

第一章习题

1.1 一个 L 阶滑动平均滤波器是这样—个线性移不变系统, 即对于输入 $x(n)$ 产生—个输出 $y(n) = \frac{1}{L+1} \sum_{k=0}^L x(n-k)$, 试求这个系统的频率响应。

1.2 一个 90° 移相器是—个具有频率响应

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} -j, & 0 < \omega < \pi \\ j, & -\pi < \omega < 0 \end{cases}$$

的系统, 注意其幅度对于所有 ω 是—个常数, 相位对于 $0 < \omega < \pi$ 是 $-\pi/2$, 对于 $-\pi < \omega < 0$ 是 $\pi/2$, 试求这个系统的单位采样响应。

1.3 设 $h(n)$ 是—个截止频率为 ω_c 的低通滤波器的单位采样响应。试问:

(a) 什么类型的滤波器具有单位采样响应 $g(n) = (-1)^n h(n)$?

(b) 如果用差分方程 $y(n) = \sum_{k=1}^p a(k)y(n-k) + \sum_{k=0}^q b(k)x(n-k)$ 实现—个具有单位采样响应 $h(n)$ 的滤波器, 为了实现—个具有单位采样响应 $g(n) = (-1)^n h(n)$ 的系统, 这个差分方程应作如何修改?

1.4 如果 $h(n)$ 是—个截止频率 $\omega_c = \pi/4$ 的理想低通滤波器的单位采样响应, 求具有单位采样响应 $g(n) = h(2n)$ 的滤波器的频率响应。

1.5 证明如果 $X(e^{j\omega})$ 是实偶的, 则 $x(n)$ 也是实偶的。

1.6 试证明 DTFT 变换中的卷积定理。

1.7 设 $x(n)$ 是—个 DTFT 为 $X(e^{j\omega})$ 的序列。对下列每个由 $x(n)$ 形成的序列, 用 $X(e^{j\omega})$ 表示它们的 DTFT:

(a) $x^*(-n)$; (b) $x(n) * x^*(-n)$; (c) $x(2n+1)$

1.8 假设给定—个计算复值序列 $x(n)$ 的 DTFT 程序, 如何利用这个程序计算 $X(k)$ 的反变换?

1.9 序列 $x(n)$ 的 N 点 DFT 也可以写成矩阵形式: $\mathbf{X} = \mathbf{W} \cdot \mathbf{x}$, 其中 $\mathbf{x} = [x(0), x(1), \dots, x(N-1)]^T$ 是信号序列值组成的矢量, \mathbf{X} 是 DFT 系数 $X(k)$ 组成的矢量。

(a) 试写出矩阵 \mathbf{W} ; (b) 矩阵 \mathbf{W} 具有什么特性? (c) \mathbf{W} 的逆矩阵是什么?

1.10 如何用—个 N 点 DFT 变换计算两个实序列 $x_1(n)$ 和 $x_2(n)$ 的 N 点 DFT 变换?

1.11 若 $x_1(n)$ 和 $x_2(n)$ 都是长为 N 点的序列, $X_1(k)$ 和 $X_2(k)$ 分别是两个序列的 N 点 DFT。

试证明:
$$\sum_{n=0}^{N-1} x_1(n)x_2^*(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_1(k)X_2^*(k)$$

1.12 假设 1 次复乘需要 $1\mu\text{s}$, 而且假定计算—个 DFT 总共需要的时间由计算所有乘法所需的时间决定。试: (a) 直接计算—个 1024 点的 DFT 需要多少时间? (b) 计算—个 FFT 需要多少时间? (c) 对 4096 点 DFT 重复问题(a)和(b)。

1.13. 以 10kHz 采样率对语音信号进行采样, 并对其实时处理, 所需的部分运算包括采集 1024 点语音数据块、计算—个 1024 点的 DFT 变换和—个 1024 点的 DFT 反变换。若每—次实数

乘法所需时间为 $1\mu\text{s}$ ，那么计算 DFT 变换和 DFT 反变换后还剩下多少时间用来处理数据？

1.14 在按时间抽取和按频率抽取 FFT 算法中， $\frac{1}{2}N \log_2 N$ 次乘法中的一些是 ± 1 相乘，所以在编写程序实现这些算法时如果能去掉这些乘法，可能效率会更高。

- (a) 在一个 8 点按时间抽取的 FFT 中，如果去掉与 ± 1 的乘法，还有多少次乘法？
 (b) 对一个 16 点按时间抽取 FFT，重复问题(a)。
 (c) 对 $N = 2^M$ 推广(a)和(b)中的结果。

1.15 用按时间抽取和按频率抽取 FFT 算法计算复序列的 DFT，说明如何用一个 N 点 FFT 程序计算两个实序列的 N 点 DFT。

1.16 确定如何用一个 N 点 FFT 算法计算一个实序列的 2N 点 DFT。

1.17 设 $x(n)$ 是长度为 N 的序列，且 $x(n) = -x(n + \frac{N}{2})$, $n = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1$ ，其中 N 是偶数。

- (a) 证明 $x(n)$ 的 N 点 DFT 仅有奇次谐波，即：k 为偶数时， $X(k) = 0$ 。
 (b) 证明如何由一个经过适当调整的序列的 N/2 点 DFT 求得 $x(n)$ 的 N 点 DFT。

1.18 一个特定的计算机辅助滤波器设计的结果是如下的二阶因果滤波器：

$$H(z) = \frac{1 + 2z^{-1} + z^{-2}}{1 - 2z^{-1} + 1.33z^{-2}}$$

试证明这个滤波器是不稳定的，并求一个和 $H(z)$ 有相同幅频响应的因果稳定滤波器。

1.19 一个离散时间线性移不变系统的系统函数是 $H(z)$ ，假设 $H(z)$ 是 z 的有理函数，且 $H(z)$ 是因果稳定的。试判断下面哪个系统是因果的，哪个是稳定的：

- (a) $G(z) = H(z)H^*(z^*)$ 。 (b) $G(z) = H'(z)$ ，这里 $H'(z) = \frac{d}{dz}[H(z)]$ 。
 (c) $G(z) = H(z^{-1})$ 。 (d) $G(z) = H(-z)$

1.20 试推导 I 型和 II 型线性相位 FIR 滤波器的频率响应，并说明其特点。

1.21 证明如果 $h(n) = \pm h^*(N - n)$ ，则这个具有复数单位采样响应的系统是一个广义线性相位系统。

1.22 设一个 FIR 系统的输入和输出关系为： $y(n) = \sum_{k=0}^q b(k)x(n-k)$ ，试求满足下列全部条件的最低阶滤波器的系数 $b(k)$ 。

- (1) 滤波器具有(广义)线性相位；
 (2) 它完全滤除频率为 $\omega_0 = \pi/3$ 的正弦波；
 (3) $\omega = 0$ 和 $\omega = \pi$ 时其幅频响应等于 1。

