

2024-2025 学年河南省高三上学期普通高中联合教学质量检测数学
模拟试卷

注意事项:

1. 答题前, 先将自己的姓名、准考证号填写在试卷和答题卡上, 并将准考证号条形码贴在答题卡上的指定位置.
2. 选择题的作答: 每小题选出答案后, 用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑. 写在试卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效.
3. 非选择题的作答: 用黑色签字笔直接答在答题卡上对应的答题区域内. 写在试卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效.
4. 考试结束后, 请将本试卷和答题卡一并上交.

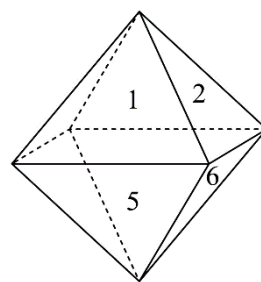
一、单项选择题 (本大题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分. 在每小题所给的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的)

1. 设集合 $A = \{0, a\}$, $B = \{1, a-2, 3a-4\}$, 若 $A \cap B = A$, 则 $a = ()$
A. 2 B. 1 C. $\frac{4}{3}$ D. -2
2. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $a_1 = 3$, $\frac{S_n}{a_n} = \frac{n+1}{2}$, 则 $\sum_{i=1}^{99} \frac{1}{S_i} = ()$
A. $\frac{33}{50}$ B. $\frac{99}{100}$ C. $\frac{297}{200}$ D. $\frac{200}{303}$
3. 在单位圆中, 已知角 α 是第二象限角, 它的终边与单位圆交于点 $P\left(-\frac{4}{5}, y\right)$, 则 $\sin(\pi - \alpha) = ()$
A. $-\frac{4}{5}$ B. $-\frac{3}{5}$ C. $\frac{3}{5}$ D. $\frac{4}{5}$
4. 在 $(x+1)(x-2)(x+3)(x-4)(x+5)(x-a)$ 展开式中, 含 x^5 的项的系数是 6, 则 $a = ()$
A. -6 B. -3 C. 3 D. 6
5. 已知平面向量 $\vec{a} = (1, 2)$, $\vec{b} = (m, -1)$, 则“ $m < 2$ ”是“ $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为钝角”的 $()$
A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件
6. 已知过抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点 F 作直线交抛物线于 A, B 两点, 若 $|AF| = 3|BF|$,

AB 的中点到 y 轴的距离为 $\frac{5}{2}$, 则 p 的值为 ()

- A. 2 B. 3 C. 4 D. 5

7. 如图, 一个正八面体的八个面分别标以数字 1 到 8, 任意抛掷一次这个正八面体, 观察它与地面接触的面上的数字, 得到样本空间为 $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, 记事件 $A =$ “得到的点数为偶数”, 记事件 $B =$ “得到的点数不大于 4”, 记事件 $C =$ “得到的点数为质数”, 则下列说法正确的是 ()



- A. 事件 B 与 C 互斥, A 与 C 相互对立
B. $P(A \cup B) = \frac{5}{8}$
C. $P(ABC) = P(A)P(B)P(C)$ 但不满足 A, B, C 两两独立
D. $P(ABC) = P(A)P(B)P(C)$ 且 A, B, C 两两相互独立

8. 若 $g(x) = \max\{|2x-3|, 3-2x^2\}$, $h(x) = \max\{|2x+3|, 3-2x^2\}$, $f(x) = \min\{g(x), h(x)\}$,

其中 $\max\{x, y, z\}$ 表示 x, y, z 中的最大者, $\min\{x, y, z\}$ 表示 x, y, z 中的最小者, 下列说法不正确的是 ()

- A. 函数 $f(x)$ 为偶函数
B. 当 $x \in [1, 3]$ 时, 有 $f(x) \leq 8$
C. 不等式 $f[f(x)] \leq 1$ 的解集为 $\left[-1, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right] \cup \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right]$
D. 当 $x \in [-3, -2] \cup [2, 3]$ 时, 有 $f[f(x)] \leq f(x)$

二、多项选择题 (本题共 3 小题, 每小题 6 分, 共 18 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求, 全部选对得 6 分, 部分选对的得部分分, 有选错的得 0 分)

9. 设复数 z 在复平面内对应的点为 Z , 任意复数 z 都可以表示为三角形式 $r(\cos \theta + i \sin \theta)$, 其中 r 为复数 z 的模, θ 是以 x 轴的非负半轴为始边, 以 OZ 所在的射线为终边的角 (也被称为 z 的辐角). 利用复数的三角形式可以进行复数的指数运算, 法国数学家棣莫佛发现 $[r(\cos \theta + i \sin \theta)]^n = r^n (\cos n\theta + i \sin n\theta) (n \in \mathbb{N}^*)$, 我们称这个结论为棣莫佛定理. 根据以上信息, 若复数 z 满足 $z^5 = 32$, 则 z 可能的取值为 ()

