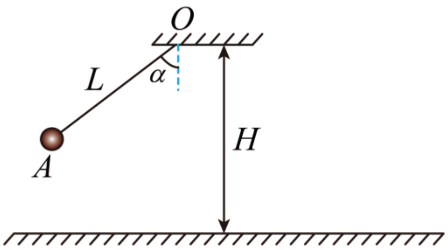
解得

$$x_{\min}=\sqrt{2}R>R$$

则无论如何调节h_A都不可能使 A 小球从轨道最高点飞出后，恰好落在轨道右端口处，选项 C 错误；

故选 BD。

【模型演练 2】.（2023·河北沧州·沧县中学校考模拟预测）一不可伸长的轻绳上端悬挂于O点，另一端系有质量为M的小球，保持绳绷直将小球拉到绳与竖直方向夹角为α的A点由静止释放，运动到O点的正下方时绳断开，小球做平抛运动，已知O点离地高度为H，绳长为L，重力加速度大小为g，不计空气阻力，下列说法正确的是（　　）



A．在绳断开前，小球受重力、绳的拉力和向心力作用

B．在绳断开前瞬间，小球处于失重状态

C．在绳断开前瞬间，小球所受绳子的拉力大小为$(3-2\cos\alpha)mg$

D．若夹角α不变，当$L=\frac{H}{2}$时，落点距起点的水平距离最远

【答案】CD

【详解】A．在绳断开前，小球在竖直平面内做圆周运动，小球只受重力和绳的拉力作用，故 A 错误；

B．在绳断开前瞬间，小球加速度方向竖直向上，处于超重状态，故 B 错误；

C．在绳断开前瞬间，设小球受绳子拉力为T，根据牛顿第二定律可得

$$T-mg=m\frac{v^2}{L}$$

质量为m的小球由静止开始，运动到O点正下方过程中机械能守恒，则有

$$mgL\left(1-\cos\alpha\right)=\frac{1}{2}mv^2$$

联立解得

$$T=\left(3-2\cos\alpha\right)mg$$

故 C 正确；

D．绳断开后，小球做平抛运动，在水平方向上做匀速直线运动，则有

$$x=vt$$

在竖直方向上做自由落体运动，则有

$$H-L=\frac{1}{2}gt^2$$

联立解得

$$x=\sqrt{4L\left(H-L\right)\left(1-\cos\alpha\right)}$$

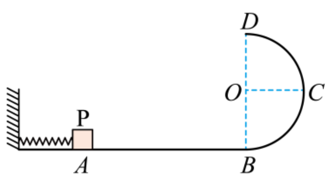
根据基本不等式可知，当

$$L=H-L$$

即 $L=\dfrac{H}{2}$ 时，落点距起点的水平距离最远，故 D 正确。

故选 CD。

【模型演练 3】.（**2023·全国·高三专题练习**）如图所示，被锁定在墙边的压缩弹簧右端与质量为 0.2kg、静止于 A 点的滑块 P 接触但不粘连，滑块 P 所在光滑水平轨道与半径为 0.8m 的光滑半圆轨道平滑连接于 B 点，压缩的弹簧储存的弹性势能为 2.8J，重力加速度取 10m/s²，现将弹簧解除锁定，滑块 P 被弹簧弹出，脱离弹簧后冲上半圆轨道的过程中（　　）



