北京市第一六一中学 2023—2024 学年第一学期期中阶段练习

高二数学

2023.11

班级____________姓名____________学号____________

本试卷共 3 页，共 150 分.考试时长 120 分钟.考生务必将答案写在答题纸上，在试卷上作答无效.

一、选择题：本大题共 10 道小题，每小题 4 分，共 40 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目的要求.把正确答案涂写在答题卡上相应的位置.

1. 已知 $A(-1,-3),B(3,5)$，则直线 AB 的斜率为（　　）

A. 2　　B. 1　　C. $\frac{1}{2}$　　D. 不存在

2. 圆 $x^2+y^2-2x+4y+3=0$ 的圆心为（　　）.

A. $(1,-2)$　　B. $(-1,2)$　　C. $(2,-4)$　　D. $(-2,4)$

3. 一个椭圆的两个焦点分别是 $F_1\left(-3,0\right)$，$F_2\left(3,0\right)$，椭圆上的点 P 到两焦点的距离之和等于 8，则该椭圆的标准方程为（　　）

A. $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{28}=1$　　B. $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{7}=1$　　C. $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$　　D. $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$

4. 任意的 $k\in\mathbf{R}$，直线 $kx-y+1=3k$ 恒过定点（　　）

A. $\left(0,0\right)$　　B. $\left(0,1\right)$　　C. $\left(3,1\right)$　　D. $\left(2,1\right)$

5. 已知圆 $C_1:x^2+y^2=1$ 与圆 $C_2:x^2+y^2-8x+7=0$，则圆 C_1 与圆 C_2 的位置关系是（　　）

A. 相离　　B. 相交　　C. 内切　　D. 外切

6. 过点 $P\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 的直线 l 与圆 $x^2+y^2=\frac{1}{4}$ 有公共点，则直线 l 的倾斜角取值范围是（　　）

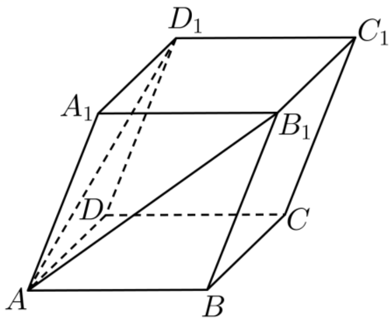
A. $\left[\frac{\pi}{2},\frac{5\pi}{6}\right]$　　B. $\left[\frac{2\pi}{3},\pi\right)$　　C. $\left[\frac{\pi}{2},\frac{2\pi}{3}\right]$　　D. $\left[\frac{5\pi}{6},\pi\right)$

7. “$a=-1$”是“直线 $l_1:ax+4y-3=0$ 与直线 $l_2:x+\left(a-3\right)y+2=0$ 平行的（　　）

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

8. 如图，在平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AA_1=AD=AB=2$，$\angle BAD=\frac{\pi}{2}$，$\angle BAA_1=\angle A_1AD=\frac{\pi}{3}$，则 $\overrightarrow{AB_1}\cdot\overrightarrow{AD_1}=$（　　）



A. 12　　B. 8　　C. 6　　D. 4

9. 数学家欧拉在 1765 年提出定理：三角形的外心、重心、垂心依次位于同一直线上，且重心到外心的距离是重心到垂心距离的一半.这条直线被后人称为三角形的欧拉线，已知△ABC的顶点$A(2,0)$，$B(1,2)$，且$AC=BC$，则△ABC的欧拉线的方程为（　　）

A. $x-2y-4=0$　　B. $2x+y-4=0$

C. $4x+2y+1=0$　　D. $2x-4y+1=0$

10. 曲线$C:x^3+y^3=1$.给出下列结论:

①曲线C关于原点对称;

②曲线C上任意一点到原点的距离不小于 1;

③曲线C只经过2个整点(即横、纵坐标均为整数的点).

其中,所有正确结论的序号是

A. ①②　　B. ②　　C. ②③　　D. ③

二、填空题：本大题共 5 小题，共 25 分.把答案填在答题纸中相应的横线上.

11. 已知空间$\vec{a}=(2,3,1)$，$\vec{b}=(-4,2,x)$，$\vec{a}\perp\vec{b}$，则$|\vec{b}|=$_____.

