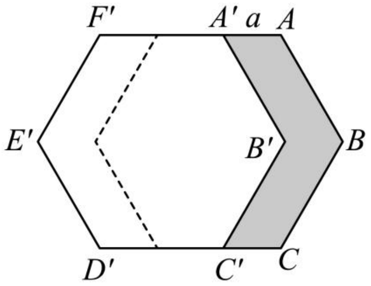
专题 26 图形的对称、平移、旋转与位似（10 个高频考点）

（强化训练）

【考点 1　利用平移的性质求解】

1．（2022·河北廊坊·统考二模）如图，两张完全相同的正六边形纸片（边长为 $2a$）重合在一起，下面一张保持不动，将上面一张纸片六边形$A'B'C'D'E'F'$沿水平方向向左平移a个单位长度，则上面正六边形纸片面积与折线$A'-B'-C'$扫过的面积（阴影部分面积）之比是（　）

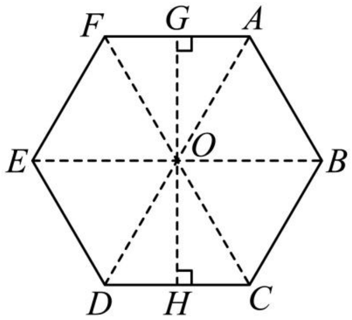


A．3∶1　　　　B．4∶1　　　　C．5∶2　　　　D．2∶1

【答案】A

【分析】求出正六边形和阴影部分的面积即可解决问题．

【详解】解：如下图，正六边形由六个等边三角形组成，过点O作$OH\perp CD$于点H，$OG\perp AF$于点G，



根据题意，正六边形纸片边长为 $2a$，即$CD=2a$，

$\therefore OC=OD=CD=2a$，

$\because OH\perp CD$，

$\therefore CH=DH=\frac{1}{2}CD=a$，

$\therefore$在 Rt△OCH中，$OH=\sqrt{OC^2-CH^2}=\sqrt{(2a)^2-a^2}=\sqrt{3}a$，

同理，$OG=\sqrt{3}a$，

$\therefore S_{\triangle OCD}=\frac{1}{2}CD\cdot OH=\frac{1}{2}\times 2a\times\sqrt{3}a=\sqrt{3}a^2$，

∴正六边形的面积$=6\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times(2a)^2=6\sqrt{3}a^2$，

∵将上面一张纸片六边形$A'B'C'D'E'F'$沿水平方向向左平移a个单位长度，

又∵$GH=OG+OH=2\sqrt{3}a$，

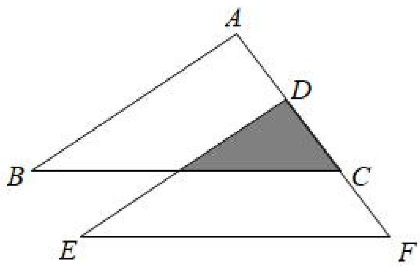
∴阴影部分的面积$=a\times2\sqrt{3}a=2\sqrt{3}a^2$，

∴空白部分与阴影部分面积之比是$=6\sqrt{3}a^2:2\sqrt{3}a^2=3:1$.

故选：A.

【点睛】本题主要考查了多边形的性质、等边三角形的性质、勾股定理、平移变换等知识，解题关键是理解题意，灵活运用所学知识解决问题.

2.（2022·广东佛山·佛山市南海区石门实验学校校考三模）如图，在$\triangle ABC$中，$AB=4$，$AC=3$，$BC=5$.将$\triangle ABC$沿着点A到点C的方向平移到$\triangle DEF$的位置，图中阴影部分面积为4，则平移的距离为（　）



A．$3-\sqrt{6}$　　　B．$\sqrt{6}$　　　C．$3+\sqrt{6}$　　　D．$2\sqrt{6}$

【答案】A

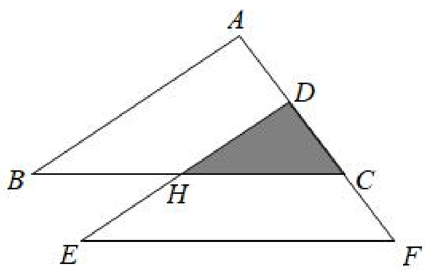
【分析】根据勾股定理的逆定理求出$\triangle ABC$是直角三角形，求出$\triangle ABC$的面积，根据平移的性质得出$AC=DF=3$，$\triangle DEF$的面积=$\triangle ABC$的面积$=6$，再根据面积比等于相似比的平方得出即可.

【详解】解：∵$AB=4$，$AC=3$，$BC=5$，

∴$AB^2+AC^2=BC^2$，

∴$\triangle ABC$是直角三角形，$\angle A=90°$，

∵将$\triangle ABC$沿着点A到点C的方向平移到$\triangle DEF$的位置，



∴$\triangle DHC\backsim\triangle DEF$，

$\therefore\triangle DEF$的面积=$\triangle ABC$的面积=$\frac{1}{2}\times3\times4=6$，$DF=AC=3$，

$\because$图中阴影部分面积为 4，

$\frac{DC}{DF}=\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{6}}$，

$\therefore\frac{DC}{3}=\frac{2}{\sqrt{6}}$，

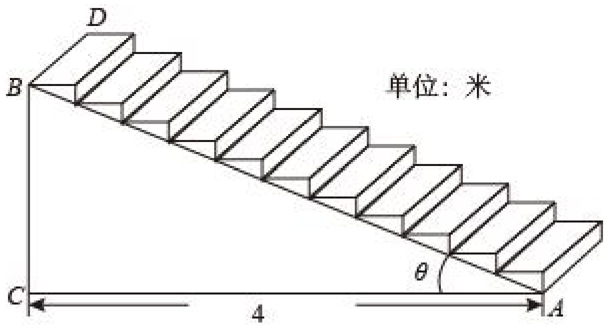
解得：$DC=\sqrt{6}$，

即平移的距离是$CF=AC-DC=3-\sqrt{6}$，

故选：A．

【点睛】本题考查了平移的性质，勾股定理的逆定理，三角形的面积和相似三角形的性质等知识点，能求出$\triangle DEF$的面积是解此题的关键．

3．（2022·湖北随州·统考一模）楼梯的示意图如图所示，BC是铅垂线，CA是水平线，BA与CA的夹角为θ，现在要在楼梯上铺一条地毯，已知$CA=4$米，楼梯宽$BD=1$米，则地毯的面积至少需要（　）



A．$(4+\sin\theta)$米^2　B．$\frac{4}{\cos\theta}$米^2　C．$\left(4+\frac{4}{\tan\theta}\right)$米^2　D．$(4+4\tan\theta)$米^2

【答案】D

【分析】根据正切求出 BC 的长，再求出地毯的长度，即可得答案．

【详解】解：在 Rt$\triangle ABC$ 中，$BC=AC\times\tan\angle CAB=4\tan\theta$，

$\therefore$所需地毯的长度为 $AC+BC$=（4+4tanθ）（米），

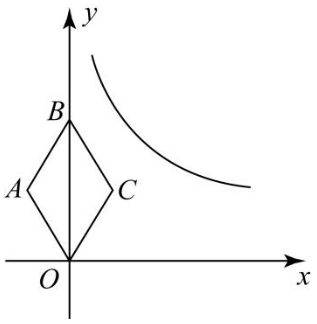
面积为：（4+4tanθ）×1=（4+4tanθ）（米^2），

故选：D．

【点睛】本题考查了解直角三角形的应用和平移的性质，解题的关键是根据正切求出 BC 的长．

4．（2018·河南·河南省实验中学校考一模）如图所示，在平面直角坐标系中，已知反比例函数$y=\frac{k}{x}$（$x>0$）的图像和菱形 $OABC$，且 OB=4，$\tan\angle BOC=\frac{1}{2}$，若将菱形向右平移，菱形的两个顶点 B、C 恰好同时落在反比例函数的图像上，则反比例函数的解析式是

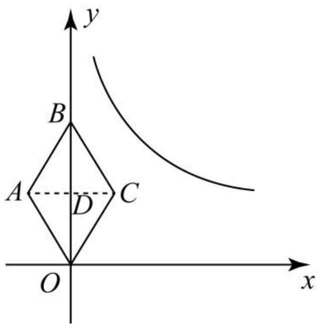
_______________.



