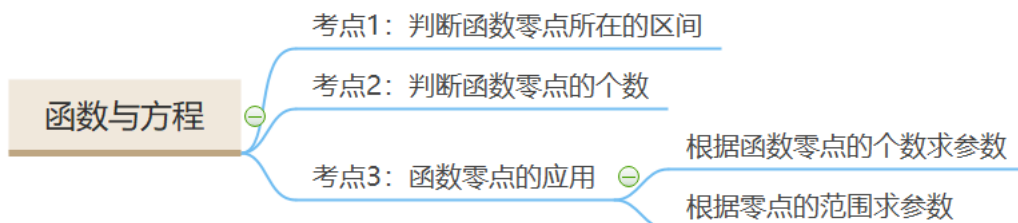


第 14 讲 函数与方程



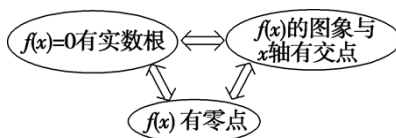
01

走进教材 · 自主回顾

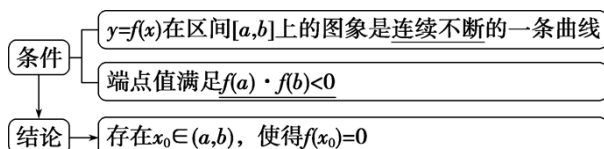
1. 函数零点

(1)定义: 对于函数 $y=f(x)(x \in D)$, 我们把使 $f(x)=0$ 的实数 x 叫做函数 $y=f(x)(x \in D)$ 的零点.

(2)三个等价关系



(3)存在性定理



2. 二次函数 $y=ax^2+bx+c(a>0)$ 的图象与零点的关系

	$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
二次函数 $y=ax^2+bx+c$ ($a>0$) 的图象			
与 x 轴的交点	$(x_1, 0), (x_2, 0)$	$(x_1, 0)$	无交点
零点	x_1, x_2	x_1	无

考点 1 判断函数零点所在的区间

[名师点睛]

确定函数零点所在区间的常用方法

(1)利用函数零点存在定理法: 首先看函数 $y=f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的图像是否连续, 再看是否有 $f(a) \cdot f(b) < 0$. 若有, 则函数 $y=f(x)$ 在区间 (a, b) 内必有零点.

(2)数形结合法: 通过画函数图像, 观察图像与 x 轴在给定区间上是否有交点来判断.

[典例]

1. (2022·天津红桥·一模) 函数 $f(x) = e^x + 2x - 6$ 的零点所在的区间是 ()

- A. (3,4) B. (2,3) C. (1,2) D. (0,1)

【答案】C

【解析】函数 $f(x) = e^x + 2x - 6$ 是 $\mathbb{R}$ 上的连续增函数,

$$Q f(1) = e - 4 < 0, f(2) = e^2 - 2 > 0,$$

可得 $f(1)f(2) < 0$,

所以函数 $f(x)$ 的零点所在的区间是 $(1, 2)$.

故选: C

2. (2022·全国·高三专题练习) 设 $f(x) = 2\sin(2x-1) - x$, 则在下列区间中函数 $f(x)$ 不存在零点的区间是 ()

- A. $[-1, 0]$ B. $[0, 1]$ C. $[1, 2]$ D. $[2, 3]$

【答案】D

【解析】 $f(x)$ 为连续函数, $f(-1) = 2\sin(-3) + 1 > 2\sin(-\frac{5}{6}\pi) + 1 = 0$, $f(0) = 2\sin(-1) < 0$, 根据零点存在性定理可知,

$[-1, 0]$ 内存在零点; $f(1) = 2\sin 1 - 1 > 0$, $f(2) = 2\sin 3 - 2 < 0$, $f(3) = 2\sin 5 - 3 < 0$, 同理可知: 区间 $[0, 1]$,

区间 $[1, 2]$ 上都存在零点, 区间 $[2, 3]$ 上没有零点

故选: D

[举一反三]

1. (2022·全国·高三专题练习) 函数 $f(x) = 2^x - 3x$ 的零点所在的一个区间是 ()

- A. $(-2, -1)$ B. $(0, 1)$ C. $(1, 2)$ D. $(-1, 0)$

【答案】B

【解析】 函数 $f(x) = 2^x - 3x$ 是连续函数,

$$\because f(0) = 1 - 0 > 0,$$

$$f(1) = 2 - 3 < 0,$$

$$\therefore f(0)f(1) < 0,$$

由零点判定定理可知函数的零点在 $(0, 1)$.