1.23 证明：如果 $h(n)$ 是实数的，且 $2M$ 是一个整数，则约束条件 $h(n) = h(2M - n)$ 是 $h(n)$ 的单位采样响应具有广义线性相位的充分但不是必要的条件。

1.24 一个 FIR 线性相位滤波器的单位采样响应是实数的，且 $n < 0$ 和 $n > 7$ 时 $h(n) = 0$ 。如果 $h(0) = 1$ 且系统函数在 $z = 0.4e^{j\pi/3}$ 和 $z = 3$ 各有一个零点，则 $H(z)$ 的表达式是什么？

1.25 一个线性移不变系统的传输函数为： $H(z) = \frac{z^{-1} - \alpha^*}{1 - \alpha z^{-1}}$ ，其中 $|\alpha| < 1$ ，试：

- (a) 求实现这个系统的差分方程。

(b) 证明这个系统是一个全通系统。

(c) $H(z)$ 和另一个系统 $G(z)$ 级联后, 整个系统函数为 1, 如果 $G(z)$ 是一个稳定系统, 试求其单位采样响应 $g(n)$ 。

1.26 假设 $H(z)$ 和 $G(z)$ 是有理函数, 且是最小相位的, 试问下面哪个滤波器是最小相位的?

(a) $H(z)G(z)$ 。 (b) $H(z)+G(z)$ 。

1.27 一个因果线性移不变系统的传输函数为: $H(z) = \frac{(1-2z^{-2})(1+0.4z^{-1})}{1-0.85z^{-1}}$, 试求 $H(z)$ 的形如 $H(z) = H_m(z)H_{ap}(z)$ 的因式分解, 其中 $H_m(z)$ 是最小相位的, $H_{ap}(z)$ 是全通滤波器。

1.28 设 $x(0) > 0$, 且 $|X(e^{j\omega})|^2 = (1+a^2) - 2a \cos \omega$, 试求这个实值因果序列。

1.29 试用初值定理证明: 如果 $h_m(n)$ 是最小相位序列, 且 $h(n)$ 是具有相同傅立叶变换幅值的因果序列, 则有: $|h(0)| < |h_m(0)|$ 。

第二章习题

2.1 设 x 是均值为 m_x , 方差为 σ_x^2 的随机变量, $x_i, i=1,2,\dots,N$ 是 x 的 N 个独立观测值。

(a) 若定义样本均值 $\hat{m}_x = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$, 则样本方差估计 $\hat{\sigma}_x^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \hat{m}_x)^2$ 是否是无偏的? 即 $E\{\hat{\sigma}_x^2\} = \sigma_x^2$?

(b) 若 x 是高斯随机变量, 试求样本方差估计的方差 $E\{(\hat{\sigma}_x^2 - E\{\hat{\sigma}_x^2\})^2\}$ 。

2.2 设 $x(n)$ 是零均值平稳随机过程, 自相关为 $r_x(k)$ 。构造随机过程 $y(n)$ 为: $y(n) = x(n) + f(n)$, 其中 $f(n)$ 是已知的确定性序列。试求 $y(n)$ 的均值 $m_y(n)$ 和自相关 $r_y(k, l)$ 。

2.3 设离散时间随机过程 $x(n)$ 是如下产生: $x(n) = \sum_{k=1}^p a(k)x(n-k) + w(n)$, 其中 $w(n)$ 是方差为 σ_w^2 的白噪声过程。另一个过程 $z(n)$ 是 $x(n)$ 与噪声之和: $z(n) = x(n) + v(n)$, $v(n)$ 是白差为 σ_v^2 的白噪声, 且与 $w(n)$ 不相关。试求: (a) $x(n)$ 的功率谱; (b) $z(n)$ 的功率谱。

2.4 设给定一个线性移不变系统, 其系统函数为 $H(z) = (1 - \frac{1}{2}z^{-1}) / (1 - \frac{1}{3}z^{-1})$, 它受零均值的指数相关噪声 $x(n)$ 的激励产生随机过程 $y(n) = x(n) * h(n)$ 。已知 $x(n)$ 的自相关序列为 $r_x(k) = (\frac{1}{2})^{|k|}$, 试求:

(a) $y(n)$ 的功率谱 $P_y(z)$;

(b) $y(n)$ 的自相关序列 $r_y(k)$;

(c) $x(n)$ 和 $y(n)$ 之间的互相关 $r_{xy}(k)$;

(d) 互功率谱 $P_{xy}(z)$, 它是互相关 $r_{xy}(k)$ 的 z 变换。

2.5 求如下自相关序列所对应的宽平稳随机过程的功率谱:

(a) $r_x(k) = 2\delta(k) + j\delta(k-1) - j\delta(k+1)$

(b) $r_x(k) = \delta(k) + 2(0.5)^{|k|}$

(c) $r_x(k) = 2\delta(k) + \cos(\pi k / 4)$

(d) $r_x(k) = \begin{cases} 10 - |k|; & |k| < 10 \\ 0 & ; \text{其它} \end{cases}$

2.6 求下列功率谱密度函数所对应的自相关序列:

(a) $P_x(e^{j\omega}) = 3 + 2\cos\omega$

(b) $P_x(e^{j\omega}) = \frac{1}{5 + 3\cos\omega}$ (c)

$$P_x(z) = \frac{-2z^2 + 5z - 2}{3z^2 + 10z + 3}$$

2.7 设 $x(n)$ 是零均值宽平稳过程, $N \times N$ 阶的自相关阵为 \mathbf{R}_x , 试确定如下的结论是对还是错:

(a) 若 \mathbf{R}_x 的特征值是相等的, 即 $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_N$, 则对 $k=1, 2, \dots, N$ 有 $r_x(k) = 0$;

(b) 若 $\lambda_1 > 0$, 而对 $k=2, 3, \dots, N$ 的 $\lambda_k = 0$, 则 $r_x(k) = Ae^{jk\omega_0}$

2.8 考虑随机过程 $x(n) = A\cos(n\omega + \phi) + w(n)$, 其中 $w(n)$ 是均值为零、方差为 σ_w^2 的高斯白噪声, 试针对如下情况, 求 $x(n)$ 的自相关序列和功率谱:

- (a) A 是均值为零、方差为 σ_A^2 的高斯随机变量, ω 和 ϕ 是常量。
 (b) ϕ 是在区间 $[-\pi, \pi]$ 上均匀分布的随机变量, A 和 ω 是常量。
 (c) ω 是在区间 $[\omega_0 - \Delta, \omega_0 + \Delta]$ 上均匀分布的随机变量, A 和 ϕ 是常量。

2.9 确定如下的自相关阵是否合法? 若不合法, 为什么?