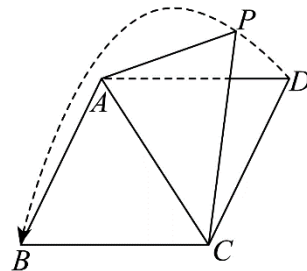
- A. $2\left(\cos\frac{\pi}{10}+i\sin\frac{\pi}{10}\right)$ B. $2\left(\cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5}\right)$
 C. $2\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$ D. $2\left(\cos\frac{6\pi}{5}+i\sin\frac{6\pi}{5}\right)$

10. 已知函数 $f(x) = -x^2 + 3ax + b$ ，下列说法正确的是 ()

- A. 若关于 x 的不等式 $f(x) < 0$ 的解集是 $\{x | x < -2 \text{ 或 } x > 8\}$ ，则 $a^{2a} = b$
 B. 若集合 $\{x | f(x) = 0\}$ 有且仅有两个子集，则 $a^2 - b^2$ 的最大值为 $\frac{4}{9}$
 C. 若 $f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{17}{9}$ ，则 $\frac{1}{a^2+1} + \frac{1}{b^2+1}$ 的最大值为 $\frac{\sqrt{2}+1}{2}$
 D. 若 $b = 4 - 6a$ ，且关于 x 的不等式 $f(x) > 0$ 的解集中有且仅有三个正整数，则实数 a 的取值范围是 $\left(\frac{7}{3}, \frac{8}{3}\right]$

11. 已知菱形 $ABCD$ 的边长为 2, $\angle ADC = 60^\circ$ ，将 $\triangle ACD$ 沿 AC 翻折，使点 D 与点 B 重合，如图示. 记点 P 为翻折过程中点 D 的位置 (不包含在点 B 处的位置)，则下列结论正确的是 ()

- A. 不存在点 P ，使得 $AB \perp PC$
 B. 无论点 P 在何位置，总有 $AC \perp$ 面 PBD
 C. 当三棱锥 $P-ABC$ 的体积最大时，直线 AB 与平面 PBC 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{10}}{5}$
 D. 当 $PB = 2$ 时， M 为 PB 上一点，则 $AM + CM$ 的最小值为 2



三、填空题 (本大题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分)

12. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1, a_{n+1} - \frac{a_n}{2} = \frac{1}{2^n}$ ，设 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，则

$S_n =$ _____.

13. 若函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 + mx + 1, & x \leq 0 \\ x + \frac{1}{x} + m, & x > 0 \end{cases}$ 的最小值为 $f(0)$ ，则实数 m 的取值范围为 _____.

14. 小王和爸爸玩卡片游戏，小王拿有 2 张标有 A 和 1 张标有 B 的卡片，爸爸有 3 张标有 B 的卡片，现两人各随机取一张交换，重复 n 次这样的操作，记小王和爸爸每人各有一张 A 卡片的概率记为 a_n ，则 $a_2 =$ _____， $a_n =$ _____.

四、解答题（本大题共 5 小题，共 77 分.解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤）

15.（本小题 13 分）

已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \begin{cases} a_n + 1, & n \text{ 为奇数} \\ 2a_n + 2, & n \text{ 为偶数} \end{cases}$

(1)记 $b_n = a_{2n}$, 写出 b_1, b_2 , 并证明数列 $\{b_n + 3\}$ 为等比数列;

(2)求 $\{a_n\}$ 的前 $2n$ 项和 S_{2n} .

16.（本小题 15 分）

记 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 已知 $\sqrt{3}a \sin C = c(\cos A + 1)$, $a = 5\sqrt{3}$, $\triangle ABC$ 外接圆的半径为 R .

(1)求 $\triangle ABC$ 外接圆的面积;

(2)圆 M 经过 $P(0, 4)$, 且与圆 $(x-1)^2 + (y-2)^2 = R^2$ 关于直线 $x - y - 1 = 0$ 对称, 圆 M 被直线 PQ 截得弦长为 8, 求直线 PQ 的方程.

17.（本小题 15 分）

已知函数 $f(x) = \frac{ax^2 + x - 1}{e^x}$, $a \in \mathbb{R}$.