【答案】$y=\frac{4}{x}$##$y=4x^{-1}$##$xy=4$

【分析】结合题意，由菱形的性质易得$OD=2$、CD=1，即可确定B、C的坐标，设菱形平移后B的坐标是（x，4），C的坐标是（1+x，2），因为B、C落在反比例函数的图像上，可知$k=4x=2(1+x)$，解得x=1，可知菱形平移后B的坐标是（1，4），将其代入反比例函数的解析式并求解即可获得答案．

【详解】解：连接AC，交y轴于D，如下图，



∵四边形形$OABC$是菱形，

∴$AC\perp OB$，$OD=BD$，$AD=CD$，

∵OB=4，$\tan\angle BOC=\frac{1}{2}$，

∴$\tan\angle BOC=\frac{CD}{OD}=\frac{1}{2}$，

∴$OD=\frac{1}{2}OB=2$，CD=1，

∴A（－1，2），B（0，4），C（1，2），

设菱形平移后B的坐标是（x，4），C的坐标是（1+x，2），

∵B、C落在反比例函数的图像上，

∴$k=4x=2(1+x)$，解得x=1，

即菱形平移后B的坐标是（1，4），代入反比例函数的解析式，

可得 k=1×4=4，

∴反比例函数的解析式是$y=\frac{4}{x}$．

故答案为$y=\frac{4}{x}$．

【点睛】本题主要考查了菱形的性质、待定系数法求反比例函数解析式以及平移的性质等知

识，运用树形结合的思想分析问题是解题关键．

5．（2022·贵州遵义·统考一模）如图 1，计划在长为 30 米、宽为 20 米的矩形地面上修筑两条同样宽的道路①、②（图中阴影部分），设道路①、②的宽为x米，剩余部分为绿化．

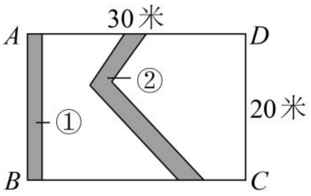


图 1

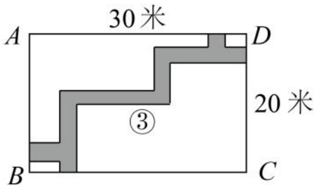


图 2

(1)道路①的面积为___________平方米；道路②的面积为___________平方米（都用含x的代数式表示）．

(2)如图 2，根据实际情况，将计划修筑的道路①、②改为同样宽的道路③（图中阴影部分），若道路的宽依然为x米，剩余部分为绿化，且绿化面积为 551 平方米，求道路的宽度．

【答案】(1)$20x$，$20x$

(2)1 米

【分析】（1）道路①根据长方形的面积公式求解即可，道路②利用平移，可转化为道路①求解；

（2）设道路的宽 x 米，则余下部分可合成长为$(30-x)m$，宽为$(20-x)m$ 的长方形，根据草坪的面积为 551 平方米，即可得出关于 x 的一元二次方程，此题得解．

【详解】（1）解：道路①的面积为 $20x$平方米，道路②的面积为 $20x$平方米

（2）解：根据题意，得$(30-x)(20-x)=551$，

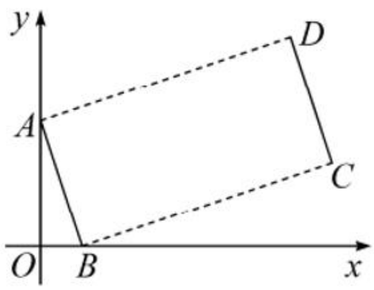
解得$x_1=1$，$x_2=49$（不符合题意，舍去）

答：道路的宽度为 1 米．

【点睛】本题考查的是根据实际问题列一元二次方程．找到关键描述语，找到等量关系准确地列出方程是解决问题的关键．

【考点 2　坐标轴中的平移】

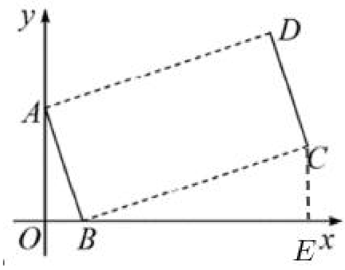
6．（2022·海南·统考中考真题）如图，点$A(0,3)$、$B(1,0)$，将线段AB平移得到线段DC，若$\angle ABC=90°, BC=2AB$，则点 D 的坐标是（　）



A．(7,2)　　B．(7,5)　　C．(5,6)　　D．(6,5)

【答案】D

【分析】先过点 C 做出x轴垂线段 CE，根据相似三角形找出点 C 的坐标，再根据平移的性质计算出对应 D 点的坐标.



【详解】

如图过点 C 作x轴垂线，垂足为点 E，

$\because \angle ABC=90°$

$\therefore \angle ABO+\angle CBE=90°$

$\because \angle CBE+BCE=90°$

$\therefore \angle ABO=\angle BCE$

在ΔABO和ΔBCE中，

$\begin{cases} \angle ABO=\angle BCE \\ \angle AOB=\angle BEC=90° \end{cases}$，

$\therefore \Delta ABO \backsim \Delta BCE$，

$\therefore \frac{AB}{BC}=\frac{AO}{BE}=\frac{OB}{EC}=\frac{1}{2}$，

则$BE=2AO=6$,$EC=2OB=2$

$\because$点 C 是由点 B 向右平移 6 个单位，向上平移 2 个单位得到，

$\therefore$点 D 同样是由点 A 向右平移 6 个单位，向上平移 2 个单位得到，

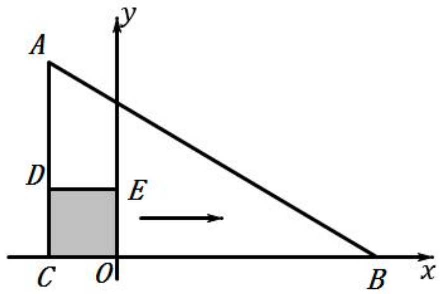
$\because$点 A 坐标为(0，3)，

$\therefore$点 D 坐标为(6，5)，选项 D 符合题意，

故答案选 D

【点睛】本题考查了图象的平移、相似三角形的判定与性质，利用相似三角形的判定与性质找出图象左右、上下平移的距离是解题的关键.