A．可以到达半圆轨道最高点 D

B．经过 B 点时对半圆轨道的压力大小为 9N

C．不能到达最高点 D，滑块 P 能到达的最大高度为 1.35m

D．可以通过 C 点且在 CD 之间某位置脱离轨道，脱离时的速度大小为 2.2m/s

【答案】BC

【详解】A．设滑块 P 恰能通过最高点 D，则有

$$mg = m\frac{v_D^2}{R}$$

解得

$$v_D = 2\sqrt{2}\text{m/s}$$

则滑块 P 从 B 点到 D 点，根据动能定理有

$$-mg\times 2R = \frac{1}{2}mv_D^2 - \frac{1}{2}mv_B'^2$$

解得滑块在 B 点的动能为

$$E_{kB}' = \frac{1}{2}mv_B'^2 = 4\text{J} > 2.8\text{J}$$

所以滑块不能到达半圆轨道最高点 D，故 A 错误；

B．滑块经过 B 点时的速度大小为 v_B，根据功能关系可得

$$E_{弹簧} = \frac{1}{2}mv_B^2$$

在 B 点根据牛顿第二定律可得

$$F_N - mg = m\frac{v_B^2}{R}$$

联立解得

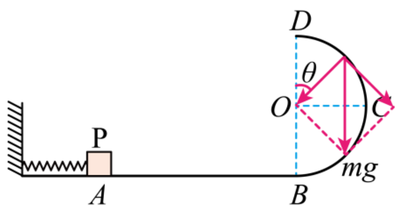
$$F_N = 9\text{N}$$

根据牛顿第三定律可知对半圆轨道的压力大小为 9N，故 B 正确；

CD．滑块在 C 点的重力势能为

$$E_p' = mgR = 0.2\times 10\times 0.8\text{J} = 1.6\text{J} < 2.8\text{J}$$

则滑块可以通过 C 点且在 CD 之间某位置脱离轨道，此时的速度大小为 v



根据功能关系可得

$$E_{弹簧} = \frac{1}{2}mv^2 + mgR(1+\cos\theta)$$

根据牛顿第二定律可得

$$mg\cos\theta = m\frac{v^2}{R}$$

联立解得

$$\theta=60°，\quad v=2\text{m/s}$$

滑块离开轨道后做斜上抛运动

$$v_x=v\cos30°=2\times\frac{\sqrt{3}}{2}\text{m/s}=\sqrt{3}\text{m/s}$$

根据功能关系可得

$$E_{弹簧}=\frac{1}{2}mv_x^2+mgh$$

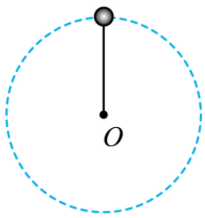
解得滑块 P 能到达的最大高度为

$$h=1.35\text{m}$$

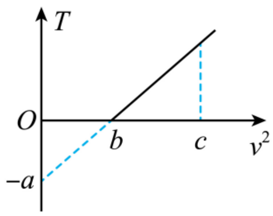
故 C 正确，D 错误。

故选 BC。

【模型演练 4】.（2023·河南安阳·安阳一中校考模拟预测）如图甲所示，若有人在某星球上用一轻质绳拴着一质量为 m 的小球，在竖直平面内做圆周运动（不计一切阻力），小球运动到最高点时速度大小为 v，绳对小球的拉力为 T，其 $T-v^2$ 图像如图乙所示，则下列选项正确的是（　　）