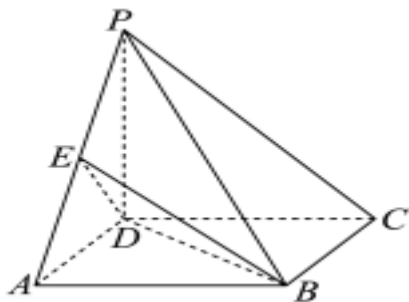
(1)当 $a = 0$ 时, 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线方程;

(2)求 $f(x)$ 的单调区间;

(3)当 $a > 0$ 时, 若对于任意 $x \in [1, 3]$, 不等式 $\frac{1}{2} \leq f(x) \leq 1 + \frac{1}{e^2}$ 成立, 求 a 的取值范围.

18.（本小题 17 分）

如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 是正方形, $PD \perp$ 面 $ABCD$, $PD = AB = 4$, E 为棱 PA 上的动点.



(1)若 E 为棱 PA 中点, 证明: $PC \parallel$ 面 EBD ;

(2)在棱 PA 上是否存在点 E ，使得二面角 $B-DE-A$ 的余弦值为 $\frac{2}{3}$ ？若存在，求出 $\frac{PE}{PA}$ 的值；

若不存在，请说明理由；

(3) E, F, Q 分别在棱 PA, PC, PD 上， $EQ = FQ = 1$ ，求三棱锥 $F-EDP$ 的体积的最大值.

19. (本小题 17 分)

已知椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ ，两焦点和短轴一个端点构成边长为 2 的正三角形.

(1)求椭圆方程；

(2)设直线 $l_1: y = kx + m$ 与椭圆 E 相切于第一象限内的点 P ，不过原点 O 且平行于 l_1 的直线 l_2 与

椭圆 E 交于不同的两点 A, B ，点 A 关于原点 O 的对称点为 C . 记直线 OP 的斜率为 k_1 ，直

线 BC 的斜率为 k_2 .

①求 $\frac{k_1}{k_2}$ 的值；

②若 O, P, B, C 四点围成的四边形为平行四边形，求 $\frac{S_{\triangle OAB}}{S_{\triangle PAB}}$ 的值.

2024-2025 学年河南省高三上学期普通高中联合教学质量检测数学

模拟试卷

注意事项:

1. 答题前, 先将自己的姓名、准考证号填写在试卷和答题卡上, 并将准考证号条形码贴在答题卡上的指定位置.
2. 选择题的作答: 每小题选出答案后, 用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑. 写在试卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效.
3. 非选择题的作答: 用黑色签字笔直接答在答题卡上对应的答题区域内. 写在试卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效.
4. 考试结束后, 请将本试卷和答题卡一并上交.

一、单项选择题 (本大题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分. 在每小题所给的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的)

1. 设集合 $A = \{0, a\}$, $B = \{1, a-2, 3a-4\}$, 若 $A \cap B = A$, 则 $a =$ ()

- A. 2 B. 1 C. $\frac{4}{3}$ D. -2

【正确答案】A

【详解】由 $A \cap B = A$, 得 $A \subseteq B$.

若 $a = 1$, 则 $A = \{0, 1\}$, $B = \{1, -1, -1\}$, 不符合题意;

又 $a \neq a-2$, 所以 $\begin{cases} a = 3a-4 \\ 0 = a-2 \end{cases}$, 解得 $a = 2$.

故选: A

2. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $a_1 = 3$, $\frac{S_n}{a_n} = \frac{n+1}{2}$, 则 $\sum_{i=1}^{99} \frac{1}{S_i} =$ ()

- A. $\frac{33}{50}$ B. $\frac{99}{100}$ C. $\frac{297}{200}$ D. $\frac{200}{303}$

【正确答案】A

【详解】由等差数列 $\{a_n\}$, 可得前 n 项和为 $S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} = \frac{n(3 + a_n)}{2}$,

又因为 $\frac{S_n}{a_n} = \frac{n+1}{2}$, 所以 $S_n = \frac{a_n(n+1)}{2} = \frac{n(3+a_n)}{2}$, 所以 $a_n = 3n$,

即得 $S_n = \frac{3n(n+1)}{2}$, 所以 $\frac{1}{S_n} = \frac{2}{3n(n+1)} = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$,

则 $\sum_{i=1}^{99} \frac{1}{S_i} = \frac{2}{3} \left[\left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{99} - \frac{1}{100} \right) \right] = \frac{2}{3} \left(1 - \frac{1}{100} \right) = \frac{33}{50}$.

故选: A.

