

四川省遂宁市 2024 届高三五校联谊期中考试成绩数学试题

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号、考场号和座位号填写在试题卷和答题卡上。用 2B 铅笔将试卷类型 (B) 填涂在答题卡相应位置上。将条形码粘贴在答题卡右上角“条形码粘贴处”。
2. 作答选择题时，选出每小题答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目选项的答案信息点涂黑；如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案。答案不能答在试题卷上。
3. 非选择题必须用黑色字迹的钢笔或签字笔作答，答案必须写在答题卡各题目指定区域内相应位置上；如需改动，先划掉原来的答案，然后再写上新答案；不准使用铅笔和涂改液。不按以上要求作答无效。
4. 考生必须保证答题卡的整洁。考试结束后，请将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 2019 年 10 月 1 日，为了庆祝中华人民共和国成立 70 周年，小明、小红、小金三人以国庆为主题各自独立完成一幅十字绣赠送给当地的村委会，这三幅十字绣分别命名为“鸿福齐天”、“国富民强”、“兴国之路”，为了弄清“国富民强”这一作品是谁制作的，村支书对三人进行了问话，得到回复如下：

小明说：“鸿福齐天”是我制作的；

小红说：“国富民强”不是小明制作的，就是我制作的；

小金说：“兴国之路”不是我制作的，

若三人的说法有且仅有一人是正确的，则“鸿福齐天”的制作者是（ ）

- A. 小明 B. 小红 C. 小金 D. 小金或小明

2. 甲乙丙丁四人中，甲说：我年纪最大，乙说：我年纪最大，丙说：乙年纪最大，丁说：我不是年纪最大的，若这四人中只有一个人说的是真话，则年纪最大的是（ ）

- A. 甲 B. 乙 C. 丙 D. 丁

3. 已知函数 $f(x) = \cos x$ 与 $g(x) = \sin(2x + \varphi)$ ($0, \varphi < \pi$) 的图象有一个横坐标为 $\frac{\pi}{3}$ 的交点，若函数 $g(x)$ 的图象的纵坐标不变，横坐标变为原来的 $\frac{1}{\omega}$ 倍后，得到的函数在 $[0, 2\pi]$ 有且仅有 5 个零点，则 ω 的取值范围是（ ）

- A. $\left[\frac{29}{24}, \frac{35}{24}\right)$ B. $\left[\frac{29}{24}, \frac{35}{24}\right]$
C. $\left(\frac{29}{24}, \frac{35}{24}\right)$ D. $\left(\frac{29}{24}, \frac{35}{24}\right]$

4. 已知 i 是虚数单位，若 $z = 1 + ai$ ， $z\bar{z} = 2$ ，则实数 $a =$ （ ）

- A. $-\sqrt{2}$ 或 $\sqrt{2}$ B. -1 或 1 C. 1 D. $\sqrt{2}$

5. 某三棱锥的三视图如图所示，则该三棱锥的体积为（ ）

| | | |
|---|---|---|
| 8 | 1 | 6 |
| 3 | 5 | 7 |
| 4 | 9 | 2 |

- A. 55 B. 500 C. 505 D. 5050

12. 设 m, n 是空间两条不同的直线, α, β 是空间两个不同的平面, 给出下列四个命题:

- ①若 $m // \alpha, n // \beta, \alpha // \beta$, 则 $m // n$;
 ②若 $\alpha \perp \beta, m \perp \beta, m \not\subset \alpha$, 则 $m // \alpha$;
 ③若 $m \perp n, m \perp \alpha, \alpha // \beta$, 则 $n // \beta$;
 ④若 $\alpha \perp \beta, \alpha \cap \beta = l, m // \alpha, m \perp l$, 则 $m \perp \beta$. 其中正确的是 ()

- A. ①② B. ②③ C. ②④ D. ③④

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 若双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的顶点到渐近线的距离为 $\frac{b}{2}$, 则 $\frac{b^2 + 1}{\sqrt{3}a}$ 的最小值_____.

14. 设函数 $f(x) = -3x^2 + 6x$ 在区间 $[a, b]$ 上的值域是 $[-9, 3]$, 则 $b - a$ 的取值范围是_____.