7.（2020·河南·统考中考真题）如图，在ΔABC中，$\angle ACB=90°$．边BC在x轴上，顶点A,B的坐标分别为$(-2,6)$和$(7,0)$．将正方形$OCDE$沿x轴向右平移当点E落在AB边上时，点D的坐标为（ ）



A. $\left(\frac{3}{2},2\right)$　　B. $(2,2)$　　C. $\left(\frac{11}{4},2\right)$　　D. $(4,2)$

【答案】B

【分析】先画出E落在AB上的示意图，如图，根据锐角三角函数求解$O'B$的长度，结合正方形的性质，从而可得答案．

【详解】解：由题意知：$C(-2,0)$,

$\because$ 四边形$COED$为正方形，

$\therefore CO=CD=OE, \angle DCO=90°$,

$\therefore D(-2,2), E(0,2)$,

如图，当E落在AB上时，

$\because A(-2,6), B(7,0)$,

$\therefore AC=6, BC=9$,

由 $\tan\angle ABC=\frac{AC}{BC}=\frac{EO'}{O'B}$,

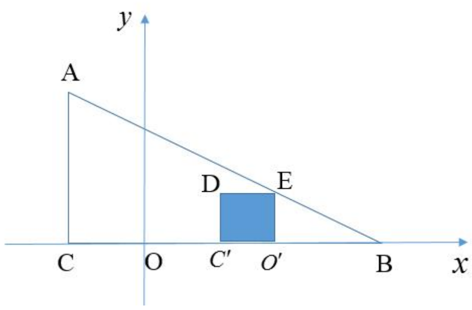
$\therefore \frac{6}{9}=\frac{2}{O'B}$,

$\therefore O'B=3$,

$\therefore OO'=7-3=4, OC'=2$,

$\therefore D(2,2)$.

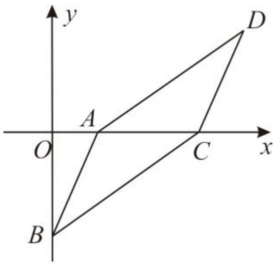
故选B.



【点睛】本题考查的是平移的性质的应用，同时考查了正方形的性质，图形与坐标，锐角三角函数，掌握以上知识是解题的关键．

8．（2022·福建厦门·统考模拟预测）如图，在平面直角坐标系中，$A(1,0)$，$B(0,-2)$，将线段 AB 先向上平移 2 个单位长度，再向右平移 3 个单位长度，得到线段 DC，点 A 与点 D 为

对应点．点 P 为 y 轴上一点，且$S_{\triangle ACP}=\frac{1}{4}S_{四边形ABCD}$，则满足要求的点 P 坐标为______．



【答案】$(0,1)$或$(0,-1)$##$(0,-1)$或$(0,1)$

【分析】根据图形平移的性质，即可求出$D(4,2)$，然后将$S_{四边形ABCD}$转换为$S_{\triangle ADC}+S_{\triangle ABC}$可得到$S_{四边形ABCD}$的面积，最后根据点$P$的特征，结合$S_{\triangle ACP}=\frac{1}{4}S_{四边形ABCD}$即可求得点 P 坐标．

【详解】解：由题意可知，经过平移后，$D(4,2)$，

$\therefore B$到x轴的距离为 2，记为H_1，D到x轴的距离为 2，记为H_2，

$\therefore S_{四边形ABCD}=S_{\triangle ADC}+S_{\triangle ABC}$，

$=\frac{1}{2}\times AC\times H_2+\frac{1}{2}\times AC\times H_1$，

$=\frac{1}{2}\times 2\times$ （H_1+H_2)，

$=4$，

$\because P$为y轴上的一点，记P点到x轴的距离为H，

$\therefore S_{\triangle ACP}=\frac{1}{4}S_{四边形ABCD}=\frac{1}{4}\times 4=1$，

$S_{\triangle ACP}=\frac{1}{2}\times AC\times H=1=\frac{1}{2}\times 2\times H$，

$\therefore H=1$，

$\therefore P$点的纵坐标为± 1，

$\therefore P$点的坐标为$(0,1)$或$(0,-1)$．

故答案为：$(0,1)$或$(0,-1)$

【点睛】本题主要考查直角坐标系中的图形平移，确定点D的坐标，是解决本题的关键．

9．（2022·广东中山·统考二模）将点$A\left(m-2,\frac{5m-2}{3}\right)$向左平移$a(a>0)$个单位长度，向上平移$b(b>0)$个单位长度，得到点$A_1(2m-3,2m+1)$，则 m 的取值范围是___________．

【答案】$-5<m<1$

【分析】先根据平移方式和平移前后点的坐标得到$\begin{cases}m-2-a=2m-3\\ \frac{5m-2}{3}+b=2m+1\end{cases}$从而求出$\begin{cases}a=1-m\\ b=\frac{m+5}{3}\end{cases}$再由$\begin{cases}a>0\\ b>0\end{cases}$，得到$\begin{cases}1-m>0\\ \frac{m+5}{3}>0\end{cases}$，由此求解即可．

【详解】解：$\because$点$A\left(m-2,\frac{5m-2}{3}\right)$向左平移$a(a>0)$个单位长度，向上平移$b(b>0)$个单位

长度，得到点$A_1(2m-3,2m+1)$，

∴$\begin{cases} m-2-a=2m-3 \\ \frac{5m-2}{3}+b=2m+1 \end{cases}$，

∴$\begin{cases} a=1-m \\ b=\frac{m+5}{3} \end{cases}$，

∴$\begin{cases} a>0 \\ b>0 \end{cases}$，

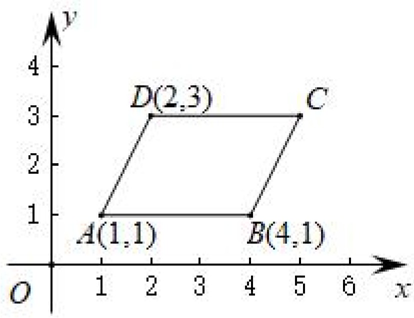
∴$\begin{cases} 1-m>0 \\ \frac{m+5}{3}>0 \end{cases}$，

∴$-5<m<1$，

故答案为：$-5<m<1$．

【点睛】本题主要考查了坐标与图形变化|—平移，解一元一次不等式组，解一元一次方程，解题的关键在于能够利用 m 表示出 a、b．

10．（2022·浙江台州·统考二模）如图，平行四边形 $ABCD$ 的三个顶点的坐标分别为$A(1,1)$，$B(4,1)$，$D(2,3)$，要把顶点 A 平移到顶点 C 的位置，则其平移方式可以是：先向右平移______个单位，再向上平移______个单位．



【答案】　4　2

【分析】根据平行线的性质求得点C的坐标，然后即可求得平移方式，即可求解．

【详解】解：∵平行四边形 $ABCD$ 的三个顶点的坐标分别为$A(1,1)$，$B(4,1)$，$D(2,3)$，

∴$AB=DC=4-1=3$，

∴ $C(2+3,3)$即$C(5,3)$，

将$A(1,1)$平移到顶点$C(5,3)$的位置，可以是先向右平移 4 个单位，再向上平移 2 个单位．

故答案为：4，2．

【点睛】本题考查了坐标与图形，平移的性质，平行四边形的性质，掌握以上知识是解题的关键．

【考点 3　镜面对称】

11．（2022 秋·黑龙江哈尔滨·八年级校考期中）九年四班中考倒计时钟上每天都显示着距离中考还有多少天，小明用镜子看背后时钟上的时间如图显示，这时的时钟上的正确显示应是（　　）