$$(a) R_1 = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -1 & 4 & 1 \\ -1 & -1 & 4 \end{bmatrix} \quad (b) R_2 = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \quad (c) R_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1+j \\ 1-j & 1 \end{bmatrix}$$

$$(d) R_4 = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad (e) R_5 = \begin{bmatrix} 2 & j & 1 \\ -j & 4j & -j \\ 1 & j & 2 \end{bmatrix}$$

2.10 设一个线性移不变滤波器的单位采样响应是 $h(n) = \delta(n) + \frac{1}{2}\delta(n-1) + \frac{1}{4}\delta(n-2)$, 若

在其输入端加上自相关为 $r_x(k) = (\frac{1}{2})^{|k|}$ 的零均值宽平稳过程, 试确定:

- (a) 输出过程的方差。 (b) 输出过程的自相关序列 $r_y(k)$

2.11 考虑一个 AR(1)过程, 它由差分方程 $y(n) = ay(n-1) + w(n)$ 产生, 其中 $|a| < 1$, $w(n)$ 是方差为 σ_w^2 的零均值白噪声过程, 试求:

- (a) 由 $w(n)$ 产生 $y(n)$ 的滤波器的单位采样响应; (b) $y(n)$ 的自相关; (c) $y(n)$ 的功率谱。

2.12. 考虑一个 MA(q)过程, 它由如下差分方程产生: $y(n) = \sum_{k=0}^q b(k)w(n-k)$, 其中 $w(n)$

是方差为 σ_w^2 的零均值白噪声。试求:

- (a) 由 $w(n)$ 产生 $y(n)$ 的滤波器的单位采样响应; (b) $y(n)$ 的自相关序列; (c) $y(n)$ 的功率谱。

2.13. 给定一个零均值的随机过程 $x(n)$, 其自相关为 $r_x(k) = 10(\frac{1}{2})^{|k|} + 3(\frac{1}{2})^{|k-1|} + 3(\frac{1}{2})^{|k+1|}$ 。

- (a) 试求一个滤波器, 它受单位方差白噪声驱动时产生的输出过程具有这种自相关序列。
 (b) 试求一个稳定的因果滤波器, 它受 $x(n)$ 激励时, 将产生零均值、单位方差的白噪声

2.14. 试确定如下的随机过程是否是: (i) 宽平稳的; (ii) 均值各态遍历的。

- (a) $x(n) = A$, 其中 A 是概率密度函数为 $f_A(\alpha)$ 的随机变量。
 (b) $x(n) = A\cos(n\omega_0)$, 其中 A 是均值为零、方差为 σ_A^2 的高斯随机变量。
 (c) $x(n) = A\cos(n\omega_0 + \phi)$, ϕ 是在区间 $[-\pi, \pi]$ 区间上均匀分布的随机变量。
 (d) $x(n) = A\cos(n\omega_0) + B\sin(n\omega_0)$, 其中 A 和 B 都是方差为 σ^2 的零均值随机变量, 且 A 和 B 不相关。
 (e) $x(n)$ 是一个 Bernoulli 过程, 且 $\Pr\{x(n) = 1\} = p, \Pr\{x(n) = -1\} = 1 - p$ 。

(f) $y(n) = x(n) - x(n-1)$, 其中 $x(n)$ 是(e)中定义的 Bernoulli 过程。

2.15 确定下列各 $r_x(k)$ 是否是一个宽平稳随机过程的合法自相关序列。若不是, 请说明原因; 若是, 试给出产生该宽平稳随机过程的一种方法。

(a) $r_x(k) = \delta(k-1) + \delta(k+1)$ (b) $r_x(k) = 3\delta(k) + 2\delta(k-1) + 2\delta(k+1)$

(c) $r_x(k) = \exp(jk\pi/4)$

(d) $r_x(k) = \begin{cases} 1; & |k| < N \\ 0; & \text{其它} \end{cases}$ (e) $r_x(k) = \begin{cases} \frac{N-|k|}{N}; & |k| < N \\ 0; & \text{其它} \end{cases}$ (f) $r_x(k) = 2^{-k^2}$

2.16. 证明两个宽平稳随机过程 $x(n)$ 和 $y(n)$ 之间的互相关 $r_{xy}(k)$ 满足如下的不等式:

(a) $|r_{xy}(k)| \leq [r_x(0)r_y(0)]^{\frac{1}{2}}$; (b) $|r_{xy}(k)| \leq \frac{1}{2}[r_x(0) + r_y(0)]$

2.17. 给定一个宽平稳随机过程 $x(n)$, 我们要设计一个“线性预测器”, 用 $x(n)$ 和 $x(n-1)$ 的线性组合来预测 $x(n+1)$ 的值。因此对 $x(n+1)$ 的预测是如下形式:

$$\hat{x}(n+1) = ax(n) + bx(n-1)$$

其中 a 和 b 是常数。设过程 $x(n)$ 是零均值的, 即 $E\{x(n)\} = 0$, 我们要最小化的是均方误差:

$$\xi = E\{[x(n+1) - \hat{x}(n+1)]^2\}$$

- (a) 若已知 $x(n)$ 的自相关 $r_x(k)$, 试通过最小化均方误差, 求 a 和 b 的最优值, 以设计针对 $x(n)$ 的最优预测器。
- (b) 该预测器的最小均方误差是多少? 试用 $r_x(k)$ 的值来表达该误差。
- (c) 若 $x(n+1)$ 和 $x(n)$ 是不相关的, 你的预测器是取了什么形式, 请简要解释。
- (d) 若 $x(n+1)$ 和 $x(n)$ 与 $x(n-1)$ 都不相关, 你的预测器又会取什么形式?

2.18 判断对或错。若 $x(n)$ 是宽平稳过程, $y(n)$ 是 $x(n)$ 激励一个线性移不变滤波 $h(n)$ 而产生, 则有:

$$\sigma_y^2 = \sigma_x^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)|^2$$

其中 σ_x^2 和 σ_y^2 分别是 $x(n)$ 和 $y(n)$ 的方差。

2.19 试证明宽平稳随机过程是均值各态遍历的充分条件是其自协方差是绝对可和的, 即:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_x(k)| < \infty$$

2.20 确定下列叙述是“对”还是“错”:

(a) 所有的宽平稳 MA 过程是均值各态遍历的。(b) 所有的宽平稳 AR 过程是均值各态遍历的

2.21 设 $x(n)$ 是实值的宽平稳高斯随机过程, 自协方差函数为 $c_x(k)$, 试证明当且仅当

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} c_x^2(k) = 0, \quad x(n) \text{ 是自相关各态遍历的。 (提示: 高斯随机变量具有矩因子化}$$

定理, 即 $E\{x_1x_2x_3x_4\} = E\{x_1x_2\}E\{x_3x_4\} + E\{x_1x_3\}E\{x_2x_4\} + E\{x_1x_4\}E\{x_2x_3\}$)