15. 不等式 $\sqrt{x-1} < 1$ 的解集为_____.

16. 已知在 $\triangle ABC$ 中, $\vec{AB} = (2\sin 32^\circ, 2\cos 32^\circ), \vec{BC} = (\cos 77^\circ, -\cos 13^\circ)$, 则 $\vec{AB} \cdot \vec{BC} =$ _____, $\triangle ABC$ 的面积为_____.

三、解答题: 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12 分) 随着时代的发展, A 城市的竞争力、影响力日益卓著, 这座创新引领型城市有望踏上向“全球城市”发起“冲击”的新征程. A 城市的活力与包容无不吸引着无数怀揣梦想的年轻人前来发展, 目前 A 城市的常住人口大约为 1300 万. 近日, 某报社记者作了有关“你来 A 城市发展的理由”的调查问卷, 参与调查的对象年龄层次在 25~44 岁之间. 收集到的相关数据如下:

| 来 A 城市发展的理由 | | 人数 | 合计 |
|-------------|---------------|-----|-----|
| 自然环境 | 1. 森林城市, 空气清新 | 200 | 300 |
| | 2. 降水充足, 气候怡人 | 100 | |
| 人文环境 | 3. 城市服务到位 | 150 | 700 |

| | | | |
|----|---------|------|------|
| | 4.创业氛围好 | 300 | |
| | 5.开放且包容 | 250 | |
| 合计 | | 1000 | 1000 |

(1) 根据以上数据, 预测 400 万 25-44 岁年龄的人中, 选择“创业氛围好”来 A 城市发展的有多少人;

(2) 从所抽取选择“自然环境”作为来 A 城市发展的理由的 300 人中, 利用分层抽样的方法抽取 6 人, 从这 6 人中再选取 3 人发放纪念品. 求选出的 3 人中至少有 2 人选择“森林城市, 空气清新”的概率;

(3) 在选择“自然环境”作为来 A 城市发展的理由的 300 人中有 100 名男性; 在选择“人文环境”作为来 A 城市发展的理由的 700 人中有 400 名男性; 请填写下面 2×2 列联表, 并判断是否有 99.9% 的把握认为性别与“自然环境”或“人文环境”的选择有关?

| | | | |
|----|------|------|----|
| | 自然环境 | 人文环境 | 合计 |
| 男 | | | |
| 女 | | | |
| 合计 | | | |

附: $K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$, $n = a+b+c+d$.

| | | | |
|-----------------|-------|-------|--------|
| $P(K^2 \geq k)$ | 0.050 | 0.010 | 0.001 |
| k | 3.841 | 6.635 | 10.828 |

18. (12 分) 在直角坐标系 xOy 中, 曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases} x = -1 + 2 \cos \varphi \\ y = 2 \sin \varphi \end{cases}$ (φ 为参数). 以坐标原点为极点, x 轴正半轴为极轴, 建立极坐标系. 已知点 P 的直角坐标为 $(-2, 0)$, 过 P 的直线 l 与曲线 C 相交于 M, N 两点.

(1) 若 l 的斜率为 2, 求 l 的极坐标方程和曲线 C 的普通方程;

(2) 求 $\overline{PM} \cdot \overline{PN}$ 的值.

19. (12 分) 已知矩阵 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a & 0 \end{bmatrix}$ 的逆矩阵 $A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ b & 0 \end{bmatrix}$. 若曲线 $C_1: \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 在矩阵 A 对应的变换作用下得到

另一曲线 C_2 , 求曲线 C_2 的方程.

20. (12分) 已知函数 $f(x) = \sin \omega x + \cos\left(\omega x + \frac{\pi}{6}\right)$, 其中 $x \in \mathbf{R}$, $\omega > 0$.

(1) 当 $\omega = 1$ 时, 求 $f\left(\frac{\pi}{3}\right)$ 的值;

(2) 当 $f(x)$ 的最小正周期为 π 时, 求 $f(x)$ 在 $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ 上的值域.