A．258　　　　　　B．528　　　　　　C．825　　　　　　D．852

【答案】A

【分析】在平面镜中的像与现实中的事物左右顺序颠倒，且关于镜面对称，由此可解．

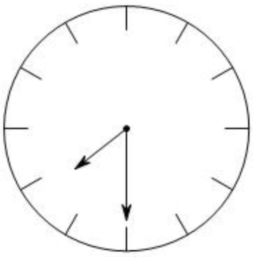
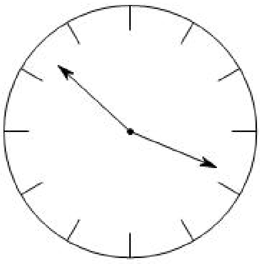
【详解】解：根据镜面对称的性质，时钟上显示的数字与成轴对称，

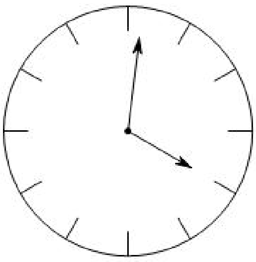
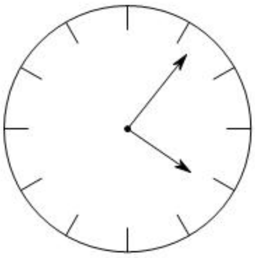
因此时钟上的正确显示应是：258．

故选 A．

【点睛】本题考查镜面对称，解题的关键是掌握“平面镜中的像与现实中的事物关于镜面对称”．

12．（2022 秋·福建龙岩·八年级校考期中）小明在镜中看到身后墙上的时钟，实际时间最接近 8 时的是下图中的（　　）

A．　B．

C．　D．

【答案】C

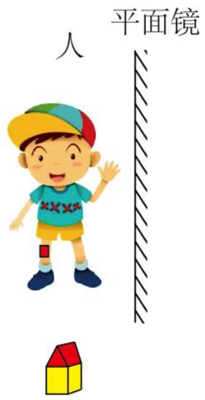
【分析】根据镜面对称的性质求解．

【详解】解：8 点的时钟，在镜子里看起来应该是 4 点，所以最接近 8 点的时间在镜子里看起来就更接近 4 点，所以应该是图 C 所示，最接近 8 点时间．

故选 C．

【点睛】主要考查镜面对称的性质：在平面镜中的像与现实中的事物恰好左右或上下顺序颠倒，且关于镜面对称．

13．（2022 春·河南周口·七年级统考期末）如图下面镜子里哪个是他的像？（　　）



A.  B.  C. D.

【答案】B

【分析】直接利用镜面对称的定义得出答案.

【详解】解：由镜面对称的性质，连接对应点的线段与镜面垂直并且被镜面平分，即可得出只有 B 与原图形成镜面对称.

故选：B.

【点睛】此题主要考查了镜面对称，正确把握镜面对称的定义是解题关键.

14.（2020·广东·统考一模）小明从前面的镜子里看到后面墙上挂钟的时间为 2:30，则实际时间是________________.

【答案】9:30

【分析】利用镜面对称的性质求解．镜面对称的性质：在平面镜中的像与现实中的事物恰好顺序颠倒，且关于镜面对称.

【详解】解：2:30 时，分针竖直向下，时针指 2 和 3 之间，根据对称性可得：与 9:30 时的指针指向成轴对称，故实际时间是 9:30.

【点睛】本题考查镜面反射的原理与性质．解决此类题应认真观察，注意技巧.

15.（2022 秋·江苏宿迁·八年级统考阶段练习）某公路急转弯处设立了一面大镜子，从镜子中看到汽车的车辆号码如图所示，则该汽车的号码是______.

【答案】$B6395$

【分析】利用镜面对称的性质求解．镜面对称的性质：在平面镜中的像与现实中的事物恰好顺序颠倒，且关于镜面对称.

【详解】解：题中所显示的图片中的数字与“$B6395$”成轴对称，则该汽车的号码是 $B6395$.

故答案为：$B6395$．

【点睛】本题考查镜面反射的原理与性质．解决此类题应认真观察，注意技巧，理解轴对称的性质是解本题的关键．

【考点4　轴对称中坐标与图形变化】

16．（2022·陕西·统考中考真题）已知点 $A(-2，m)$在一个反比例函数的图象上，点 A'与点 A 关于 y 轴对称．若点 A'在正比例函数$y=\frac{1}{2}x$的图象上，则这个反比例函数的表达式为_______．

【答案】$y=-\frac{2}{x}$

【分析】根据点 A 与点 A'关于 y 轴对称，得到 $A'(2，m)$，由点 A'在正比例函数$y=\frac{1}{2}x$的图象上，求得 m 的值，再利用待定系数法求解即可．

【详解】解：∵点 A 与点 A'关于 y 轴对称，且 $A(-2，m)$，

∴$A'(2，m)$，

∵点 A'在正比例函数$y=\frac{1}{2}x$的图象上，

∴$m=\frac{1}{2}\times 2$，

解得：$m=1$，

∴$A(-2，1)$，

设这个反比例函数的表达式为 $y=\frac{k}{x}$，

∵$A(-2，1)$ 在这个反比例函数的图象上，

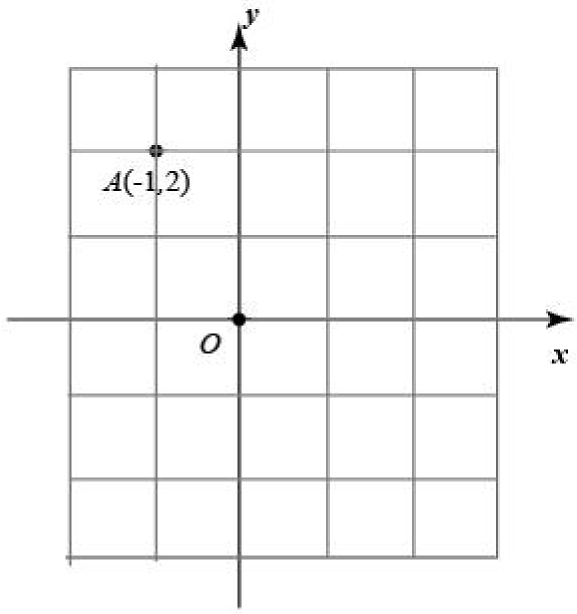
∴$k=-2\times 1=-2$，

∴这个反比例函数的表达式为 $y=-\frac{2}{x}$，

故答案为：$y=-\frac{2}{x}$.

【点睛】本题考查反比例函数图象上点的坐标特征、关于 x 轴、y 轴对称的点的坐标特征，解答本题的关键是明确题意，求出 m 的值．

17．（2021·湖北宜昌·统考中考真题）如图，在平面直角坐标系中，将点$A(-1,2)$向右平移 2 个单位长度得到点B，则点B关于x轴的对称点C的坐标是___________．



【答案】$(1,-2)$

【分析】根据平移的坐标变化规律和关于 x 轴对称的点的坐标特征即可解决.

【详解】解：∵点 A（-1，2）向右平移 2 个单位得到点 B，

∴B（1，2）.

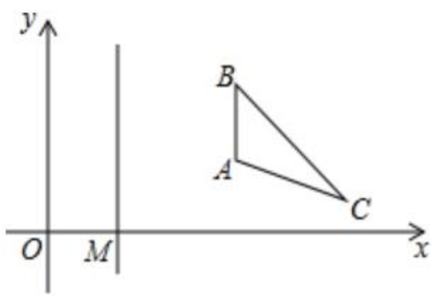
∵点 C 与点 B 关于 x 轴对称，

∴C（1，-2）.