故选: B.

2. (2022·江苏·高三专题练习) 函数 $f(x) = \ln x - \frac{3}{e}$ 的零点所在区间为 ()

- A. $\left(\frac{1}{e}, 1\right)$ B. $(1, e)$ C. (e, e^2) D. (e^2, e^3)

【答案】C

【解析】 Q $f(x) = \ln x - \frac{3}{e}$ 在 $(0, +\infty)$ 上是增函数,

$$\text{又 } f\left(\frac{1}{e}\right) = \ln \frac{1}{e} - \frac{3}{e} = -1 - \frac{3}{e} < 0, \quad f(1) = \ln 1 - \frac{3}{e} = -\frac{3}{e} < 0, \quad f(e) = \ln e - \frac{3}{e} = 1 - \frac{3}{e} < 0,$$

$$f(e^2) = \ln e^2 - \frac{3}{e} = 2 - \frac{3}{e} > 0, \quad \therefore f(e) \cdot f(e^2) < 0,$$

根据零点存在性定理可知, 函数 $f(x) = \ln x - \frac{3}{e}$ 的零点所在的大致区间是 (e, e^2)

故选: C

3. (2022·浙江·高三专题练习) 函数 $f(x) = e^x + x$ 的零点所在的一个区间是 ()

- A. $(-2, -1)$ B. $(-1, 0)$ C. $(0, 1)$ D. $(1, 2)$

【答案】B

【解析】 由题意, 函数 $f(x) = e^x + x$ 在 R 上单调递增,

$$\text{且 } f(-2) = e^{-2} - 2 < 0, \quad f(-1) = e^{-1} - 1 < 0, \quad f(0) = e^0 + 0 > 0,$$

所以函数的零点所在的一个区间是 $(-1, 0)$.

故选: B.

4. (2022·全国·高三专题练习) 二次函数 $f(x) = ax^2 + bx + c (x \in \mathbb{R})$ 的部分对应值如下表:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	6	m	-4	-6	-6	-4	n	6

可以判断方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的两根所在的区间是 ()

A. $(-3, -1)$ 和 $(2, 4)$

B. $(-3, -1)$ 和 $(-1, 1)$

C. $(-1, 1)$ 和 $(1, 2)$

D. $(-1, 3)$ 和 $(4, +\infty)$

【答案】A

【解析】由表格可知: $f(-3) > 0, f(-1) < 0, f(2) < 0, f(4) > 0$,

所以 $f(-3) \cdot f(-1) < 0, f(2) \cdot f(4) < 0$,

结合零点存在性定理可知: 二次函数 $f(x) = ax^2 + bx + c (x \in \mathbb{R})$ 的零点所在区间为 $(-3, -1)$ 和 $(2, 4)$, 所以方程

$ax^2 + bx + c = 0$ 的两根所在的区间是 $(-3, -1)$ 和 $(2, 4)$,

故选: A.



考点2 判断函数零点的个数

[名师点睛]

判断函数零点个数的方法

(1)直接求零点: 令 $f(x)=0$, 如果能求出解, 那么有几个解就有几个零点.

(2)利用函数零点存在定理: 利用该定理不仅要求函数在 $[a, b]$ 上是连续不断的曲线, 且 $f(a) \cdot f(b) < 0$, 还必须结合函数的图像和性质(如单调性)才能确定函数有多少个零点.

(3)拆分成两个函数, 画出两个函数的图像, 看其交点的个数, 其中交点的横坐标有几个不同的值, 原函数就有几个不同的零点.