甲



乙

A．轻质绳长为$\frac{am}{b}$

B．当地的重力加速度为$\frac{a}{m}$

C．当$v^2=c$时，轻质绳的拉力大小为$\frac{ac}{b}+a$

D．只要$v^2\geq b$，小球在最低点和最高点时绳的拉力差均为 $6a$

【答案】BD

【详解】A．在最高点时，绳对小球的拉力和重力的合力提供向心力，则有

$$mg+T=m\frac{v^2}{L}$$

得

$$T=\frac{m}{L}v^2-mg$$

由图像知，$T=0$时，$v^2=b$。图像的斜率

$$k=\frac{a}{b}$$

则有

$$\frac{m}{L}=\frac{a}{b}$$

解得绳长

$$L=\frac{mb}{a}$$

A 错误；

B．当$v^2=0$时，$T=-a$，代入

$$mg+T=m\frac{v^2}{L}$$

得

$$-a=-mg$$

得

$$g=\frac{a}{m}$$

B 正确；

C．当$v^2=c$时，代入

$$mg+T=m\frac{v^2}{L}$$

解得

$$T=\frac{m}{L}c-mg=\frac{ac}{b}-a$$

C 错误；

D．由图知只要$v^2\geq b$，在最高点绳子的拉力大于 0，根据牛顿第二定律知，在最高点有

$$T+mg=m\frac{v^2}{L}$$

在最低点有

$$T'-mg=m\frac{v'^2}{L}$$

从最高点到最低点的过程中，根据机械能守恒定律得

$$\frac{1}{2}mv'^2-\frac{1}{2}mv^2=2mgL$$

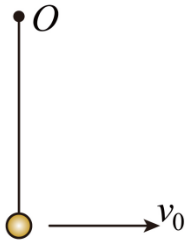
联立解得

$$T'-T=6mg$$

即小球在最低点和最高点时绳的拉力差均为$6a$，D 正确。

故选 BD。

【模型演练 5】.（2023 春·山东济南·高三统考阶段练习）如图所示，长为 L 的轻绳一端固定在 O 点，另一端固定一小球（可看成质点），现使小球在最低点获得 $v_0=2\sqrt{gL}$ 的水平初速度，取重力加速度为 g，在此后的运动过程中，下列说法正确的是（　）



A．轻绳第一次刚好松弛时，轻绳与竖直向上方向夹角的余弦值为$\frac{1}{3}$

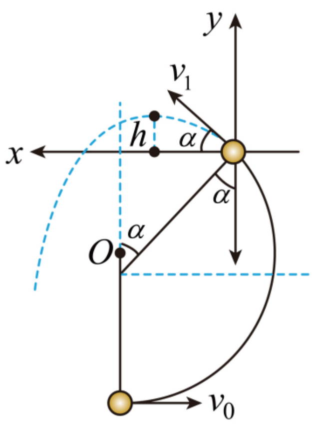
B．轻绳第一次刚好松弛时，轻绳与竖直向上方向夹角的余弦值为$\frac{2}{3}$

C．小球第一次运动到最高点时与 O 点的高度差为$\frac{23}{27}L$

D．小球第一次运动到最高点时与 O 点的高度差为$\frac{25}{27}L$

【答案】BC

【详解】AB．小球以初速度 $v_0=2\sqrt{gL}$ 绕 O 点做圆周运动，当轻绳第一次刚好松弛时，绳的拉力为零，设此时的速度大小为v_1，轻绳与竖直向上方向夹角为α，如图所示



由径向合力提供向心力，有

$$mg\cos\alpha=m\frac{v_1^2}{L}$$

由动能定理有

$$-mg(L+L\cos\alpha)=\frac{1}{2}mv_1^2-\frac{1}{2}mv_0^2$$

联立解得

$$v_1=\sqrt{\frac{2gL}{3}}，\ \cos\alpha=\frac{2}{3}$$

故 A 错误，B 正确；

CD．绳子松弛后，小球只受重力，以速度 v_1 做斜上抛运动，竖直向上做匀减速直线运动，当小球到达最高点时竖直方向的速度减为零，有

$$(v_1\sin\alpha)^2=2gh$$

而

$$\sin\alpha=\frac{\sqrt{5}}{3}$$

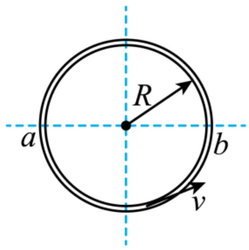
则小球第一次运动到最高点时与 O 点的高度差为

$$\Delta h=L\cos\alpha+h=\frac{2}{3}L+\frac{5}{27}L=\frac{23}{27}L$$

故 C 正确，D 错误。

故选 BC。

【模型演练 6】．（2022·全国·高三专题练习）如图所示，小球在竖直放置的光滑圆形管道内做圆周运动，管道半径为 R，小球直径略小于管径（管径远小于 R），则下列说法正确的是（重力加速度为 g）（　　）