3. 在单位圆中, 已知角 α 是第二象限角, 它的终边与单位圆交于点 $P\left(-\frac{4}{5}, y\right)$, 则

$\sin(\pi - \alpha) = (\quad)$

- A. $-\frac{4}{5}$ B. $-\frac{3}{5}$ C. $\frac{3}{5}$ D. $\frac{4}{5}$

【正确答案】C

【详解】因为角 α 的终边与单位圆交于点 $P\left(-\frac{4}{5}, y\right)$, 所以 $\cos \alpha = -\frac{4}{5}$,

因为角 α 是第二象限角, 所以 $\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \left(-\frac{4}{5}\right)^2} = \frac{3}{5}$,

所以 $\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha = \frac{3}{5}$,

故选: C.

4. 在 $(x+1)(x-2)(x+3)(x-4)(x+5)(x-a)$ 展开式中, 含 x^5 的项的系数是 6, 则 $a = (\quad)$

- A. -6 B. -3 C. 3 D. 6

【正确答案】B

【详解】由题可得含 x^5 的项为 $x^5 - 2x^5 + 3x^5 - 4x^5 + 5x^5 - ax^5 = (3-a)x^5$,

所以 $3-a=6 \Rightarrow a=-3$.

故选: B.

5. 已知平面向量 $\vec{a} = (1, 2)$, $\vec{b} = (m, -1)$, 则“ $m < 2$ ”是“ $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为钝角”的 $(\quad)$

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

【正确答案】B

【详解】若 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为钝角, 则 $\vec{a} \cdot \vec{b} < 0$ 且 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 不共线,

可得 $\begin{cases} m-2 < 0 \\ 2m \neq -1 \end{cases}$, 解得 $m < 2$ 且 $m \neq -\frac{1}{2}$,

因为 $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, 2\right)$ 是 $(-\infty, 2)$ 的真子集,

所以“ $m < 2$ ”是“ $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为钝角”的必要不充分条件.

故选: B.

6. 已知过抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点 F 作直线交抛物线于 A, B 两点, 若 $|AF| = 3|BF|$,

AB 的中点到 y 轴的距离为 $\frac{5}{2}$, 则 p 的值为 ()

A. 2

B. 3

C. 4

D. 5

【正确答案】B

【详解】抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点 $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$, 准线 $l: x = -\frac{p}{2}$, 准线交 x 轴于点 K ,

由对称性, 不妨令点 A 在第一象限, 过 A, B 分别作 $AD \perp l, BE \perp l$, 垂足分别为 D, E ,

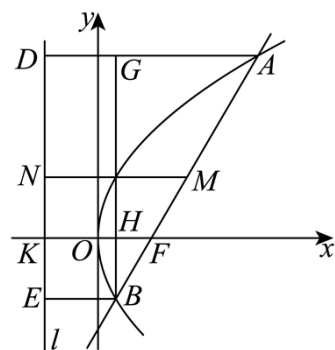
过 B 作 $BG \perp AD$ 于 G , 交 FK 于 H , 令 $|BE| = |BF| = n$, $|AD| = |AF| = 3n$, $|FK| = p$,

$|AG| = 2n$, $|FH| = p - n$, 由 $FH \parallel AG$, 得 $\frac{|FH|}{|AG|} = \frac{|BF|}{|AB|}$, 即 $\frac{p-n}{2n} = \frac{n}{4n}$, 则 $p = \frac{3n}{2}$,

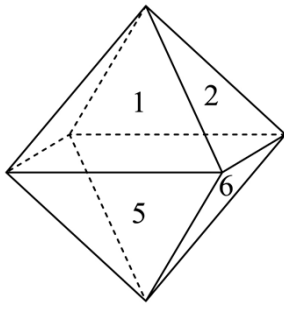
线段 AB 中点 M , 过 M 作 $MN \perp l$ 于 N , 则 $|MN| = \frac{|AD| + |BE|}{2} = 2n = \frac{4p}{3}$,

由 AB 的中点到 y 轴的距离为 $\frac{5}{2}$, 得 $|MN| = \frac{p}{2} + \frac{5}{2}$, 因此 $\frac{4p}{3} = \frac{p}{2} + \frac{5}{2}$, 所以 $p = 3$.