故答案为：（1，-2）

【点睛】本题考查了平移、关于坐标轴对称等知识点，熟知平移时点的坐标变化规律和关于正半轴对称的点的坐标特征是解题的关键.

18．（2020·江苏盐城·统考中考真题）如图，已知点$A(5,2)$，$B(5，4)$，$C(8，1)$，直线$l \perp x$轴，垂足为点$M(m，0)$，其中$m < \frac{5}{2}$，若$\triangle A'B'C'$与$\triangle ABC$关于直线l对称，且$\triangle A'B'C'$有两个顶点在函数$y=\frac{k}{x}(k \neq 0)$的图像上，则k的值为：________________________.



【答案】-6 或-4

【分析】因为$\triangle A'B'C'$与$\triangle ABC$关于直线 l 对称，且直线$l \perp x$轴，从而有互为对称点纵坐标相同，横坐标之和为 $2m$，利用等量关系计算出 m 的值，又由于$\triangle A'B'C'$有两个顶点在函数$y=$

$\frac{k}{x}(k \neq 0)$，从而进行分情况讨论是哪两个点在函数上，求出 k 的值.

【详解】解：∵△$A'B'C'$与△ABC关于直线 l 对称，直线$l \perp x$轴，垂足为点$M(m，0)$，$m < \frac{5}{2}$

∴$A'(2m-5,2)$，$B'(2m-5,4)$，$C'(2m-8,1)$

∵△$A'B'C'$有两个顶点在函数$y=\frac{k}{x}(k \neq 0)$

（1）设$A'(2m-5,2)$，$B'(2m-5,4)$在直线$y=\frac{k}{x}(k \neq 0)$上，

代入有$(2m-5)\times 2=(2m-5)\times 4$，$m=\frac{5}{2}$不符合$m<\frac{5}{2}$故不成立；

（2）设$A'(2m-5,2)$，$C'(2m-8,1)$在直线$y=\frac{k}{x}(k \neq 0)$上，

有$(2m-5)\times 2=(2m-8)\times 1$，$m=1$，$A'(-3,2)$，$C'(-6,1)$，代入方程后 k=-6；

（3）设$B'(2m-5,4)$，$C'(2m-8,1)$在直线$y=\frac{k}{x}(k \neq 0)$上，

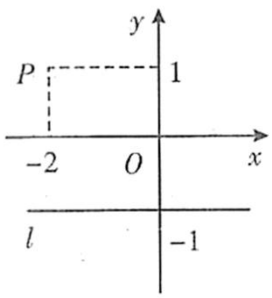
有$(2m-5)\times 4=(2m-8)\times 1$，$m=2$，$B'(-1,4)$，$C'(-4,1)$，代入方程后有 k=-4；

综上所述，k=-6 或 k=-4；

故答案为：-6 或-4.

【点睛】本题考查轴对称图形的坐标关系以及反比例函数解析式，其中明确轴对称图形纵坐标相等，横坐标之和为对称轴横坐标的 2 倍是解题的关键.

19.（2020·四川达州·中考真题）如图，点$P(-2,1)$与点 $Q(a,b)$关于直线$l(y=-1)$对称，则$a+b=$______.



【答案】-5

【分析】根据点$P(-2,1)$与点 $Q(a,b)$关于直线$l(y=-1)$对称求得 a，b 的值，最后代入求解即可.

【详解】解：∵点$P(-2,1)$与点 $Q(a,b)$关于直线$l(y=-1)$对称

∴a=-2，$\frac{1+b}{2}=-1$,解得 b=-3

∴a+b=-2+（-3）=-5

故答案为-5.

【点睛】本题考查了关于 y=-1 对称点的性质，根据对称点的性质求得 a、b 的值是解答本题的关键.

20.（2019·山东临沂·统考中考真题）在平面直角坐标系中，点$P(4,2)$关于直线$x=1$ 的对称

点的坐标是______.

【答案】$(-2,2)$

【分析】先求出点P到直线$x=1$的距离，再根据对称性求出对称点P'到直线$x=1$的距离，从而得到点P'的横坐标，即可得解.

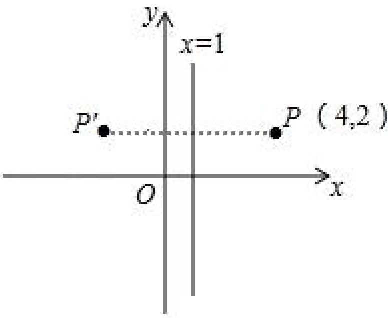
【详解】∵点$P(4,2)$，

∴点P到直线$x=1$的距离为$4-1=3$，∴点P关于直线$x=1$的对称点P'到直线$x=1$的距离为3，

∴点P'的横坐标为$1-3=-2$，

∴对称点P'的坐标为$(-2,2)$.

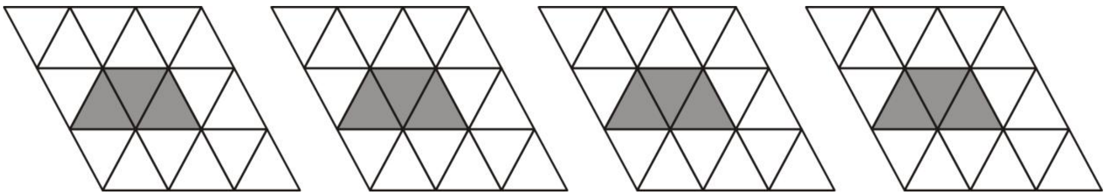
故答案为$(-2,2)$.



【点睛】本题考查了坐标与图形变化 - 对称，根据轴对称性求出对称点到直线$x=1$的距离，从而得到横坐标是解题的关键，作出图形更形象直观.

【考点5 设计轴对轴图案】

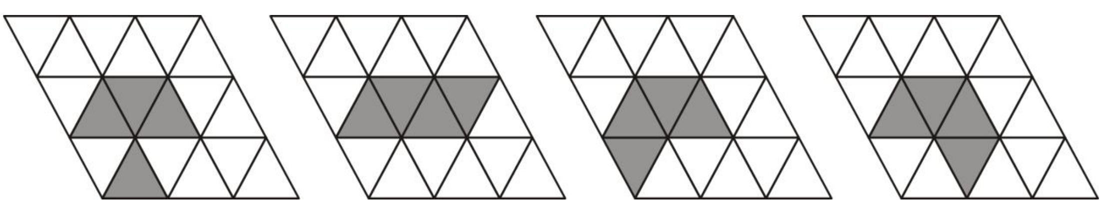
21.（2022·四川广安·统考中考真题）数学活动课上，张老师组织同学们设计多姿多彩的几何图形， 下图都是由边长为1的小等边三角形构成的网格，每个网格图中有3个小等边三角形已涂上阴影，请同学们在余下的空白小等边三角形中选取一个涂上阴影，使得4个阴影小等边三角形组成一个轴对称图形或中心对称图形，请画出4种不同的设计图形．规定：凡通过旋转能重合的图形视为同一种图形）



【答案】见解析

【分析】根据轴对称图形的定义、中心对称图形的定义画出图形即可

【详解】解：如下图所示：



【点睛】本题考查利用轴对称设计图案，中心对称设计图案，解题的关键是理解题意，灵活运用所学知识解决问题．

22．（2019·四川广安·统考中考真题）在数学活动课上，王老师要求学生将图 1 所示的 3×3 正方形方格纸，剪掉其中两个方格，使之成为轴对称图形．规定：凡通过旋转能重合的图形视为同一种图形，如图 2 的四幅图就视为同一种设计方案（阴影部分为要剪掉部分）