12. 已知过点$(0,2)$的直线l的方向向量为$(1,6)$，点$A(a,b)$在直线l上，则满足条件的一组a,b的值依次为__________.

13. 在正方体$ABCD-A'B'C'D'$中，E是$C'D'$的中点，则异面直线DE与AC所成角的余弦值为______.

14. 将一张坐标纸对折，如果点$(0,m)$与点$(m-2,2)(m\neq 2)$重合，则点$(-4,1)$与点______重合.

15. 给定两个不共线的空间向量$\vec{a}$与$\vec{b}$，定义叉乘运算：$\vec{a}\times\vec{b}$.规定：

（i）$\vec{a}\times\vec{b}$为同时与$\vec{a}$，$\vec{b}$垂直的向量；

（ii）$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{a}\times\vec{b}$三个向量构成右手系（如图 1）；

（iii）$|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\langle\vec{a},\vec{b}\rangle$.

如图 2，在长方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，$AB=AD=2$，$AA_1=4$.给出下列四个结论：

① $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AA_1}$；

② $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AD}\times\overrightarrow{AB}$；

③ $\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)\times\overrightarrow{AA_1}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{AD}\times\overrightarrow{AA_1}$；

④ $V_{ABCD-A_1B_1C_1D_1}=\left(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}\right)\cdot\overrightarrow{CC_1}$.其中，正确结论的序号是____________.

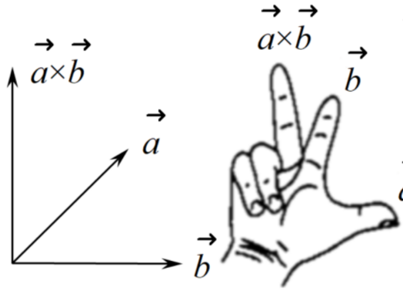


图1

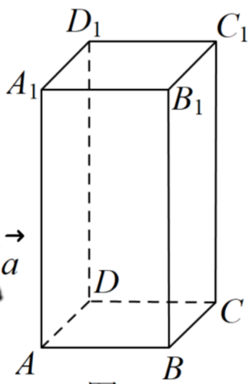


图2

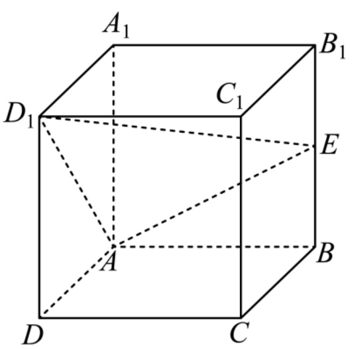
三、解答题：本大题共 6 题，共 85 分.解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程，并把答案写在答题纸中相应位置上.

16. 在平面直角坐标系中，已知 $A(-3,9),B(2,2),C(5,3)$，线段 AC 的中点 M;

（1）求过 M 点和直线 BC 平行的直线方程;

（2）求 BC 边的高线所在直线方程.

17. 如图，在边长为 2 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E 为线段 BB_1 的中点.



（1）求证：BC_1// 平面 AED_1；

（2）求点 A_1 到平面 AED_1 的距离;

（3）直线 AA_1 与平面 AED_1 所成角的正弦值.

18. 已知圆 C 的圆心在直线 $2x-y=0$ 上，且与 x 轴相切于点 $(1,0)$.

（1）求圆 C 的方程;

（2）若圆 C 直线 $l:x-y+m=0$ 交于 A，B 两点，____，求 m 的值.

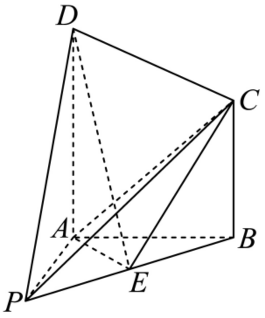
从下列三个条件中任选一个补充在上面问题中并作答：

条件①：圆C被直线l分成两段圆弧，其弧长比为$2:1$；

条件②：$|AB| = 2\sqrt{2}$；

条件③：$\angle ACB = 90°$.