[典例]

1. (2022·全国·模拟预测) 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 4^{|x|} - 1, & -1 \leq x \leq 1, \\ f(x-2), & x > 1, \end{cases}$, 则函数 $g(x) = f(x) - \log_2 x$ 的零点个数为

()

A. 4

B. 5

C. 6

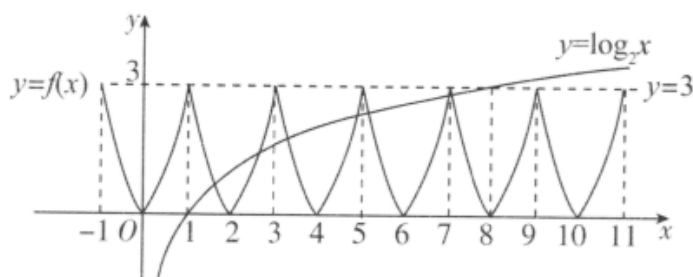
D. 7

【答案】D

【解析】当 $1 \leq x \leq 3$ 时, $-1 \leq x-2 \leq 1$, 则 $f(x-2) = 4^{|x-2|} - 1$; 以此类推, 当 $3 \leq x \leq 5$ 时,

$$f(x) = 4^{|x-4|} - 1; \dots;$$

在平面直角坐标系中作出函数 $y = f(x)$ 与 $y = \log_2 x$ 的部分图象如图所示.



由图可知, $y = f(x)$ 与 $y = \log_2 x$ 的图象有 7 个不同的交点

故选: D

2. (2022·湖南衡阳·二模) 已知定义在 $\mathbb{R}$ 上的奇函数 $f(x)$ 恒有 $f(x-1) = f(x+1)$, 当 $x \in [0, 1)$ 时,

$$f(x) = \frac{2^x - 1}{2^x + 1}, \text{ 已知 } k \in \left(-\frac{2}{15}, -\frac{1}{18}\right), \text{ 则函数 } g(x) = f(x) - kx - \frac{1}{3} \text{ 在 } (-1, 6) \text{ 上的零点个数为 ()}$$

A. 4 个

B. 5 个

C. 3 个或 4 个

D. 4 个或 5 个

【答案】D

【解析】因为 $f(x-1) = f(x+1)$, 所以 $f(x)$ 的周期为 2,

又因为 $f(x)$ 为奇函数, $f(x) = -f(-x)$,

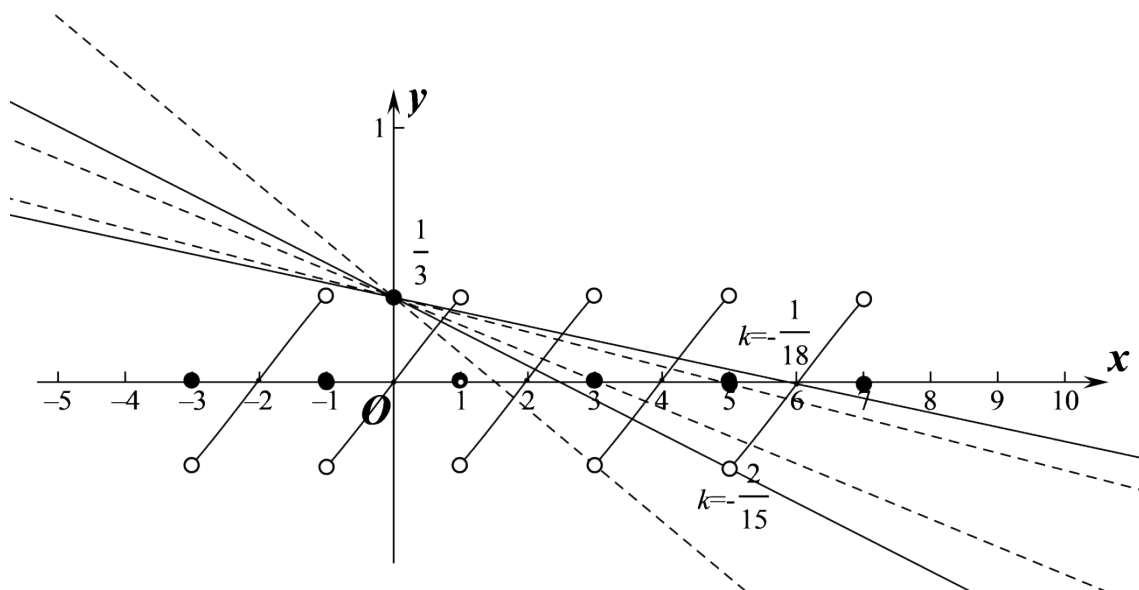
令 $x = 1$, 得 $f(1) = -f(-1)$, 又 $f(-1) = f(1)$, 所以 $f(1) = f(-1) = 0$,

$$\text{当 } x \in (-1, 1) \text{ 时, } f(x) = \frac{2^x - 1}{2^x + 1} = 1 - \frac{2}{2^x + 1},$$