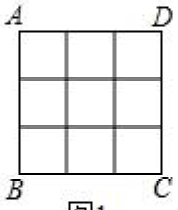


图1

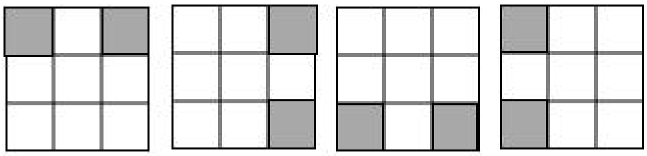


图2

请在图中画出 4 种不同的设计方案，将每种方案中要剪掉的两个方格涂黑（每个 3×3 的正方形方格画一种，例图除外）

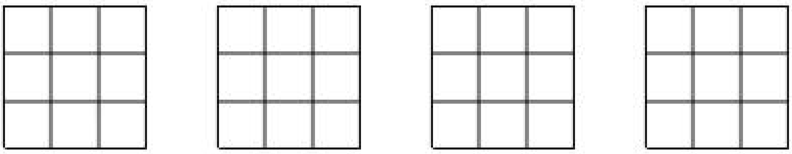


图3

【答案】见解析.

【分析】根据轴对称图形和旋转对称图形的概念作图即可得.

【详解】解：根据剪掉其中两个方格，使之成为轴对称图形；即如图所示：

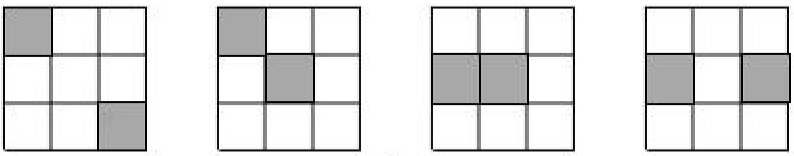


图3

【点睛】本题主要考查利用旋转设计图案，解题的关键是掌握轴对称图形和旋转对称图形的概念.

23．（2017·湖北·中考真题）如图，下列 4×4 网格图都是由 16 个相同小正方形组成，每个网格图中有 4 个小正方形已涂上阴影，请在空白小正方形中，按下列要求涂上阴影.

（1）在图 1 中选取 2 个空白小正方形涂上阴影，使 6 个阴影小正方形组成一个中心对称图形；

（2）在图 2 中选取 2 个空白小正方形涂上阴影，使 6 个阴影小正方形组成一个轴对称图形，

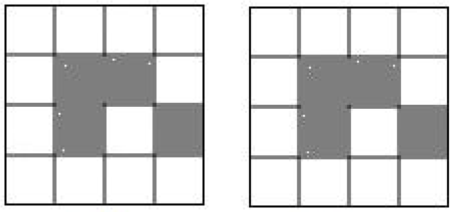


图1　　　图2

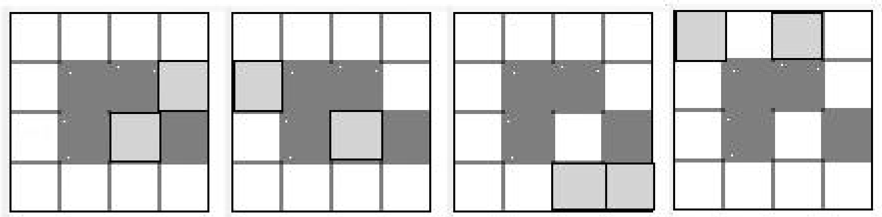
但不是中心对称图形.

【答案】(1) 答案见解析；(2) 答案见解析.

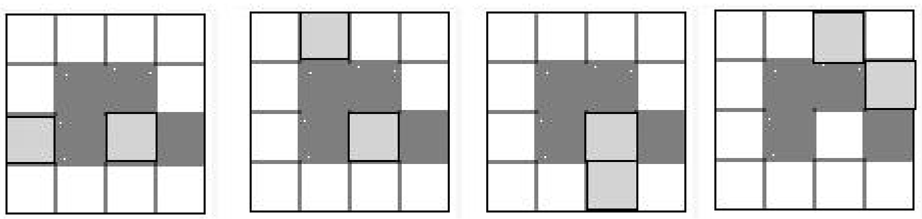
【分析】(1) 根据中心对称图形，画出所有可能的图形即可.

(2) 根据是轴对称图形，不是中心对称图形，画出图形即可.

【详解】解：(1) 在图 1 中选取 2 个空白小正方形涂上阴影，使 6 个阴影小正方形组成一个中心对称图形，答案如图所示；

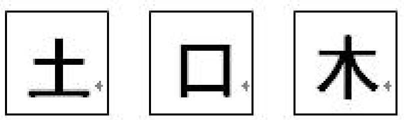


(2) 在图 2 中选取 2 个空白小正方形涂上阴影，使 6 个阴影小正方形组成一个轴对称图形，但不是中心对称图形，答案如图所示；

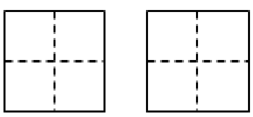


【点睛】本题考查了利用旋转设计图案以及利用轴对称设计图案.

24.（2008·吉林长春·中考真题）汉字是世界上最古老的文字之一，字形结构体现人类追求均衡对称、和谐稳定的天性．如图，三个汉字可以看成是轴对称图形.



(1) 请在方框中再写出 2 个类似轴对称图形的汉字；



(2) 小敏和小慧利用“土”、“口”、“木”三个汉字设计一个游戏，规则如下：将这三个汉字分别写在背面都相同的三张卡片上，背面朝上洗匀后抽出一张，放回洗匀后再抽出一张，若两次抽出的汉字能构成上下结构的汉字（如“土”“土”构成“圭”）小敏获胜，否则小慧获胜．你

认为这个游戏对谁有利？请用列表或画树状图的方法进行分析并写出构成的汉字进行说明.

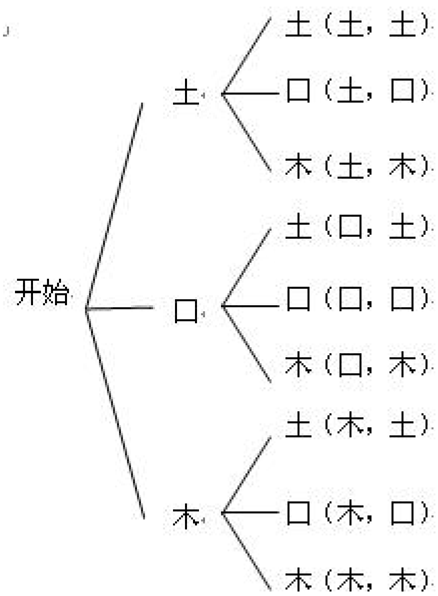
【答案】解：（1）如：田、日 等

（2）这个游戏对小慧有利.

每次游戏时，所有可能出现的结果如下：（列表）

	土	口	木
土	（土，土）	（土，口）	（土，木）
口	（口，土）	（口，口）	（口，木）
木	（木，土）	（木，口）	（木，木）

（树状图）



总共有 9 种结果，每种结果出现的可能性相同，

其中能组成上下结构的汉字的结果有 4 种：（土，土）“圭”，（口，口）“吕”，（木，口）“杏”或“呆”，（口，木）“呆”或“杏”.