19. 如图，四棱锥$P-ABCD$中，$AD\perp$平面ABP，$BC \parallel AD, \angle PAB = 90°, PA = AB = 2, AD = 3, BC = m$，$E$是$PB$的中点.



（1）证明：$AE\perp$平面PBC；

（2）若二面角$C-AE-D$的余弦值是$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，求m的值；

（3）若$m=2$，在线段AD上是否存在一点F，使得$PF\perp CE$. 若存在，确定F点的位置；若不存在，说明理由.

20. 已知圆$C:(x-a)^2+y^2=1$与直线$y=-x-1$交于M、N两点，点P为线段MN的中点，O为坐标原点，直线OP的斜率为$-\dfrac{1}{3}$.

（1）求a的值及$\triangle MON$的面积；

（2）若圆C与x轴交于A,B两点，点Q是圆C上异于A,B的任意一点，直线QA、QB分别交$l:x=-4$于R,S两点.当点Q变化时，以RS为直径的圆是否过圆C内的一定点，若过定点，请求出定点；若不过定点，请说明理由.

21. 已知$S=\{1,2,\cdots,n\}$，$A\subseteq S$，$T=\{t_1,t_2\}\subseteq S$，记$A_i=\{x|x=a+t_i, a\in A\}(i=1,2)$，用$|X|$表示有限集合$X$的元素个数.

（1）若$n=4$，$A_1\cap A_2=\varnothing$，分别指出$A=\{1,2,3\}$和$A=\{1,2,4\}$时，集合T的情况（直接写出结论）；

（2）若$n=6$，$A_1\cap A_2=\varnothing$，求$|A_1\cup A_2|$的最大值；

（3）若$n=7$，$|A|=4$，则对于任意的A，是否都存在T，使得$A_1\cap A_2=\varnothing$？说明理由.

北京市第一六一中学 2023—2024 学年第一学期期中阶段练习

高二数学

2023.11

一、选择题：本大题共 10 道小题，每小题 4 分，共 40 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目的要求.把正确答案涂写在答题卡上相应的位置.

1. 已知 $A(-1,-3),B(3,5)$，则直线 AB 的斜率为（　　）

A. 2　　B. 1　　C. $\frac{1}{2}$　　D. 不存在

【答案】A

【分析】

由斜率公式，可求出直线 AB 的斜率.

【详解】由 $A(-1,-3),B(3,5)$，可得 $k_{AB}=\frac{-3-5}{-1-3}=2$.

故选：A.

2. 圆 $x^2+y^2-2x+4y+3=0$ 的圆心为（　　）.

A. $(1,-2)$　　B. $(-1,2)$　　C. $(2,-4)$　　D. $(-2,4)$

【答案】A

【分析】先将圆的一般方程化为标准方程，从而可求出其圆心坐标.

【详解】由 $x^2+y^2-2x+4y+3=0$，得 $(x-1)^2+(y+2)^2=2$，

所以圆心为 $(1,-2)$，

故选：A

3. 一个椭圆的两个焦点分别是 $F_1\left(-3,0\right)$，$F_2\left(3,0\right)$，椭圆上的点 P 到两焦点的距离之和等于 8，则该椭圆的标准方程为（　　）

A. $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{28}=1$　　B. $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{7}=1$　　C. $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$　　D. $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$

【答案】B

【分析】利用椭圆的定义求解即可.

【详解】椭圆上的点 P 到两焦点的距离之和等于 8，故 $2a=8,a=4$，

且 $F_1\left(-3,0\right)$，故 $c=3,b^2=a^2-c^2=7$，

所以椭圆的标准方程为$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{7}=1$.

故选：B

4. 任意的$k\in\mathbf{R}$，直线$kx-y+1=3k$恒过定点（　　）

A. $(0,0)$　　B. $(0,1)$　　C. $(3,1)$　　D. $(2,1)$

【答案】C

【分析】将直线方程整理成斜截式，即可得定点.

【详解】因为$kx-y+1=3k$，即$y=k(x-3)+1$，

所以直线$kx-y+1=3k$恒过定点$(3,1)$.

故选：C.