2.22 已经知道, 均值各态遍历性取决于过程的自协方差 $c_x(k)$ 的渐近行为, 但 $c_x(k)$ 的渐近行为又与功率谱 $P_x(e^{j\omega})$ 在 $\omega=0$ 处的行为有关。试证明, 当且仅当 $P_x(e^{j\omega})$ 在原点 $\omega=0$ 处是连续的, $x(n)$ 就是均值各态遍历的。 (提示: 将式(2.65)表示为 $c_x(k)$

与序列 $P_N(k) = \begin{cases} 1/N, & 0 \leq k \leq N \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$ 的卷积在 $N \rightarrow \infty$ 时的极限, 并求 $k=N$ 处的卷积。

2.23 已经知道, 实值的零均值随机变量的自相关满足 $|\rho_{xy}| \leq 1$, 试证明当 x 和 y 是复值的随机变量, 且均值非零时, 也有 $|\rho_{xy}| \leq 1$ 。并确定若 $|\rho_{xy}| = 1$, x 和 y 之间应保持什么关系。

2.24 设一个宽平稳随机过程 $x(n)$ 的功率谱是 $P_x(e^{j\omega})$, 且 $M \times N$ 的自相关阵是 \mathbf{R}_x , λ_k 是 \mathbf{R}_x 的特征值。于是有 Szego 定理: 若 $g(\cdot)$ 是一个连续函数, 则有:

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \frac{g(\lambda_1) + g(\lambda_2) + \cdots + g(\lambda_M)}{M} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g[P_x(e^{j\omega})] d\omega$$

试利用该定理证明: $\lim_{M \rightarrow \infty} [\det \mathbf{R}_x]^{1/M} = \exp \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln [P_x(e^{j\omega})] d\omega \right\}$ 。

2.25 在有些应用中, 数据采集过程可能出现缺损, 使得有数据丢失, 或出现应丢弃的野值。设给定了宽平稳过程 $x(n)$ 的 N 个样本, 但其中一个样本 $x(n_0)$ 丢失了。若用 \mathbf{x} 向量表示给定的样本值, 即 $\mathbf{x} = [x(0), x(1), \cdots, x(n_0-1), x(n_0+1), \cdots, x(N)]^T$

(a) 对向量 \mathbf{x} 的自相关矩阵 $\mathbf{R}_x = E\{\mathbf{x}\mathbf{x}^H\}$, 如下的话是否正确: 1) \mathbf{R}_x 是 Toeplitz 的; 2) \mathbf{R}_x 是共轭对称阵; 3) \mathbf{R}_x 是半正定的。

(b) 给定 \mathbf{x} 的自相关阵, 是否可求出 $x(n_0)$ 没有丢失时向量 $\mathbf{x} = [x(0), x(1), \cdots, x(N)]^T$ 的自相关阵? 若可以, 如何求? 若不可以, 请解释原因。

2.26 宽平稳过程 $x(n)$ 的功率谱是 $P_x(e^{j\omega}) = \frac{25 - 24 \cos \omega}{26 - 10 \cos \omega}$, 试求 $x(n)$ 的白化滤波器, 即输入是 $x(n)$ 时该滤波器的输出是单位方差白噪声。

2.27 什么是正交变换, 正交变换的矩阵有什么特点?

2.28 为什么说 KL 变换是最优变换? 它有什么优缺点?

2.29 试从随机矢量表示的最小均方误差截断的角度来解释 KL 变换。

2.30 为什么说 DCT 是准最优变换? 它与 KL 变换之间有什么关系?

2.31 与 KL 变换相比, DCT 在实现方面有什么优势?

2.32 试判断下列句子是否正确:

1) 从一个随机信号确定了 KL 变换的基矢量后, 就可以作用于其它任何宽平稳随机信号实现去相关。

2) 在信号的编码应用中, DCT 之所以比 DFT 用得更多是因为 DCT 可以达到准最优的去相关, 而 DFT 不能对数据去相关。

3) 用 FFT 算法可以快速实现 DCT。

2.33 令 $x_i (i=1, \dots, N)$ 是观测样本, 且 $\{x_i\}$ 是弱平稳过程, 均值为 $\mu = E\{x_i\}$ 。如果 $\{x_i\} (i=1, \dots, N)$ 是独立的, 试证明:

$$(1) \text{ 样本均值: } \bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i ; \quad (2) \text{ 样本方差: } s^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2$$

分别是无偏的, 且: $E(\bar{x} - \mu)^2 = \sigma^2 / N$

这里 σ^2 是 $\{x_i\}$ 的方差。

2.34 令观测样本由: $x_i = s + w_i \quad (i=1, \dots, N)$

给定, 其中 $\{w_i\}$ 是一个零均值的高斯白噪声, 其方差为 1。假定 s 的先验概率密度为

$$f_s(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\alpha^2 / 2)$$

试对二次和均匀代价函数分别求 s 的 Bayes 估计 $\hat{\theta}_{\text{Bayes}}$ 。

2.35 令观测样本由: $x_i = s + w_i \quad (i=1, \dots, N)$

给出, 其中 $\{w_i\}$ 是一高斯白噪声, 其均值为零, 方差为 1。证明: s 的极大似然估计是无偏的和一致的。

第三章习题

3.1 设对信号 $x(n]$ 进行预测建模时是用一种特殊的预测模型: $\hat{x}(n) = -\sum_{k=1}^p a_p(k)x(n-N-k)$,

为确定系数 $a_p(k)$, 试推导出使均方预测误差 $\varepsilon_p = E\{|e(n)|^2\}$ 最小化的正则方程, 其中

$e(n) = x(n) + \sum_{l=1}^p a_p(l)x(n-l-N)$, 并给出最小均方预测误差的表达式。

3.2 若信号 $x(n]$ 进行预测建模的模型是: $\hat{x}(n) = -\sum_{k=1}^p a_p(k)x(n-2k)$, 试推导出使均方预测误差

$\varepsilon_p = E\{|e(n)|^2\}$ 最小化的正则方程, 其中 $e(n) = x(n) + \sum_{l=1}^p a_p(l)x(n-2l)$, 并给出最小均方预测误差的表达式。

3.3 设要设计一个数字信号预测器, 用 p 个相继的样本观测值估计滞后 n_0 个样本的未来值,

即: $\hat{x}(n+n_0) = \sum_{k=1}^p a_p(k)x(n-k)$, 设计预测器系数 $a_p(k)$ 时是最小化误差

$$\varepsilon_p = \sum_{n=0}^{\infty} [x(n+n_0) - \hat{x}(n+n_0)]^2.$$

(a) 试导出求解最优 $a_p(k)$ 值的正则方程;

(b) 若 $n_0=0$, 则该问题的求解与标准预测建模方法有何不同?