∴ $P_{(小敏获胜)}=\frac{4}{9}$，$P_{(小慧获胜)}=\frac{5}{9}$

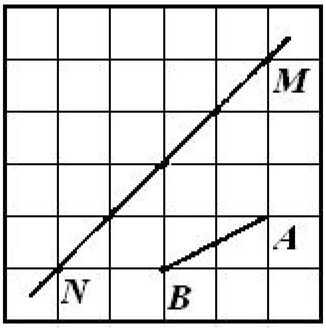
$P_{(小敏获胜)}<P_{(小慧获胜)}$.

∴游戏对小慧有利

【详解】(1）就是汉字中左右结构，或上下结构相同的字，如田日等字；

（2）本题要具体分情况分析，分析三个字的组合，及它们的概率，从中找出对谁有利.

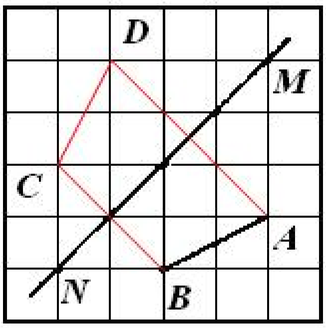
25.（2013·黑龙江哈尔滨·中考真题）如图．在每个小正方形的边长均为 1 个单位长度的方格纸中,有线段 AB 和直线 MN，点 A、B、M、N 均在小正方形的顶点上．



（1）在方格纸中画四边形 ABCD(四边形的各顶点均在小正方形的顶点上)，使四边形 ABCD 是以直线 MN 为对称轴的轴对称图形，点 A 的对称点为点 D，点 B 的对称点为点 C；

（2）请直接写出四边形 ABCD 的周长．

【答案】(1）作图如下：

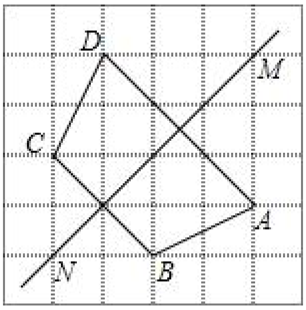


（2）四边形 ABCD 的周长为 $2\sqrt{5}+5\sqrt{2}$.

【详解】试题分析：(1）根据四边形 $ABCD$ 是以直线 MN 为对称轴的轴对称图形，分别得出对称点画出即可；

（2）根据勾股定理求出四边形 $ABCD$ 的周长即可.

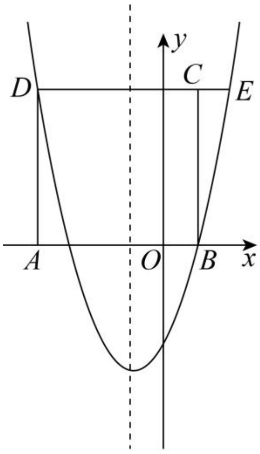
试题解析：(1）如图所示：

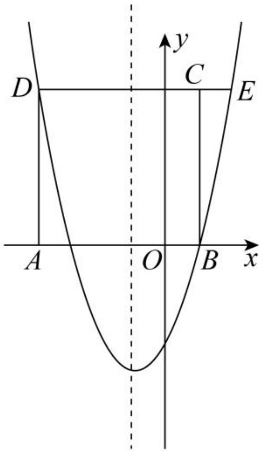


（2）四边形 $ABCD$ 的周长为：$AB+BC+CD+AD=\sqrt{5}+2\sqrt{2}+\sqrt{5}+3\sqrt{2}=2\sqrt{5}+5\sqrt{2}$.

【考点 6　利用轴对称求最值】

26．（2021·湖北恩施·统考中考真题）如图，在平面直角坐标系中，四边形$ABCD$为正方形，点A，B在x轴上，抛物线$y=x^2+bx+c$经过点B，$D(-4,5)$两点，且与直线DC交于另一点E.





备用图

（1）求抛物线的解析式；

（2）F为抛物线对称轴上一点，Q为平面直角坐标系中的一点，是否存在以点Q，F，E，B为顶点的四边形是以BE为边的菱形．若存在，请求出点F的坐标；若不存在，请说明理由；

（3）P为y轴上一点，过点P作抛物线对称轴的垂线，垂足为M，连接ME，BP．探究$EM+MP+PB$是否存在最小值．若存在，请求出这个最小值及点M的坐标；若不存在，请说明理由．

【答案】（1）$y=x^2+2x-3$；（2）存在以点Q，F，E，B为顶点的四边形是以BE为边的菱形，点F的坐标为$(-1,\sqrt{22})$或$(-1,-\sqrt{22})$或$(-1,5-\sqrt{17})$或$(-1,5+\sqrt{17})$；（3）$EM+MP+PB$存在最小值，最小值为$\sqrt{41}+1$，此时点 M 的坐标为$\left(-1,\frac{5}{4}\right)$.

【分析】（1）由题意易得$AD=AB=5$，进而可得$A(-4,0)$，则有$B(1,0)$，然后把点 B、D 代入求解即可；

（2）设点$F(-1,a)$，当以点Q，F，E，B为顶点的四边形是以BE为边的菱形时，则根据菱形的性质可分①当$BF=BE$时，②当$EF=BE$时，然后根据两点距离公式可进行分类求解即可；

（3）由题意可得如图所示的图象，连接 OM、DM，由题意易得 $DM=EM$，四边形 $BOMP$ 是平行四边形，进而可得 $OM=BP$，则有$EM+MP+PB=DM+MO+1$，若使$EM+MP+PB$

的值为最小，即$DM+MO+1$为最小，则有当点D、M、O三点共线时，$DM+MO+1$的值为最小，然后问题可求解.

【详解】解：（1）∵四边形$ABCD$为正方形，$D(-4,5)$，

∴$AD=AB=5$，$A(-4,0)$，

∴$AO=4$，

∴OB=1，

∴$B(1,0)$，

把点B、D坐标代入得：$\begin{cases}16-4b+c=5\\1+b+c=0\end{cases}$，

解得：$\begin{cases}b=2\\c=-3\end{cases}$，

∴抛物线的解析式为$y=x^2+2x-3$；

（2）由（1）可得$B(1,0)$，抛物线解析式为$y=x^2+2x-3$，则有抛物线的对称轴为直线$x=-1$，

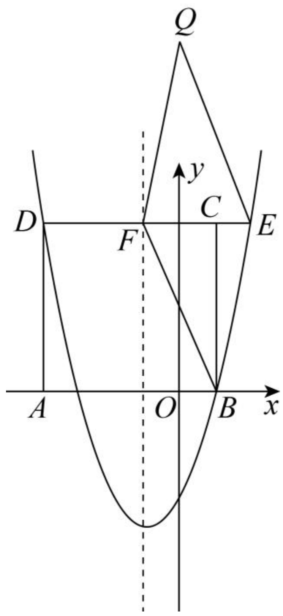
∵点D与点E关于抛物线的对称轴对称，

∴$E(2,5)$，

∴由两点距离公式可得$BE^2=(1-2)^2+(0-5)^2=26$，

设点$F(-1,a)$，当以点Q，F，E，B为顶点的四边形是以BE为边的菱形时，则根据菱形的性质可分：

①当$BF=BE$时，如图所示：

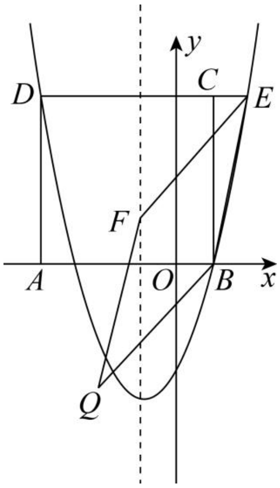


∴由两点距离公式可得$BF^2=BE^2$，即$(1+1)^2+(0-a)^2=26$，

解得：$a=\pm\sqrt{22}$，

∴点F的坐标为$(-1,\sqrt{22})$或$(-1,-\sqrt{22})$；

②当$EF=BE$时，如图所示：



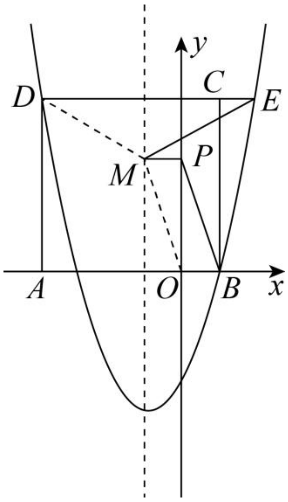
∴由两点距离公式可得$EF^2 = BE^2$，即$(2+1)^2 + (5-a)^2 = 26$，