21. (12分) 追求人类与生存环境的和谐发展是中国特色社会主义生态文明的价值取向. 为了改善空气质量, 某城市环保局随机抽取了一年内 100 天的空气质量指数 (AQI) 的检测数据, 结果统计如下:

| | | | | | | |
|------|-----------|-------------|--------------|--------------|--------------|--------------|
| AQI | $[0, 50]$ | $(50, 100]$ | $(100, 150]$ | $(150, 200]$ | $(200, 250]$ | $(250, 300]$ |
| 空气质量 | 优 | 良 | 轻度污染 | 中度污染 | 重度污染 | 严重污染 |
| 天数 | 6 | 14 | 18 | 27 | 25 | 10 |

(1) 从空气质量指数属于 $[0, 50]$, $(50, 100]$ 的天数中任取 3 天, 求这 3 天中空气质量至少有 2 天为优的概率;

(2) 已知某企业每天的经济损失 Y (单位: 元) 与空气质量指数 x 的关系式为 $y = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq 100, \\ 220, & 100 < x \leq 250, \\ 1480, & 250 < x \leq 300, \end{cases}$ 试估计该

企业一个月 (按 30 天计算) 的经济损失的数学期望.

22. (10分) 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 所对的边分别是 a, b, c , $b \sin A = 3c \sin B$, $a = 3$, $\cos B = \frac{2}{3}$.

(I) 求 b 的值;

(II) 求 $\cos\left(2B - \frac{\pi}{6}\right)$ 的值.

参考答案

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

1、B

【解析】

将三个人制作的所有情况列举出来，再一一论证。

【详解】

依题意，三个人制作的所有情况如下所示：

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|------|----|----|----|----|----|----|
| 鸿福齐天 | 小明 | 小明 | 小红 | 小红 | 小金 | 小金 |
| 国富民强 | 小红 | 小金 | 小金 | 小明 | 小红 | 小明 |
| 兴国之路 | 小金 | 小红 | 小明 | 小金 | 小明 | 小红 |

若小明的说法正确，则均不满足；若小红的说法正确，则 4 满足；若小金的说法正确，则 3 满足。故“鸿福齐天”的制作者是小红，

故选：B.

【点睛】

本题考查推理与证明，还考查推理论证能力以及分类讨论思想，属于基础题。

2、C

【解析】

分别假设甲乙丙丁说的是真话，结合其他人的说法，看是否只有一个说的是真话，即可求得年纪最大者，即可求得答案。

【详解】

①假设甲说的是真话，则年纪最大的是甲，那么乙说谎，丙也说谎，而丁说的是真话，而已知只有一个人说的是真话，故甲说的不是真话，年纪最大的不是甲；

②假设乙说的是真话，则年纪最大的是乙，那么甲说谎，丙说真话，丁也说真话，而已知只有一个人说的是真话，故乙说谎，年纪最大的也不是乙；

③假设丙说的是真话，则年纪最大的是乙，所以乙说真话，甲说谎，丁说的是真话，而已知只有一个人说的是真话，故丙在说谎，年纪最大的也不是乙；

④假设丁说的是真话，则年纪最大的不是丁，而已知只有一个人说的是真话，那么甲也说谎，说明甲也不是年纪最大的，同时乙也说谎，说明乙也不是年纪最大的，年纪最大的只有一人，所以只有丙才是年纪最大的，故假设成立，年纪最大的是丙。

综上所述，年纪最大的是丙

故选：C.

【点睛】

本题考查合情推理，解题时可从一种情形出发，推理出矛盾的结论，说明这种情形不会发生，考查了分析能力和推理能力，属于中档题.

3、A

【解析】

根据题意， $\cos \frac{\pi}{3} = \sin \left(\frac{2\pi}{3} + \varphi \right)$ ，求出 $\varphi = \frac{\pi}{6}$ ，所以 $g(x) = \sin \left(2x + \frac{\pi}{6} \right)$ ，根据三角函数图像平移伸缩，即可求出 ω 的取值范围.