由 $y = \frac{2}{2^x + 1}$ 单调递减得函数 $f(x)$ 在 $(-1, 1)$ 上单调递增,

所以 $f(-1) < f(x) < f(1)$, 得 $-\frac{1}{3} < f(x) < \frac{1}{3}$,

作出函数图象如图所示,



由图象可知当 $y = kx + \frac{1}{3}$ 过点 $(5, -\frac{1}{3})$ 时, $k = -\frac{2}{15}$, 此时在 $(-1, 6)$ 上只有 3 个零点.

当 $y = kx + \frac{1}{3}$ 经过点 $(3, 0)$ 时, $k = -\frac{1}{9}$, 此时有 5 个零点.

当 $-\frac{2}{15} < k < -\frac{1}{9}$ 时, 有 4 个零点.

当 $y = kx + \frac{1}{3}$ 经过点 $(5, 0)$ 时, $k = -\frac{1}{15}$, 此时有 5 个零点.

当 $-\frac{1}{9} < k < -\frac{1}{15}$ 时, 有 4 个零点.

当 $y = kx + \frac{1}{3}$ 经过点 $(6, 0)$ 时, $k = -\frac{1}{18}$, 此时在 $(-1, 6)$ 上只有 3 个零点.

当 $-\frac{1}{15} < k < -\frac{1}{18}$ 时, 有 4 个零点.

所以当 $k \in (-\frac{2}{15}, -\frac{1}{18})$ 时, 函数 $g(x) = f(x) - kx - \frac{1}{3}$ 在 $(-1, 6)$ 上有 4 个或 5 个零点.

故选: D

3. (2021·北京·高考真题) 已知函数 $f(x) = |\lg x| - kx - 2$, 给出下列四个结论:

- ①若 $k = 0$, $f(x)$ 恰有 2 个零点;
- ②存在负数 k , 使得 $f(x)$ 恰有个 1 零点;
- ③存在负数 k , 使得 $f(x)$ 恰有个 3 零点;
- ④存在正数 k , 使得 $f(x)$ 恰有个 3 零点.

其中所有正确结论的序号是_____.

【答案】①②④

【解析】对于①, 当 $k = 0$ 时, 由 $f(x) = |\lg x| - 2 = 0$, 可得 $x = \frac{1}{100}$ 或 $x = 100$, ①正确;

对于②，考查直线 $y = kx + 2$ 与曲线 $y = -\lg x (0 < x < 1)$ 相切于点 $P(t, -\lg t)$ ，

$$\text{对函数 } y = -\lg x \text{ 求导得 } y' = -\frac{1}{x \ln 10}, \text{ 由题意可得 } \begin{cases} kt + 2 = -\lg t \\ k = -\frac{1}{t \ln 10} \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} t = \frac{e}{100} \\ k = -\frac{100}{e} \lg e \end{cases},$$

所以，存在 $k = -\frac{100}{e} \lg e < 0$ ，使得 $f(x)$ 只有一个零点，②正确；

对于③，当直线 $y = kx + 2$ 过点 $(1, 0)$ 时， $k + 2 = 0$ ，解得 $k = -2$ ，

所以，当 $-\frac{100}{e} \lg e < k < -2$ 时，直线 $y = kx + 2$ 与曲线 $y = -\lg x (0 < x < 1)$ 有两个交点，