A．小球通过最高点时的最小速度 $v_{\min}=\sqrt{gR}$

B．小球通过最高点时的最小速度 $v_{min}=0$

C．小球在水平线 ab 以下的管道中运动时，内侧管壁对小球一定无作用力

D．小球在水平线 ab 以上的管道中运动时，外侧管壁对小球一定有作用力

【答案】BC

【详解】AB．小球沿管道上升到最高点时的速度可以为 0，故 A 错误，B 正确；

C．小球在水平线 ab 以下的管道中运动时，由外侧管壁对小球的作用力 F_N 与小球重力在背离圆心方向的分力 F 的合力提供向心力，即

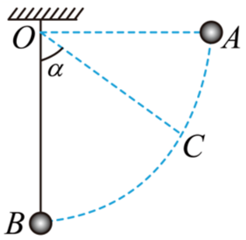
$$F_N-F_{mg}=m\frac{v^2}{R}$$

因此，外侧管壁一定对球有作用力，而内侧管壁无作用力，故 C 正确；

D．小球在水平线 ab 以上的管道中运动时，当只有重力提供向心力时，外侧管壁对小球无作用力，故 D 错误。

故选 BC。

【模型演练 7】．（2023·全国·高三专题练习）如图所示，一轻绳系一小球竖直悬挂在 O 点，现保持绳处于拉直状态，将小球拉至与 O 等高的 A 点，由静止自由释放小球。球运动过程中经过 C 点时，绳与竖直方向的夹角为 α，以下判断正确的是（　　）



A．小球下摆到最低点的过程中，重力平均功率为 0

B．小球运动至 C 点时，其加速度大小为 $g\sin\alpha$

C．小球运动至 C 点时，轻绳对小球的拉力大小 $T=3mg\cos\alpha$

D．若小球经过 C 点时重力功率最大，则 $\cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{3}$

【答案】CD

【详解】A．下落的过程中，重力做功不等于 0，根据

$$P=\frac{W}{t}$$

可知重力的平均功率不为 0，A 错误；

B．小球运动至 C 点时，对小球分析可知，其切向有

$$mg\sin\alpha=ma_1$$

解得切向加速度大小为

$$a_1=g\sin\alpha$$

小球做圆周运动，沿半径方向还具有向心加速度，因此小球运动至 C 点时，其加速度大小必定大于 $g\sin\alpha$，B 错误；

C．设绳长为 l，根据机械能守恒

$$mgl\cos\alpha=\frac{1}{2}mv^2，\ T-mg\cos\alpha=m\frac{v^2}{l}$$

解得

$$T = 3mg\cos\alpha$$

C 正确；

D．重力功率最大时，小球在竖直方向的分速度应该达到最大值，可知此时竖直方向合力为 0，因此

$$T\cos\alpha = mg$$

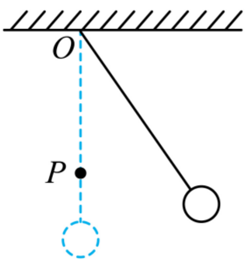
解得

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

D 正确。

故选 CD。

【模型演练 8】.（2023·高三课时练习）如图所示，轻绳的上端系于天花板上的 O 点，下端系有一只小球。将小球拉离平衡位置一个角度后无初速释放。当绳摆到竖直位置时，与钉在 O 点正下方 P 的钉子相碰。在绳与钉子相碰瞬间，以下判断正确的是（　　）