3.4 设要获得信号 $x(n]$ 的二阶预测误差滤波器 $A_2(z) = 1 + a(1)z^{-1} + a(2)z^{-2}$, 试用自相关法求出用 $r_x(0)$ 、 $r_x(1)$ 和 $r_x(2)$ 所表示的 $a(1)$ 和 $a(2)$ 的计算表达式。

3.5 考虑 3.2 节最后介绍的信号确定性全极点建模问题, 若拟建模的信号 $x(n]$ 的 z 变换 $X(z)$ 具有零点, 一般可以用具有无穷个极点的全极点模型来有效地对零点建模。不妨来看一个零点如何用自相关法来全极点建模。设 $x(n) = \delta(n) - \alpha\delta(n-1)$, α 是实数, 且 $|\alpha| < 1$

(a) 试确定 $x(n]$ 的 p 阶全极点模型 $A_p(z)$, p 是任意正整数, 并给出平方误差 ε_p 的值。

(b) 对(a)中确定的全极点模型, $p \rightarrow \infty$ 时 $A_p(z)$ 是什么? $p \rightarrow \infty$ 时 ε_p 又是多少? 请说明你的结果。

(c) 对 $|\alpha| > 1$, 重复(a)和(b)的问题。

3.6 如果有人说, 总可以由一个因果全极点滤波器的有限个单位采样响应值确定它是否稳定, 即 $H(z)$ 是 p 阶全极点滤波器, 给定 $n=0,1,\dots,N$ 的 $h(n)$ 值, 就可以确定 $H(z)$ 的稳定性。你认为这是否正确? 若正确, 试解释如何确定, 并列岀 p 和 N 应满足的条件; 若不正确, 试解释为什么不能确定其稳定性。

3.7 设只知道实值信号 $x(n]$ 当 $n=0,1,\dots,N$ 的值, 反向协方差法求预测模型系数是最小化如下误差:

$$\varepsilon_p^- = \sum_{n=p}^N [e_p^-(n)]^2, \quad e_p^-(n) = x(n-p) + \sum_{k=1}^p a_p(k)x(n+k-p)$$

(a) 试证明使 ε_p^- 最小化的系数 $a_p(k)$ 满足正则方程 $\mathbf{R}_x \bar{\mathbf{a}}_p = -\mathbf{r}_x$, 其中 $\bar{\mathbf{a}}_p = [a_p(1), a_p(2), \dots, a_p(p)]^T$, 另外请给出 \mathbf{R}_x 和 \mathbf{r}_x 的各元素的计算公式。

- (b) 反向协方差法的解和协方差法的解是相同的吗? 请解释。
- (c) 假如要最小化的误差是前向和反向预测误差之和: $\varepsilon_p^B = \sum_{n=p}^N \left\{ [e_p^+(n)]^2 + [e_p^-(n)]^2 \right\}$, 其中反向预测误差的定义同上, 前向预测误差是协方差法中的误差, 即 $e_p^+(n) = x(n) + \sum_{k=1}^p a_p(k)x(n-k)$, 这就是修正协方差法。试推导出使 ε_p^B 最小化的修正协方差正则方程。
- (d) 设已知信号 $x_n = \beta^n$, 当 $n=0,1,\dots, N$ 的值, 试求使 ε_p^B 最小化的一阶全极点模型 ($p=1$), 并确定 ε_p^B 的最小值。 β 取何值时该模型是稳定的? $N \rightarrow \infty$ 时, 模型和建模误差是什么结果?

3.8 设信号 $x(n)$ 是全极点因果滤波器 $H(z) = \frac{1}{(1+0.5z^{-1})(1+0.75z^{-1})(1+2z^{-1})}$ 的单位采样响应。已观测到 $x(n)$ 当 $0 \leq n \leq N$ ($N \gg 1$) 的值。

- (a) 若利用协方差法确定了 $x(n)$ 的一个三阶确定性全极点模型, 请说明该模型极点位置的情况。极点的位置与 N 有关吗? 若有关系, 当 $N \rightarrow \infty$ 时, 又会怎样?
- (b) 若是采用自相关法获得该模型, 重复(a)的问题。

3.9 式 (3.121) 可被用于降低构造协方差正则方程所需的计算量。

- (a) 试说明主对角线上的各元素怎样从 $r_x(1,1)$ 开始递归地计算出来。
- (b) 说明下方各次对角线上的元素可以怎样由 $r_x(k,1)$ 开始递归地计算出来。上方各次对角线上的元素又怎样获得呢?
- (c) 确定构造协方差正则方程需要多少次乘法和加法? (注意右边矢量的构造也有计算量)

3.10 给定自相关序列 $r_x(0) = 1, r_x(1) = 0.8, r_x(2) = 0.5, r_x(3) = 0.1$, 试用 Levinson-Durbin 递归求相应的反射系数 Γ_j 、模型参数 $a_j(k)$ 、建模误差 $\varepsilon_j, j = 1, 2, 3$ 。

3.11 设 $A_{p-1}(z)$ 是 $p-1$ 阶多项式, 形式为 $A_{p-1}(z) = 1 + \sum_{k=1}^{p-1} a_{p-1}(k)z^{-k}$, 又设 $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_{p-1}$ 是 Levinson-Durbin 递归所产生的反射系数。通过阶梯归又得 p 阶多项式 $A_p(z)$:

$$A_p(z) = A_{p-1}(z) + \Gamma_p z^{-p} A_{p-1}^*(1/z^*)$$

- (a) 若 $j=1,2,\dots, p-1$ 时都有 $|\Gamma_j| < 1$, 而 $|\Gamma_p| = 1$, 则 $A_p(z)$ 的零点是什么情况?
- (b) 设 $A_p(z)$ 可以因式分解为 $A_p(z) = \prod_{k=1}^p (1 - \alpha_k z^{-1})$, 即 $A_p(z)$ 的零点为 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ 。若 $\tilde{A}_p(z)$ 是一个反射系数为 $\tilde{\Gamma}_j (j=1,2,\dots,p)$ 的多项式, 且 $j=1,2,\dots, p-1$ 时 $\tilde{\Gamma}_j = \Gamma_j$; 而 $\tilde{\Gamma}_p = 1/\Gamma_p^*$ 。试问 $\tilde{A}_p(z)$ 和 $A_p(z)$ 的零点之间是什么关系?