解得：$a = 5 \pm \sqrt{17}$，

∴点 F 的坐标为$\left(-1, 5-\sqrt{17}\right)$或$\left(-1, 5+\sqrt{17}\right)$；

综上所述：当以点Q，F，E，B为顶点的四边形是以BE为边的菱形，点F的坐标为$\left(-1, \sqrt{22}\right)$或$\left(-1, -\sqrt{22}\right)$或$\left(-1, 5-\sqrt{17}\right)$或$\left(-1, 5+\sqrt{17}\right)$；

（3）由题意可得如图所示：



连接 OM、DM，

由（2）可知点 D 与点 E 关于抛物线的对称轴对称，$B(1,0)$，

∴$OB = 1$，$DM=EM$，

∵过点P作抛物线对称轴的垂线，垂足为M，

∴$PM = OB = 1, PM // OB$，

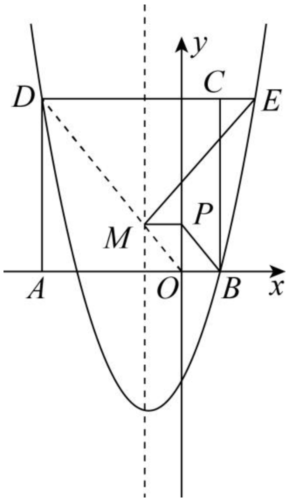
∴四边形 $BOMP$ 是平行四边形，

∴$OM=BP$，

∴$EM + MP + PB = DM + MO + 1$，

若使$EM + MP + PB$的值为最小，即$DM + MO + 1$ 为最小，

∴当点 D、M、O 三点共线时，$DM + MO + 1$ 的值为最小，此时 OD 与抛物线对称轴的交点为 M，如图所示：



∵$D(-4,5)$，

∴$OD = \sqrt{4^2 + 5^2} = \sqrt{41}$，

∴$DM + MO + 1$ 的最小值为$\sqrt{41} + 1$，即$EM + MP + PB$的最小值为$\sqrt{41} + 1$，

设线段 OD 的解析式为$y = kx$，代入点 D 的坐标得：$k = -\frac{5}{4}$，

∴线段 OD 的解析式为$y = -\frac{5}{4}x$，

∴$M\left(-1,\frac{5}{4}\right)$.

【点睛】本题主要考查二次函数的综合、菱形的性质及轴对称的性质，熟练掌握二次函数的综合、菱形的性质及轴对称的性质是解题的关键.

27．（2013·贵州六盘水·中考真题）（1）观察发现

如图（1）：若点 A、B 在直线 m 同侧，在直线 m 上找一点 P，使 AP+BP 的值最小，做法如下：

作点 B 关于直线 m 的对称点 B′，连接 AB′，与直线 m 的交点就是所求的点 P，线段 AB′的长度即为 AP+BP 的最小值.

如图（2）：在等边三角形 ABC 中，AB=2，点 E 是 AB 的中点，AD 是高，在 AD 上找一点 P，使 BP+PE 的值最小，做法如下：

作点 B 关于 AD 的对称点，恰好与点 C 重合，连接 CE 交 AD 于一点，则这点就是所求的点 P，故 BP+PE 的最小值为_______.

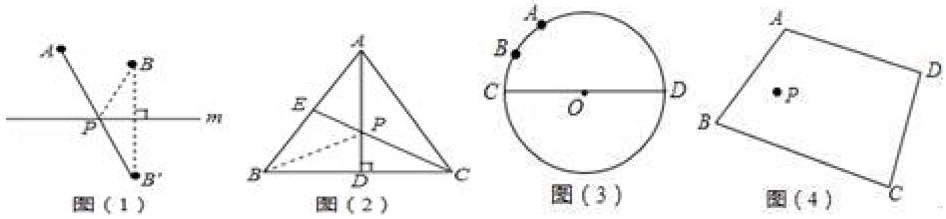
（2）实践运用

如图（3）：已知⊙O 的直径 CD 为 2，$\widehat{AC}$的度数为 60°，点 B 是$\widehat{AC}$的中点，在直径 CD 上作出点 P，使 BP+AP 的值最小，则 BP+AP 的值最小，则 BP+AP 的最小值为_______.

（3）拓展延伸

如图（4）：点 P 是四边形 ABCD 内一点，分别在边 AB、BC 上作出点 M，点 N，使 PM+PN

的值最小，保留作图痕迹，不写作法．



【答案】解：（1）$\sqrt{3}$．（2） $\sqrt{2}$．（3）见解析

【详解】分析：（1）观察发现：利用作法得到 CE 的长为 BP+PE 的最小值；

∵在等边三角形 ABC 中，AB=2，点 E 是 AB 的中点

∴CE⊥AB，∠BCE=∠BCA=30°，BE=1．

∴$CE=\sqrt{3}BE=\sqrt{3}$．

（2）实践运用：过 B 点作弦 BE⊥CD，连结 AE 交 CD 于 P 点，连结 OB、OE、OA、PB，根据垂径定理得到 CD 平分 BE，即点 E 与点 B 关于 CD 对称，则 AE 的长就是 BP+AP 的最小值：

∵BE⊥CD，∴CD 平分 BE，即点 E 与点 B 关于 CD 对称．

∵$\overset{\frown}{AC}$的度数为 60°，点 B 是$\overset{\frown}{AC}$的中点，∴∠BOC=30°，∠AOC=60°．∴∠EOC=30°．

∴∠AOE=60°+30°=90°．

∵OA=OE=1，∴$AE\sqrt{2}OA=\sqrt{2}$．

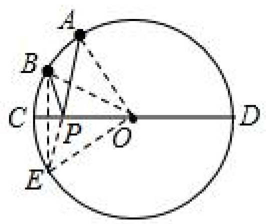
∵AE 的长就是 BP+AP 的最小值，∴BP+AP 的最小值是$\sqrt{2}$．

（3）拓展延伸：分别作出点 P 关于 AB 和 BC 的对称点 E 和 F，然后连接 EF，EF 交 AB 于 M、交 BC 于 N．则点 M，点 N，使 PM+PN 的值最小．

解：（1）观察发现：$\sqrt{3}$．

（2）实践运用：

如图，过 B 点作弦 BE⊥CD，连接 AE 交 CD 于 P 点，连接 OB、OE、OA、PB，则点 P 即为使 BP+AP 的值最小的点．



BP+AP 的最小值是$\sqrt{2}$．

（3）拓展延伸：作图如下：