5. 已知圆$C_1:x^2+y^2=1$与圆$C_2:x^2+y^2-8x+7=0$，则圆C_1与圆C_2的位置关系是（　　）

A. 相离　　B. 相交　　C. 内切　　D. 外切

【答案】D

【分析】求出两圆的圆心和半径，得到$\left|C_1C_2\right|=4=r_1+r_2$，得到两圆外切.

【详解】圆$C_1:x^2+y^2=1$的圆心为$C_1(0,0)$，半径为$r_1=1$，

圆$C_2:x^2+y^2-8x+7=0\Rightarrow(x-4)^2+y^2=9$，故圆心$C_2(4,0)$，半径为$r_2=3$，

则$\left|C_1C_2\right|=4=r_1+r_2$，

所以圆C_1与圆C_2的位置关系是外切.

故选：D

6. 过点$P\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$的直线$l$与圆$x^2+y^2=\frac{1}{4}$有公共点，则直线$l$的倾斜角取值范围是（　　）

A. $\left[\frac{\pi}{2},\frac{5\pi}{6}\right]$　　B. $\left[\frac{2\pi}{3},\pi\right)$　　C. $\left[\frac{\pi}{2},\frac{2\pi}{3}\right]$　　D. $\left[\frac{5\pi}{6},\pi\right)$

【答案】A

【分析】利用直线与圆的位置关系及倾斜角与斜率的关系计算即可.

【详解】易知圆的半径为$\frac{1}{2}$，圆心为原点，

当倾斜角为$\frac{\pi}{2}$时，即直线l方程为$x=-\frac{1}{2}$，此时直线l与圆相切满足题意；

当斜率存在时，不妨设直线l方程为$y=k\left(x+\frac{1}{2}\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}$，

则圆心到其距离为$d=\frac{\left|\frac{1}{2}k+\frac{\sqrt{3}}{2}\right|}{\sqrt{k^2+1}}\le\frac{1}{2}$，解不等式得$k\le-\frac{\sqrt{3}}{3}$，

所以直线l的倾斜角取值范围为$\left[\frac{\pi}{2},\frac{5\pi}{6}\right]$

故选：A

7. “$a=-1$”是“直线$l_1:ax+4y-3=0$与直线$l_2:x+(a-3)y+2=0$平行的（　　）

A. 充分不必要条件　　　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　　　D. 既不充分也不必要条件

【答案】A

【分析】求出当$l_1//l_2$时实数a的值，再利用集合的包含关系判断可得出结论.

【详解】当$l_1//l_2$时，$a(a-3)=4$，即$a^2-3a-4=0$，解得$a=-1$或4.

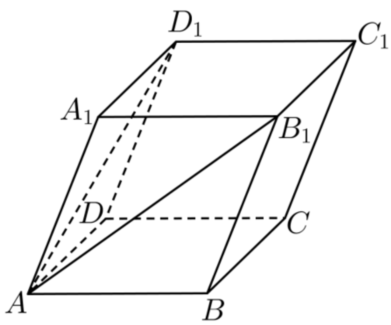
当$a=-1$时，直线l_1的方程为$x-4y+3=0$，直线l_2的方程为$x-4y+2=0$，此时$l_1//l_2$；

当$a=4$时，直线l_1的方程为$x+y-\frac{3}{4}=0$，直线l_2的方程为$x+y+2=0$，此时$l_1//l_2$.

因为$\{-1\}\subsetneqq\{-1,4\}$，因此，“$a=-1$”是“直线$l_1:ax+4y-3=0$与直线$l_2:x+(a-3)y+2=0$平行”的充分不必要条件.

故选：A.

8. 如图，在平行六面体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，$AA_1=AD=AB=2$，$\angle BAD=\frac{\pi}{2}$，$\angle BAA_1=\angle A_1AD=\frac{\pi}{3}$，则$\overrightarrow{AB_1}\cdot\overrightarrow{AD_1}=$（　　）



A. 12　　　　B. 8　　　　C. 6　　　　D. 4

【答案】B

【分析】根据空间向量加法的运算性质，结合空间向量数量积的运算性质和定义进行求解即可.