3.12 设 $a_p(k)$ 是反射系数 $\Gamma_k, k = 1, \dots, p$ 所对应的滤波器系数, 试证明若反射系数被调制为 $\hat{\Gamma}_k = (-1)^k \Gamma_k$, 则对应的滤波器系数 $\hat{a}_p(k)$ 就变为 $\hat{a}_p(k) = (-1)^k a_p(k)$ 。

3.13 对系统函数为 $H(z) = \frac{1+0.8z^{-1}-0.9z^{-2}+0.3z^{-3}}{1-0.9z^{-1}+0.8z^{-2}-0.5z^{-3}}$ 的线性移不变滤波器, 若不对其多项式进行因式分解, 试确定它是否是最小相位的, 即它的所有零极点是否在单位园内。

3.14 设有信号 $x(n) = \delta(n) + b\delta(n-1)$ 已观测到 $n=0,1,\dots,N$ 时的 $x(n)$ 值。

- (a) 试用自相关法求 $x(n)$ 的二阶确定性全极点模型。
 (b) 拟求 $x(n)$ 的 p 阶全极点模型, Γ_j 是该滤波器的格型实现结构的第 j 个反射系数, 试用 Γ_{j-1} 和 Γ_{j-2} 表达 Γ_j 的反射系数递归公式。

3.15 设有一个数据序列, 其 z 变换的形式为 $X(z) = \frac{G}{1 + \sum_{k=1}^p a_p(k)z^{-k}}$, 而 p 未知。现用 Levinson

递归计算模型的系数, 试问怎样才能由计算出的反射系数序列 Γ_j ($j=1, 2, \dots$), 确定 p 的值?

3.16 设 $r_x(k)$ 是一个复值的自相关序列, 已知 $\mathbf{r}_x = [2, 0.5(1+j), 0.5j]^T$, 试用 Levinson-Durbin 递归求解二阶预测建模的自相关正则方程。

3.17 给定 $r_x(0)=1$, 前三个反射系数是 $\Gamma_1=0.5, \Gamma_2=0.5, \Gamma_3=0.25$ 。(a) 求相应的自相关序列 $r_x(1), r_x(2), r_x(3)$ 。(b) 当反射系数 Γ_3 是自由变量时, 求自相关值 $r_x(1), r_x(2)$ 和 $r_x(3)$ (即将这些自相关值表示为 Γ_3 的函数形式)。(c) 当 Γ_2 和 Γ_3 都是自由变量时, 重复 (b) 的问题。

3.18 设有三阶线性移不变滤波器 $H(z) = A \frac{1+b(1)z^{-1}+b(2)z^{-2}+b(3)z^{-3}}{1+a(1)z^{-1}+a(2)z^{-2}+a(3)z^{-3}}$, 其单位采样响应

$h(n)$ 的前 7 个值为 $\bar{h} = \left[1, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 0, 0, \frac{7}{8}\right]^T$ 。试确定该滤波器是否稳定。若这需要更多的信息, 试说明还需要已知什么? 若需要, 请作出必要的假设。

3.19 功率谱估计中的可扩展性问题是指一个有限长的自相关序列 $r_x(1), r_x(2), \dots, r_x(P)$ 是否可以扩展 (外推) 为一个合法的自相关序列, 使得 $P_x(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} r_x(k)e^{-jk\omega}$ 是一个合法的功率谱。换句话说, 是否可以求出 $|k| > P$ 的 $r_x(k)$ 使得所表达的 $P_x(e^{j\omega})$ 是 ω 的非负实值函数。

- (a) 试确定用 Levinson 递归测试一个序列的可扩展性的一个具体步骤。
 (b) 用你确定的步骤给出序列 $r_x(0)=1, r_x(1)=a, r_x(2)=b$ 是可扩展序列的充要条件, 写成 a 和 b 的表达式。
 (c) 假设 (b) 中的序列是可扩展的, 试给出两个不同的合法扩展形式。

3.20 下列的自相关序列, 哪一个是可扩展的? 对可扩展的序列, 请给出一种扩展形式。

- (a) $\bar{r}_x = [1.0, 0.6, 0.6]^T$; (b) $\bar{r}_x = [1.0, 0.6, -0.6]^T$ (c) $\bar{r}_x = [1.0, 0.0, 1.0]^T$

3.21 设 \mathbf{R}_3 是由自相关序列 $r_x(0), r_x(1), r_x(2), r_x(3)$ 形成的对称 Toeplitz 矩阵, 又设将 Levinson-Durbin 递归作用于 \mathbf{R}_3 所导出的反射系数是 $\Gamma_1 = \frac{1}{2}, \Gamma_2 = \frac{1}{3}, \Gamma_3 = \frac{1}{4}$, 且 $r_x(0)=1$, 试求 $\det \mathbf{R}_3$ 的值。

3.22 设 $r_x(k) = \sigma_x^2 \delta(k) + 1$, 求反射系数 Γ_k ($k \geq 1$) 的值, 并求所对应的所有 p 阶预测误差滤波器 $A_p(z)$ ($p \geq 1$)。

3.23 设 $x(n)$ 是自相关序列为 $r_x(k) = (0.2)^{|k|}$ 的随机过程。

- (a) 试求一个二阶预测器的反射系数 Γ_1 和 Γ_2 , 并画出对应的格型滤波器结构。
 (b) 假设在 $x(n)$ 中加上与之不相关的白噪声, 即 $y(n)=x(n)+w(n), w(n)$ 的方差为 $\sigma_w^2=0.1$, 则反射系数如何变化?

(c) 你能对白噪声加入一个随机过程后对反射系数的影响作一个一般的叙述吗?

3.24 对应于一个三阶预测误差滤波器的反射系数是 $\Gamma_1 = 0.25, \Gamma_2 = 0.5, \Gamma_3 = 0.25$, 预测均方误差为 $\varepsilon_3 = (15/16)^2$ 。

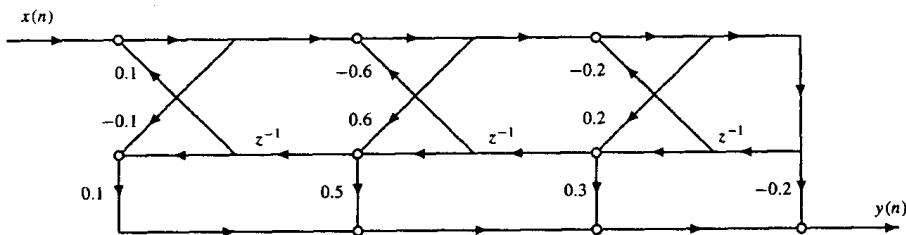
- (a) 试求该三阶模型的直接形式滤波器系数;
- (b) 求导致该模型的自相关值 $r_x(0), r_x(1), r_x(2)$ 和 $r_x(3)$;
- (c) 若求出的是 $x(n)$ 的 4 阶模型, 什么样的 $r_x(4)$ 值会导致最小建模误差 ε_4 ;
- (d) 什么样的 $r_x(k)$ 值会产生最大的 ε_4 误差?