若函数 $f(x)$ 有三个零点，则直线 $y = kx + 2$ 与曲线 $y = -\lg x (0 < x < 1)$ 有两个交点，

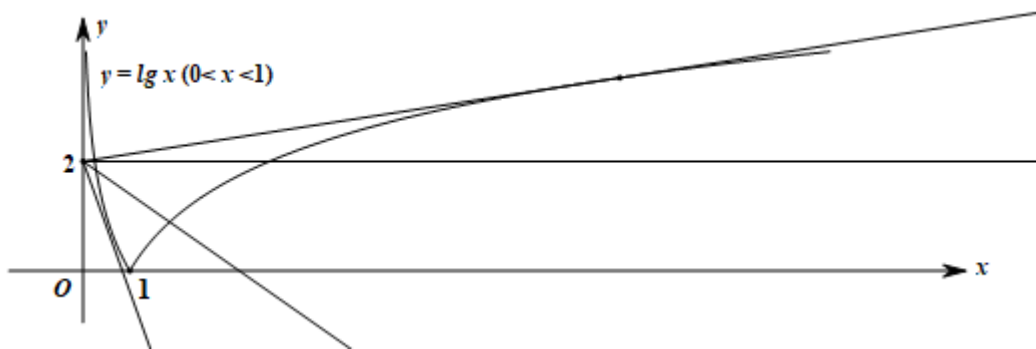
$$\text{直线 } y = kx + 2 \text{ 与曲线 } y = \lg x (x > 1) \text{ 有一个交点，所以，} \begin{cases} -\frac{100}{e} \lg e < k < -2 \\ k + 2 > 0 \end{cases}, \text{ 此不等式无解，}$$

因此，不存在 $k < 0$ ，使得函数 $f(x)$ 有三个零点，③错误；

对于④，考查直线 $y = kx + 2$ 与曲线 $y = \lg x (x > 1)$ 相切于点 $P(t, \lg t)$ ，

$$\text{对函数 } y = \lg x \text{ 求导得 } y' = \frac{1}{x \ln 10}, \text{ 由题意可得 } \begin{cases} kt + 2 = \lg t \\ k = \frac{1}{t \ln 10} \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} t = 100e \\ k = \frac{\lg e}{100e} \end{cases},$$

所以，当 $0 < k < \frac{\lg e}{100e}$ 时，函数 $f(x)$ 有三个零点，④正确。



故答案为：①②④。

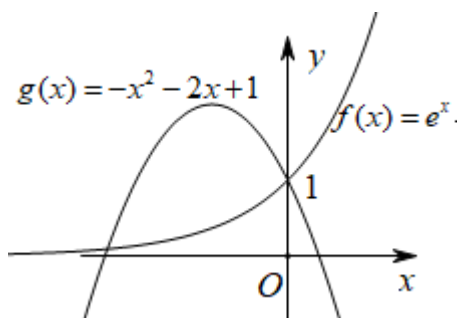
[举一反三]

1. (2022·海南·模拟预测) 函数 $y = e^x + x^2 + 2x - 1$ 的零点个数为 ()

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

【答案】C

【解析】解:函数 $y = e^x + x^2 + 2x - 1$ 的零点个数即函数 $f(x) = e^x$ 与 $g(x) = -x^2 - 2x + 1$ 的图象交点的个数, 作图如图所示,



由图可知, 两图象有两个交点, 故原函数有 2 个零点

故选: C

2. (2022·重庆·模拟预测) 若函数 $f(x)$ 满足 $f(x) = f(x+2)$, 且当 $x \in [-1, 1]$ 时, $f(x) = x^2$, 则函数 $y = f(x)$ 与函数 $y = \lg|x|$ 的图像的交点个数为 ().

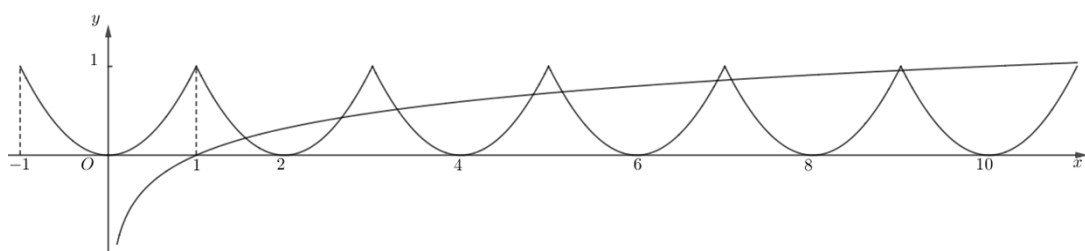
- A. 18 个 B. 16 个 C. 14 个 D. 10 个

【答案】A

【解析】因 $f(x+2) = f(x)$,

于是得函数 $f(x)$ 是以 2 为周期的周期函数, 又当 $x \in [-1, 1]$ 时, $f(x) = x^2$, 则有函数 $y = f(x)$ 与函数 $y = \lg|x|$ 都是偶函数,