A．小球的线速度突然增大　　B．小球的角速度突然增大

C．小球的向心加速度突然减小　　D．小球所受拉力突然增大

【答案】BD

【详解】A．绳碰钉瞬间，球受的重力和拉力都在竖直方向，与速度方向垂直，因此不改变速度大小，即线速度不变，故 A 错误；

B．该瞬间球做圆周运动的半径突然变小，根据 $v = \omega r$ 可知，v 不变，r 变小，则 ω 突然增大，故 B 正确；

C．根据 $a = \frac{v^2}{r}$ 可知，v 不变，r 变小，则 a 突然增大，故 C 错误；

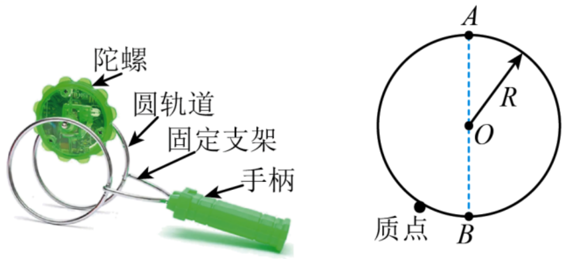
D．此时根据牛顿第二定律有

$$F - mg = \frac{mv^2}{r}$$

可知 r 变小，则 F 突然增大，故 D 正确。

故选 BD。

【模型演练 9】.（2023·湖北·模拟预测）有一种被称为“魔力陀螺”的玩具如图甲所示，陀螺可在圆轨道外侧旋转而不脱落，好像轨道对它施加了魔法一样，它可等效为一质点在圆轨道外侧运动模型，如图乙所示。在竖直平面内固定的强磁性圆轨道半径为R，A、B两点分别为轨道的最高点与最低点。质点沿轨道外侧做完整的圆周运动，受圆轨道的强磁性引力始终指向圆心O且大小恒为F，当质点以速率$v=\sqrt{gR}$通过A点时，对轨道的压力为其重力的 7 倍，不计摩擦和空气阻力，质点质量为m，重力加速度为g，则（）



甲　　乙

A．强磁性引力的大小$F=7mg$

B．质点在A点对轨道的压力小于在B点对轨道的压力

C．只要质点能做完整的圆周运动，则质点对A、B两点的压力差恒为$6mg$

D．若强磁性引力大小为F,为确保质点做完整的圆周运动，则质点通过B点的最大速率为$\sqrt{6gR}$

【答案】ACD

【详解】A．在A点，对质点，由牛顿第二定律有

$$F+mg-F_A=m\frac{v^2}{R}$$

根据牛顿第三定律有

$$F_A=F_A^{'}=7mg$$

解得

$$F=7mg$$

故 A 正确；

BCD．质点能完成圆周运动，在A点根据牛顿第二定律有

$$F+mg-N_A=m\frac{v_A^{\ 2}}{R}$$

根据牛顿第三定律有

$$N_A=N_A^{'}$$

在B点，根据牛顿第二定律有

$$F-mg-N_B=m\frac{v_B^{\ 2}}{R}$$

根据牛顿第三定律有

$$N_B=N_B^{'}$$

从 A 点到 B 点过程，根据动能定理

$$mg\times 2R=\frac{1}{2}mv_B^{\ 2}-\frac{1}{2}mv_A^{\ 2}$$

解得

$$N_A'-N_B'=6mg$$

若磁性引力大小恒为 F，在 B 点，根据牛顿第二定律

$$F-mg-F_B=m\frac{v_B^2}{R}$$

当 F_B=0，质点速度最大

$$v_B=v_{Bm}$$

$$F-mg=m\frac{v_{Bm}^2}{R}$$

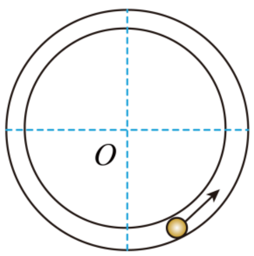
解得

$$v_{Bm}=\sqrt{6gR}$$

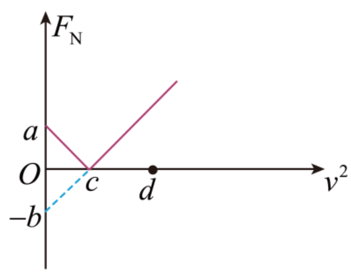
选项 B 错误，CD 正确。

故选 ACD。

【模型演练 10】.（2023·湖南·模拟预测）一半径为 r 的小球紧贴竖直放置的圆形管道内壁做圆周运动，如图甲所示。小球运动到最高点时管壁对小球的作用力大小为 F_N，小球的速度大小为 v，其 F_N-v^2 图像如图乙所示。已知重力加速度为 g，规定竖直向下为正方向，不计一切阻力。则下列说法正确的是（　　）



甲



乙

A．小球的质量为$\frac{a}{g}$

B．圆形管道内侧壁半径为$\frac{c}{g}-r$