3.25 信号 $x(n)$ 的两阶预测模型对应的反射系数是 $\Gamma_1=0.25$ 和 $\Gamma_2=0.25$, “预测均方误差”是 $\varepsilon_2 = 9$ 。

- (a) 若 $r_x(3)=1$, 试求三阶模型的预测均方误差 ε_3 。
- (b) 若将 $x(n)$ 信号值乘 1/2, 即 $y(n)=0.5x(n)$, 试求 $y(n)$ 的两阶预测模型的反射系数和最小均方误差。

3.26 试设计一个两极点的格型滤波器, 其极点为 $z_1 = re^{j\theta}, z_2 = re^{-j\theta}$ 。然后画出滤波器的详细实现结构。

3.27 试写出下图的格型滤波器的系统函数 $H(z)$ 。



3.28 画出如下系统函数所对应的格型滤波器结构:

(a) $H(z) = \frac{2 - z^{-1}}{1 + 0.7z^{-1} + 0.49z^{-2}}$; (b) $H(z) = \frac{1 + 1.3125z^{-1} + 0.75z^{-2}}{1 + 0.875z^{-1} + 0.75z^{-2}}$;

(c) $H(z) = \frac{0.75 + 0.875z^{-1} + z^{-2}}{1 + 0.875z^{-1} + 0.75z^{-2}}$

3.29 判断对和错: 设 $H(z)$ 是线性移不变滤波器的系统函数, 分母和分子系数分别是 $a_p(k)$ 和 $b_q(k)$, 又设 Γ_k 和 $c_q(k)$ 是 $H(z)$ 的格型滤波器实现时的系数。若 $a_p(k)$ 和 $b_q(k)$ 被修改为:

$$\tilde{a}_p(k) = (-1)^k a_p(k); \quad \tilde{b}_q(k) = (-1)^k b_q(k)$$

则格型滤波器系数也应按相同的方式被修正, 即: $\tilde{\Gamma}_k = (-1)^k \Gamma_k; \tilde{c}_q(k) = (-1)^k c_q(k)$

3.30 如图 3.16b 所示的, 格型滤波器可被分别用于产生前向和后向预测误差 $e_p^+(n)$ 和 $e_p^-(n)$ 。

- (a) 试问 $e_p^+(n)$ 和 $e_p^-(n)$ 的 DTFT 的幅值之间是什么关系?
- (b) 能否设计一个因果稳定的滤波器由输入 $e_p^+(n)$ 产生输出 $e_p^-(n)$? 若能, 应如何设计? 若不能, 试解释为什么?
- (c) 若输入是 $e_p^-(n)$, 输出是 $e_p^+(n)$, 重复(b)的问题。

3.31 图 3.19b 中的全极点格型滤波器可用于产生信号 $x(n)$ 的全极点逼近 $\hat{x}(n)$ 。这个问题中，我们来研究该滤波器的另一种使用。设 $e_0^+(n)$ 被初始化为 $e_0^+(n) = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$ ，试确定该全极点滤波器在 $n=1,2,\dots,N$ 时的输出。

3.32 假设对 Burg 误差作如下修正： $\xi_j^W = \sum_{n=j}^N w_j(n) \left\{ |e_j^+(n)|^2 + |e_j^-(n)|^2 \right\}$ ，其中 $w_j(n)$ 是用于前向和后向预测误差的窗函数。

- (a) 试导出使修正 Burg 误差 ξ_j^W 最小化的反射系数 Γ_j^W 的求解公式。
- (b) 为保证反射系数的幅值小于 1，需要满足什么条件？

第四章习题

4.1 设 $x(n)$ 的 AR(2)模型为: $x(n) + a(1)x(n-1) + a(2)x(n-2) = b(0)w(n)$, $w(n)$ 是单位方差白噪声, 若 $r_x(0) = 1$, $r_x(1) = 0.5$, $r_x(2) = 0.75$, 试求其模型参数 $a(1)$, $a(2)$ 和 $b(0)$ 的值。

4.2 试用谱因子分解法求 MA(2)过程 $x(n)$ 的模型, 已知其自相关序列为 $\mathbf{r}_x = [3, 1.5, 1]^T$ 。

4.3 设随机过程 $x(n)$ 的自相关序列的前 5 个值是 $\mathbf{r}_x = [3, 9/4, 9/8, 9/16, 9/32, \dots]^T$ 。

(a) 试用修正 Yule-Walker 方程法求 $x(n)$ 的 ARMA(1,1)模型。

(b) 给定的自相关序列值与(a)中求出的模型相一致吗?

4.4 设 $H(z)$ 是实值信号 $x(n)$ 的一阶模型, 即 $H(z) = \frac{b(0)}{1 - a(1)z^{-1}}$, 又设要最小化的误差是

$\varepsilon_{LS} = \sum_{n=0}^{N-1} [x(n) - h(n)]^2$ 试取 ε_{LS} 对 $b(0)$ 和 $a(1)$ 的导数为零而导出使 ε_{LS} 最小化的 $b(0)$ 和 $a(1)$ 的解析解。(该问题将说明信号建模的直接法很难, 即使是对一阶的模型。)

4.5 信号 $x(n)$ 是随机相位正弦波加上白噪声, 其自相关是 $r_x(k) = P \cos(k\omega_0) + \sigma_w^2 \delta(k)$, 其中 ω_0 是正弦信号的频率, P 是其功率, σ_w^2 是噪声的方差。假设我们用一个 AR(2)模型对数据进行拟合。

(a) 试求 AR (2) 模型的系数 $\mathbf{a}_2 = [1, a_2(1), a_2(2)]^T$ (表示为 ω_0 , σ_w^2 和 P 的函数形式。)

(b) 求 AR (2) 模型对应的反射系数 Γ_1 和 Γ_2 。

(c) 当 $\sigma_w^2 \rightarrow 0$ 时, AR (2) 参数和反射系数的极限值是多少?