【详解】

已知 $f(x) = \cos x$ 与 $g(x) = \sin(2x + \varphi)$ ($0, \varphi < \pi$) 的图象有一个横坐标为 $\frac{\pi}{3}$ 的交点，

$$\text{则 } \cos \frac{\pi}{3} = \sin \left(\frac{2\pi}{3} + \varphi \right),$$

$$\text{Q } \frac{2\pi}{3} + \varphi \in \left[\frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{3} \right],$$

$$\therefore \frac{2\pi}{3} + \varphi = \frac{5\pi}{6}, \therefore \varphi = \frac{\pi}{6},$$

$$\therefore g(x) = \sin \left(2x + \frac{\pi}{6} \right),$$

若函数 $g(x)$ 图象的纵坐标不变，横坐标变为原来的 $\frac{1}{\omega}$ 倍，则 $y = \sin \left(2\omega x + \frac{\pi}{6} \right)$ ，

$$\text{所以当 } x \in [0, 2\pi] \text{ 时， } 2\omega x + \frac{\pi}{6} \in \left[\frac{\pi}{6}, 4\pi\omega + \frac{\pi}{6} \right],$$

Q $f(x)$ 在 $[0, 2\pi]$ 有且仅有 5 个零点，

$$\therefore 5\pi, 4\pi\omega + \frac{\pi}{6} < 6\pi,$$

$$\therefore \frac{29}{24} \omega < \frac{35}{24}.$$

故选：A.

【点睛】

本题考查三角函数图象的性质、三角函数的平移伸缩以及零点个数问题，考查转化思想和计算能力.

4、B

【解析】

由题意得， $z\bar{z} = (1+ai)(1-ai) = 1+a^2$ ，然后求解即可

【详解】

$\because z = 1 + ai, \therefore z\bar{z} = (1 + ai)(1 - ai) = 1 + a^2$. 又 $\because z\bar{z} = 2, \therefore 1 + a^2 = 2, \therefore a = \pm 1$.

【点睛】

本题考查复数的运算，属于基础题

5、B

【解析】

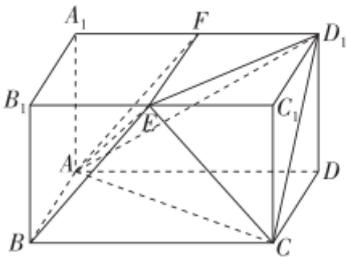
还原几何体的直观图，可将此三棱锥 $A - CD_1E$ 放入长方体中，利用体积分割求解即可。

【详解】

如图，三棱锥的直观图为 $A - CD_1E$ ，体积

$$\begin{aligned} V_{A-CD_1E} &= V_{\text{长方体}AC_1} - V_{BB_1E-AA_1F} - V_{E-ABC} - V_{E-CC_1D_1} - V_{E-AD_1F} - V_{D_1-ADC} \\ &= 2 \times 4 \times 2 - \frac{1}{2} \times 2 \times 2 \times 2 - \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \times 4 \times 2 \times 2 - \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \times 2 \times 2 \times 2 = 4. \end{aligned}$$

故选:B.



【点睛】

本题主要考查了锥体的体积的求解,利用的体积分割的方法,考查了空间想象力及计算能力,属于中档题.