【详解】$\overrightarrow{AB_1}\cdot\overrightarrow{AD_1}=\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AA_1}\right)\cdot\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA_1}\right)=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{AA_1}^2$

$\Rightarrow \overrightarrow{AB_1}\cdot\overrightarrow{AD_1}=0+2\times2\times\frac{1}{2}+2\times2\times\frac{1}{2}+2^2=8,$

故选：B

9. 数学家欧拉在 1765 年提出定理：三角形的外心、重心、垂心依次位于同一直线上，且重心到外心的距离是重心到垂心距离的一半.这条直线被后人称为三角形的欧拉线，已知△ ABC 的顶点 $A\left(2,0\right)$，$B\left(1,2\right)$，且 $AC=BC$，则△ ABC 的欧拉线的方程为（　　）

A. $x-2y-4=0$　　　　B. $2x+y-4=0$

C. $4x+2y+1=0$　　　　D. $2x-4y+1=0$

【答案】D

【分析】由题设条件求出 AB 垂直平分线的方程，且△ ABC 的外心、重心、垂心都在垂直平分线上，结合欧拉线的定义，即垂直平分线即为欧拉线.

【详解】由题设，可得 $k_{AB}=\frac{2-0}{1-2}=-2$，且 AB 中点为 $(\frac{3}{2},1)$，

∴ AB 垂直平分线的斜率 $k=-\frac{1}{k_{AB}}=\frac{1}{2}$，故垂直平分线方程为 $y=\frac{1}{2}(x-\frac{3}{2})+1=\frac{x}{2}+\frac{1}{4}$，

∵ $AC=BC$，则△ ABC 的外心、重心、垂心都在垂直平分线上，

∴△ ABC 的欧拉线的方程为 $2x-4y+1=0$.

故选：D

10. 曲线 $C:x^3+y^3=1$.给出下列结论:

①曲线 C 关于原点对称;

②曲线 C 上任意一点到原点的距离不小于 1;

③曲线 C 只经过 2 个整点(即横、纵坐标均为整数的点).

其中,所有正确结论的序号是

A. ①②　　　　B. ②　　　　C. ②③　　　　D. ③

【答案】C

【分析】

将 $\left(-x,-y\right)$ 代入，化简后可确定①的真假性.对 x 分成 $x<0,x=0,0<x<1,x=1,x>1$ 等 5 种情况进行分类讨论，得出 $x^2+y^2\geq1$，由此判断曲线 C 上任意一点到原点的距离不小于 1.进而判断出②正确.对于③，首先求得曲线 C 的两个整点 $\left(0,1\right),\left(1,0\right)$，然后证得其它点不是整点，由此判断出③正确.

【详解】①，将 $\left(-x,-y\right)$ 代入曲线 $C:x^3+y^3=1$，得 $x^3+y^3=-1$，与原方程不相等，所以曲线 C 不关于原点对称，故①错误.

②，对于曲线$C:x^3+y^3=1$，由于$y^3=1-x^3$，所以$y=\sqrt[3]{1-x^3}$，所以对于任意一个x，只有唯一确定的y和它对应.函数$y=\sqrt[3]{1-x^3}$是单调递减函数.当$x=0$时，有唯一确定的$y=1$；当$x=1$时，有唯一确定的$y=0$.所以曲线C过点$(0,1),(1,0)$，这两点都在单位圆上，到原点的距离等于1.当$x<0$时，$y>1$，所以$x^2+y^2>1,\sqrt{x^2+y^2}>1$.当$x>1$时，$y<0$，所以$x^2+y^2>1,\sqrt{x^2+y^2}>1$.当$0<x<1$时，$0<y<1$，且$1-\left(x^2+y^2\right)=x^3+y^3-\left(x^2+y^2\right)=x^2(x-1)+y^2(y-1)<0$，

所以$x^2+y^2>1,\sqrt{x^2+y^2}>1$.

综上所述，曲线C上任意一点到原点的距离不小于1，所以②正确.

③，由②的分析可知，曲线C过点$(0,1),(1,0)$，这是两个整点.由$x^3+y^3=1$可得$x^3-1=(-y)^3$，当$x\neq 0$且$x\neq 1$时，若x为整数，x^3-1必定不是某个整数的三次方根，所以曲线C只经过两个整点.故③正确.

综上所述，正确的为②③.