在同一坐标系内作出函数 $y = f(x) (x \geq -1)$ 与函数 $y = \lg x$ 的图像, 如图,



观察图象得, 函数 $y = f(x) (x \geq 0)$ 与函数 $y = \lg x$ 的图像有 9 个交点, 由偶函数的性质知, 两函数图象在 $x < 0$ 时有 9 个交点,

所以函数 $y = f(x)$ 与函数 $y = \lg|x|$ 的图像的交点个数为 18.

故选: A

3. (2022·重庆·西南大学附中模拟预测) 函数 $f(x)$ 满足 $f(x) + f(-x) = 2$, $f(1+x) - f(1-x) = 0$, 当 $x \in [0, 1]$ 时, $f(x) = x+1$, 则关于 x 的方程 $f(x) = \frac{1}{2022^x}$ 在 $x \in [0, 2022]$ 上的解的个数是 ()

A. 1010

B. 1011

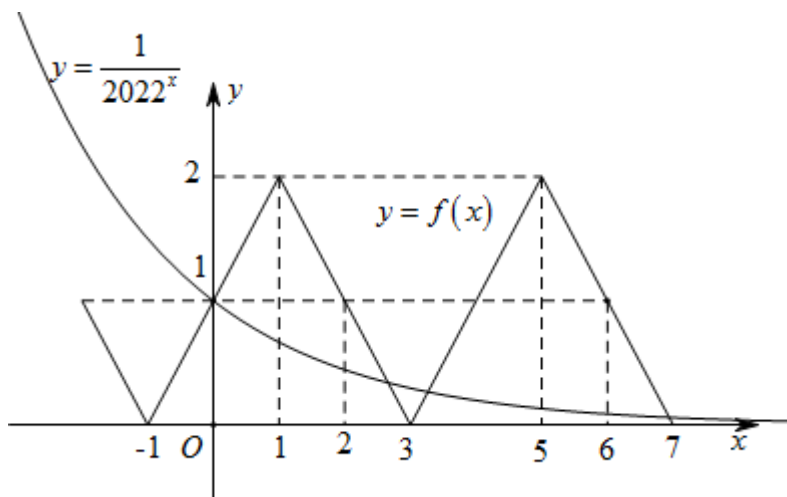
C. 1012

D. 1013

【答案】B

【解析】解：因为函数 $f(x)$ 满足 $f(x) + f(-x) = 2$ ，所以函数 $f(x)$ 关于点 $(0, 1)$ 对称，因为 $f(1+x) - f(1-x) = 0$ ，即 $f(1+x) = f(1-x)$ ，所以函数 $f(x)$ 关于直线 $x=1$ 对称，因为当 $x \in [0, 1]$ 时， $f(x) = x + 1$ ，

所以，结合函数性质，作出函数图像，如图所示：

由图可知，函数 $f(x)$ 为周期函数，周期为 $T=4$ ，由于函数 $x \in [2, 6]$ 一个周期内， $y = f(x)$ 与 $y = \frac{1}{2022^x}$ 有 2 个交点，在 $x \in [0, 2]$ 上， $y = f(x)$ 与 $y = \frac{1}{2022^x}$ 有 1 个交点，所以根据函数周期性可知，当 $x \in [0, 2022]$ 时， $y = f(x)$ 与 $y = \frac{1}{2022^x}$ 有 $2 \times \frac{2020}{4} + 1 = 1011$ 个交点.所以关于 x 的方程 $f(x) = \frac{1}{2022^x}$ 在 $x \in [0, 2022]$ 上的解的个数是 1011 个.

故选：B



考点 3 函数零点的应用

[名师点睛]

1. 已知函数的零点求参数，主要方法有：(1)直接求方程的根，构建方程(或不等式)求参数；(2)数形结合；(3)分离参数，转化为求函数的最值.

2. 已知函数零点的个数求参数范围，常利用数形结合法将其转化为两个函数的图像的交点问题，需准确画出两个函数的图像，利用图像写出满足条件的参数范围.

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/447130125126010051>