4.6 第 4.2 节已证明了各后向预测误差是正交的, 即 $E\{e_i^-(n)[e_j^-(n)]^*\} = \begin{cases} \varepsilon_j & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$, 试

证明如下的正交性条件:

(a) $E\{e_i^+(n)x^*(n-k)\} = 0; 1 \leq k \leq i$ 。

(b) $E\{e_i^-(n)x^*(n-k)\} = 0; 0 \leq k \leq i-1$ 。

(c) $E\{e_i^+(n)x^*(n)\} = E\{e_i^-(n)x^*(n-i)\} = \varepsilon_i$

4.7 计算机练习: AR 过程的线性建模。考虑 AR 过程:

$$x(n) = a(1)x(n-1) + a(2)x(n-2) + b(0)v(n), \quad v(n) \text{ 是单位方差白噪声}$$

(a) 取 $a(1) = 0$, $a(2) = -0.81$, $b(0) = 1$, 产生 $x(n)$ 的 $N=24$ 个样点。

(b) 计算其自相关序列的估计 $\hat{r}_x(k)$, 并与真实的自相关序列值相比较。

(c) 将 $\hat{r}_x(k)$ 的 DTFT 作为 $x(n)$ 的功率谱估计, 即: $\hat{P}_x(e^{j\omega}) = \sum_{k=-N+1}^{N-1} \hat{r}_x(k)e^{-jk\omega} = \frac{1}{N} |X(e^{j\omega})|^2$ 。

(d) 利用所估计的自相关值和 Yule-Walker 法(自相关法), 估计 $a(1)$, $a(2)$ 和 $b(0)$ 的值, 并讨论估计的精度。

(e) 用(d)中所估计的 $a(k)$ 和 $b(0)$ 来估计功率谱为: $\hat{P}_x(e^{j\omega}) = \frac{|b(0)|^2}{\left|1 + \sum_{k=1}^p a_p(k)e^{-jk\omega}\right|^2}$ 。

(f) 将(c)和(e)的两种功率谱估计与实际的功率谱进行比较, 画出它们的重叠波形。

4.8 重复上题中的(d)~(f), 只是估计 AR 参数是分别采用如下方法: (1)协方差法; (2)Burg 方法; (3)修正协方差法。并比较它们的功率谱估计精度。

4.9 计算机练习: MA 过程的线性建模。考虑 MA(2)过程: $x(n) = v(n) + 0.9v(n-2)$, $v(n)$ 是单位方差白噪声。

(a) 产生 $x(n)$ 的 $N=256$ 个样点, 利用谱因子分解法估计它的 MA(2)模型参数 $b(0), b(1), b(2)$ 。

(b) 用 Durbin 法估计模型参数, 其中两个全极点建模都采样自相关法。比较 Durbin 法和谱因子分解法估计模型参数的精度, 并讨论 Durbin 法中第一个全极点建模的阶数如何其估计精度。

(c) 将 Durbin 法中第二个全极点建模改为协方差法, 并将其 MA(2)参数估计精度与(a)和(b)的结果进行比较, 你会得出什么结论。

(d) 若将 Durbin 法中两次全极点建模都改为协方差法, 重复(c)中的问题。

4.10 计算机练习: ARMA 过程的线性建模。假设一个 ARMA(4,2)过程是单位方差白噪声 $v(n)$

激励如下极零点滤波器而产生: $H(z) = \frac{1 - 0.9z^{-1} + 0.81z^{-2}}{1 - 1.978z^{-1} + 2.853z^{-2} - 1.877z^{-3} + 0.904z^{-4}}$ 。

(a) 产生 $x(n)$ 的 $N=100$ 个样点, 并画出它的功率谱。

(b) 用修正 Yule-Walker 法估计模型参数, 将其与实际模型参数相比较。重复 10 次估计过程, 检验该估计是否是一致估计? 平均的估计结果是否更接近实际参数值? 估算一下各参数估计的方差?

第五章习题

5.1 给定随机过程 $x(n)$ 的 $N=10000$ 个样本点, 要计算其周期图, 但由于存储单元有限, 你最多只能计算 1024 点的 DFT, 试说明如何利用这 10000 个样本值计算其周期图, 并使其分辨率为:

$$\Delta\omega = 0.89 \frac{2\pi}{10000}$$

5.2 一个连续时间信号 $x_a(t)$ 的带宽只有 5KHz, 即 $x_a(t)$ 的谱 $X_a(f)$ 在 $|f|>5\text{KHz}$ 时为零。设只记录了 10 秒的信号值可用于处理, 我们要用这些数据和基 2-FFT 算法估计 $x_a(t)$ 的功率谱, 并要求谱估计的分辨率至少为 10Hz, 假设采用的是 Bartlett 周期图平均法。

- (a) 若数据按 Nyquist 速率采样, 为获得所需的分辨率, 分段时的最小段长是多少?
- (b) 对 10 秒的数据, 若用(a)中确定的最小段长, 则有多少个数据段可用于平均?
- (c) 选择不同的采样速率将如何影响谱估计的分辨率? 若高于 Nyquist 速率采样, 是否会有什么好处?

5.3 设要用 Bartlett 法由 $N=2000$ 个采样点的数据序列估计信号的功率谱。

- (a) 若希望达到 $\Delta f = 0.005$ 的分辨率, 最少段长 L 是多少?
- (b) 试解释为什么增加 L 使其超过(a)中确定的最小值, 不会有什么好处。
- (c) 谱估计的品质因子是定义为其可变量的倒数: $Q = 1/\mathcal{V}$ 。若采用 Bartlett 法, 则为达到 $\Delta f = 0.005$ 的分辨率, 且品质因子至少 5 倍于周期图法的结果, 则所需的数据样本点数 N 至少应多大?

5.4 设随机过程 $x(n)$ 是单位方差白噪声 $w(n)$ 激励如下的系统而产生的。



其中 $A_1(z) = 1 + az^{-1} + 0.99z^{-2}$; $A_2(z) = 1 - az^{-1} + 0.98z^{-2}$ 。

- (a) 若假设 a 较小, 例如 $0 < a < 0.1$, 试画出 $x(n)$ 的功率谱的草图。要注意两个谱峰的位置和幅度, 以及 $\omega = \pi/2$ 处的 $P_x(e^{j\omega})$ 值。
- (b) 若 $a=0.1$, 并拟用 Bartlett 法分辨出 $P_x(e^{j\omega})$ 的两个谱峰, 试确定所需的段长 L 。
- (c) 若用周期图平滑法, 为获得与(b)中的 Bartlett 法差不多的分辨率, 要用多少时滞的自相关值? 若要求估计的方差与四分段的 Bartlett 估计的方差不相上下, 需要多长的数据?

5.5 许多商业的频谱分析仪中都对输入信号 $x(n)$ 的分段数据的周期图作如下的指数平均连续修正来获得其功率谱的估计:

$$\hat{P}_i(e^{j\omega}) = \alpha \hat{P}_{i-1}(e^{j\omega}) + \frac{1-\alpha}{N} \left| \sum_{n=0}^{N-1} x_i(n) e^{-jn\omega} \right|^2$$

其中 $x_i(n) = x(n + N \cdot i)$ 是 $x(n)$ 的第 i 个 N 点长度的数据序列。修正方程初始化为 $\hat{P}_{-1}(e^{j\omega}) = 0$ 。

- (a) 试定性地描述该方法的内在机理, 并讨论加权因子 α 的值应如何选择。
- (b) 假设相继的各周期图是不相关的, 且 $0 < \alpha < 1$, 试针对高斯随机过程求谱估计 $\hat{P}_i(e^{j\omega})$ 的均值和方差。
- (c) 若将周期图换成修正周期图, 试重复(b)的性能分析。

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/447015022015006102>