故选: B



7. 如图, 一个正八面体的八个面分别标以数字 1 到 8, 任意抛掷一次这个正八面体, 观察它与地面接触的面上的数字, 得到样本空间为 $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, 记事件 A = “得到的点数为偶数”, 记事件 B = “得到的点数不大于 4”, 记事件 C = “得到的点数为质数”, 则下列说法正确的是 ()



A. 事件 B 与 C 互斥, A 与 C 相互对立

B. $P(A \cup B) = \frac{5}{8}$

C. $P(ABC) = P(A)P(B)P(C)$ 但不满足 A, B, C 两两独立

D. $P(ABC) = P(A)P(B)P(C)$ 且 A, B, C 两两相互独立

【正确答案】C

【详解】因为事件 A 所含的样本点为: $\{2, 4, 6, 8\}$, 事件 B 所含的样本点为: $\{1, 2, 3, 4\}$, 事件 C 所含的样本点为: $\{2, 3, 5, 7\}$

因为事件 B, C 都包含样本点 $2, 3$, 所以 B, C 不互斥, 故 A 错误;

因为 $A \cup B$ 所含的样本点为: $\{1, 2, 3, 4, 6, 8\}$, 所以 $P(A \cup B) = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$, 故 B 错误;

因为 ABC 所含的样本点为: $\{2\}$, 所以 $P(ABC) = \frac{1}{8}$, 又 $P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{2}$, 所以

$$P(ABC) = P(A)P(B)P(C).$$

又事件 AC 所含的样本点为: $\{2\}$, 所以 $P(AC) = \frac{1}{8}$, 又 $P(A)P(C) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$,

所以 $P(AC) \neq P(A)P(C)$, 所以事件 A, C 不独立, 即 A, B, C 两两独立错误, 所以 C 正确,

D 错误.

故选: C

8. 若 $g(x) = \max\{|2x-3|, 3-2x^2\}$, $h(x) = \max\{|2x+3|, 3-2x^2\}$, $f(x) = \min\{g(x), h(x)\}$,

其中 $\max\{x, y, z\}$ 表示 x, y, z 中的最大者, $\min\{x, y, z\}$ 表示 x, y, z 中的最小者, 下列

说法不正确的是 ()

A. 函数 $f(x)$ 为偶函数

B. 当 $x \in [1, 3]$ 时, 有 $f(x) \leq 8$

C. 不等式 $f[f(x)] \leq 1$ 的解集为 $\left[-1, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right] \cup \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right]$

D. 当 $x \in [-3, -2] \cup [2, 3]$ 时, 有 $f[f(x)] \leq f(x)$

【正确答案】C

【详解】若 $|2x-3| = 3-2x^2$, 解得 $x=0$ 或 $x=1$,

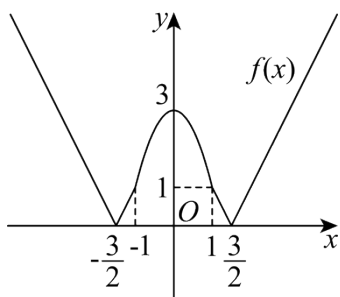
结合二次函数和一次函数知 $g(x) = \begin{cases} |2x-3|, x < 0 \text{ 或 } x > 1 \\ 3-2x^2, 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$,

若 $|2x+3| = 3-2x^2$, 解得 $x=0$ 或 $x=-1$,

结合二次函数和一次函数知 $h(x) = \begin{cases} |2x+3|, x < -1 \text{ 或 } x > 0 \\ 3-2x^2, -1 \leq x \leq 0 \end{cases}$,

所以 $f(x) = \min\{g(x), h(x)\} = \begin{cases} |2x+3|, x < -1 \\ 3-2x^2, -1 \leq x \leq 1 \\ |2x-3|, x > 1 \end{cases}$

画出 $f(x)$ 的图象, 如图:



结合图象及 $f(-x) = f(x)$ 知 $f(x)$ 为偶函数, 故选项 A 正确;

当 $x \in [1, 3]$ 时, $x^2 - 4x + 3 \leq 0$, 即 $3x^2 - 12x + 9 \leq 0$, 所以 $4x^2 - 12x + 9 \leq x^2$,

所以 $|2x-3| < x$, 所以 $f(x) \leq x$ 成立, 故选项 B 正确;

对于 C, 令 $f(x) = t$, 则 $f(t) \leq 1$, 当 $t < -1$ 时, $|2t+3| \leq 1$, 解得 $-2 \leq t < -1$,

当 $-1 \leq t \leq 1$ 时, $3-2t^2 \leq 1$, 解得 $t \leq -1$ 或 $t \geq 1$, 又 $-1 \leq t \leq 1$, 所以 $t = \pm 1$,

当 $t > 1$ 时, $|2t-3| \leq 1$, 解得 $1 < t \leq 2$, 综上 $1 \leq |t| \leq 2$, 故 $1 \leq |f(x)| \leq 2$,

当 $x < -1$ 时, $1 \leq |2x+3| \leq 2$, 解得 $-2.5 \leq x \leq -2$,

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。

如要下载或阅读全文，请访问：

<https://d.book118.com/447043201044010005>