故选：C

【点睛】本小题主要考查根据曲线方程研究曲线的性质，属于中档题.

二、填空题：本大题共5小题，共25分.把答案填在答题纸中相应的横线上.

11. 已知空间$\vec{a}=(2,3,1)$，$\vec{b}=(-4,2,x)$，$\vec{a}\perp\vec{b}$，则$|\vec{b}|=$_____.

【答案】$2\sqrt{6}$

【分析】根据空间向量的垂直，根据数量积的坐标表示，建立方程，结合模长公式，可得答案.

【详解】由$\vec{a}\perp\vec{b}$，且$\vec{a}=(2,3,1)$，$\vec{b}=(-4,2,x)$，则$\vec{a}\cdot\vec{b}=-8+6+x=0$，解得$x=2$，

故$|\vec{b}|=\sqrt{16+4+4}=2\sqrt{6}$.

故答案为：$2\sqrt{6}$.

12. 已知过点$(0,2)$的直线l的方向向量为$(1,6)$，点$A(a,b)$在直线l上，则满足条件的一组a,b的值依次为_________.

【答案】1；8

【分析】

根据方向向量设出直线l的方程，再由点$(0,2)$求出其方程，从而得出$b=6a+2$，即可得出答案.

【详解】直线l的方向向量为$(1,6)$，可设直线l的方程为$6x-y+C=0$

因为点$(0,2)$在直线l上，所以$C=2$，即直线l为$6x-y+2=0$

所以$6a-b+2=0$，即$b=6a+2$

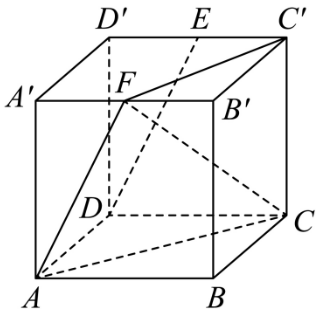
可取 $a=1$，则 $b=8$

故答案为：1；8

13. 在正方体 $ABCD-A'B'C'D'$ 中，E 是 $C'D'$ 的中点，则异面直线 DE 与 AC 所成角的余弦值为______.

【答案】$\dfrac{\sqrt{10}}{10}$

【分析】利用正方体的特征构造平行线，利用勾股定理及余弦定理解三角形即可.

【详解】

如图所示，取 $A'B'$ 的中点 F，易得 $AF // DE$，则 $\angle FAC$ 或其补角为所求角，

不妨设正方体棱长为 2，则 $AF=\sqrt{5}=FC', FC=\sqrt{C'F^2+C'C^2}=3, AC=2\sqrt{2}$，

由余弦定理知：$\cos\angle FAC=\dfrac{AF^2+AC^2-FC^2}{2AF\cdot AC}=\dfrac{5+8-9}{2\sqrt{5}\times 2\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{10}}{10}$，

则 $\angle FAC$ 为锐角，即异面直线 DE 与 AC 所成角.

故答案为：$\dfrac{\sqrt{10}}{10}$.

14. 将一张坐标纸对折，如果点 $(0,m)$ 与点 $(m-2,2)(m\neq 2)$ 重合，则点 $(-4,1)$ 与点______重合.

【答案】$(-1,-2)$

【分析】先求线段 AB 的中垂线方程，再根据点关于直线对称列式求解即可.

【详解】已知点 $A(0,m)$ 与点 $B(m-2,2)$，可知线段 AB 的中点为 $M\left(\dfrac{m}{2}-1,\dfrac{m}{2}+1\right)$，

且 $k_{AB}=\dfrac{2-m}{m-2}=-1$，则线段 AB 的中垂线的斜率 $k=1$，

则线段 AB 的中垂线方程为 $y-\left(\dfrac{m}{2}+1\right)=x-\left(\dfrac{m}{2}-1\right)$，即 $x-y+2=0$，

设点 $(-4,1)$ 关于直线 $x-y+2=0$ 的对称点为 (a,b)，

则 $\begin{cases}\dfrac{b-1}{a+4}=-1\\ \dfrac{a-4}{2}-\dfrac{b+1}{2}+2=0\end{cases}$，解得 $\begin{cases}a=-1\\ b=-2\end{cases}$，