6、D

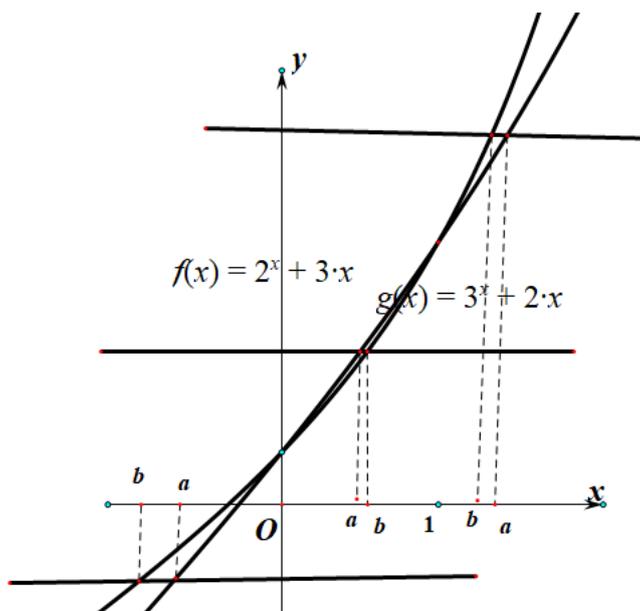
【解析】

a, b 可看成是 $y = t$ 与 $f(x) = 2^x + 3x$ 和 $g(x) = 3^x + 2x$ 交点的横坐标，画出图象，数形结合处理。

【详解】

令 $f(x) = 2^x + 3x, g(x) = 3^x + 2x,$

作出图象如图，



由 $f(x) = 2^x + 3x$, $g(x) = 3^x + 2x$ 的图象可知,

$f(0) = g(0) = 1$, $f(1) = g(1) = 5$, ②正确;

$x \in (-\infty, 0)$, $f(x) < g(x)$, 有 $b < a < 0$, ①正确;

$x \in (0, 1)$, $f(x) > g(x)$, 有 $0 < a < b < 1$, ③正确;

$x \in (1, +\infty)$, $f(x) < g(x)$, 有 $1 < b < a$, ④正确.

故选: D.

【点睛】

本题考查利用函数图象比较大小, 考查学生数形结合的思想, 是一道中档题.

7、A

【解析】

根据指数型函数所过的定点, 确定 $k=1, b=2$, 再根据条件 $m+n=2$, 利用基本不等式求 $\frac{4}{m} + \frac{1}{n}$ 的最小值.

【详解】

Q 定点为 $(1, 2)$,

$\therefore k=1, b=2$,

$\therefore m+n=2$

$\therefore \frac{4}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{2} \left(\frac{4}{m} + \frac{1}{n} \right) (m+n) = \frac{1}{2} \left(5 + \frac{m}{n} + \frac{4n}{m} \right) \dots \frac{9}{2}$

当且仅当 $\frac{m}{n} = \frac{4n}{m}$ 时等号成立,

即 $m = \frac{4}{3}, n = \frac{2}{3}$ 时取得最小值 $\frac{9}{2}$.

故选: A

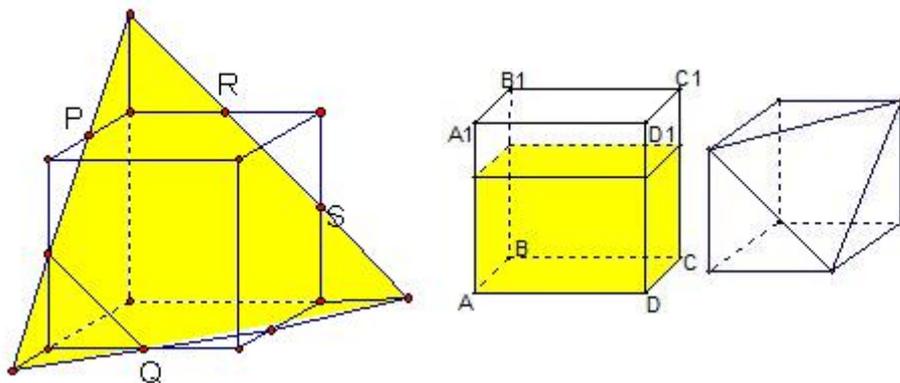
【点睛】

本题考查指数型函数的性质, 以及基本不等式求最值, 意在考查转化与变形, 基本计算能力, 属于基础题型.

8、C

【解析】

试题分析: 画出截面图形如图



显然 A 正三角形, B 正方形; D 正六边形, 可以画出五边形但不是正五边形; 故选 C.

考点: 平面的基本性质及推论.

9、D

【解析】

分别解出集合 A、B, 然后求并集.

【详解】

解: $A = \{x | |x| < 1\} = \{x | -1 < x < 1\}$, $B = \{x | 2^x < 1\} = \{x | x < 0\}$

$A \cup B = (-\infty, 1)$

故选: D

【点睛】

考查集合的并集运算, 基础题.

10、D

【解析】

循环依次为 $s = 1, t = 1, i = 2; s = 3, t = 1 + \frac{1}{3}, i = 3; s = 6, t = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}, i = 4; L$

直至 $t = 1 + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + L + \frac{1}{1+2+L+2015}, i = 2016$; 结束循环, 输出

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/447051103023010003>