2024届辽宁省沈阳市四校协作体下学期期中数学试题

注意事项

1．考试结束后，请将本试卷和答题卡一并交回．

2．答题前，请务必将自己的姓名、准考证号用0．5毫米黑色墨水的签字笔填写在试卷及答题卡的规定位置．

3．请认真核对监考员在答题卡上所粘贴的条形码上的姓名、准考证号与本人是否相符．

4．作答选择题，必须用2B铅笔将答题卡上对应选项的方框涂满、涂黑；如需改动，请用橡皮擦干净后，再选涂其他答案．作答非选择题，必须用05毫米黑色墨水的签字笔在答题卡上的指定位置作答，在其他位置作答一律无效．

5．如需作图，须用2B铅笔绘、写清楚，线条、符号等须加黑、加粗．

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1．已知双曲线C：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0，b>0)$的右焦点为$F$，过原点$O$作斜率为$\frac{4}{3}$的直线交$C$的右支于点$A$，若$|OA|=|OF|$，则双曲线的离心率为（　　）

A．$\sqrt{3}$　　B．$\sqrt{5}$　　C．2　　D．$\sqrt{3}+1$

2．已知m，n是两条不重合的直线，α，β是两个不重合的平面，则下列命题中错误的是（　　）

A．若$m//\alpha$，$\alpha//\beta$，则$m//\beta$或$m\subset\beta$

B．若$m//n$，$m//\alpha$，$n\not\subset\alpha$，则$n//\alpha$

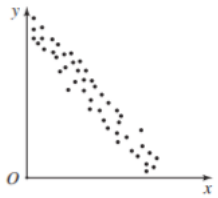
C．若$m\perp n$，$m\perp\alpha$，$n\perp\beta$，则$\alpha\perp\beta$

D．若$m\perp n$，$m\perp\alpha$，则$n//\alpha$

3．已知向量$\left|\vec{a}\right|=1,\vec{b}=\left(\frac{1}{2},m\right)$，若$\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\perp\left(\vec{a}-\vec{b}\right)$，则实数$m$的值为（　　）

A．$\frac{1}{2}$　　B．$\frac{\sqrt{3}}{2}$　　C．$\pm\frac{1}{2}$　　D．$\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

4．为研究某咖啡店每日的热咖啡销售量y和气温x之间是否具有线性相关关系，统计该店2017年每周六的销售量及当天气温得到如图所示的散点图（x轴表示气温，y轴表示销售量），由散点图可知y与x的相关关系为（　　）



A．正相关，相关系数r的值为0.85

B．负相关，相关系数r的值为0.85

C．负相关，相关系数r的值为-0.85

D．正相关，相关负数 r 的值为 -0.85

5．若函数 $f\left(x\right)=\left(x^2-mx+2\right)e^x(e=2.71828...$ 为自然对数的底数)在区间 $[1,2]$ 上不是单调函数，则实数 m 的取值范围是(　　)

A．$\left[\frac{5}{2},\frac{10}{3}\right]$　　B．$\left(\frac{5}{2},\frac{10}{3}\right)$　　C．$\left[2,\frac{10}{3}\right]$　　D．$\left(2,\frac{10}{3}\right)$

6．已知函数 $f(x)=\frac{k}{x}(k\in \mathrm{N}_+)$，$g(x)=\frac{\ln x+1}{x-1}$，若对任意的 $c>1$，存在实数 a,b 满足 $0<a<b<c$，使得 $g(a)=f(b)=g(c)$，则 k 的最大值是(　　)

A．3　　B．2　　C．4　　D．5

7．在平面直角坐标系中，若不等式组 $\begin{cases}x-4y+4\le 0\\2x+y-10\le 0\\5x-2y+2\ge 0\end{cases}$ 所表示的平面区域内存在点 $\left(x_0,y_0\right)$，使不等式 $x_0+my_0+1\le 0$ 成立，则实数 m 的取值范围为（　　）

A．$(-\infty,-\frac{5}{2}]$　　B．$(-\infty,-\frac{1}{2}]$　　C．$[4,+\infty)$　　D．$(-\infty,-4]$

8．已知双曲线的中心在原点且一个焦点为 $F(\sqrt{7},0)$，直线 $y=x-1$ 与其相交于 M，N 两点，若 MN 中点的横坐标为 $-\frac{2}{3}$，则此双曲线的方程是

A．$\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{4}=1$　　B．$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{3}=1$

C．$\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{2}=1$　　D．$\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{5}=1$

9．正项等比数列 $\{a_n\}$ 中的 a_1、a_{4039} 是函数 $f\left(x\right)=\frac{1}{3}x^3-4x^2+6x-3$ 的极值点，则 $\log_{\sqrt{6}}a_{2020}=$（　　）

A．-1　　B．1　　C．$\sqrt{2}$　　D．2

10．如图所示，三国时代数学家在《周脾算经》中利用弦图，给出了勾股定理的绝妙证明.图中包含四个全等的直角三角形及一个小正方形（阴影），设直角三角形有一个内角为 $30°$，若向弦图内随机抛掷 200 颗米粒（大小忽略不计，取 $\sqrt{3}\approx 1.732$），则落在小正方形（阴影）内的米粒数大约为（　　）



A．20　　B．27　　C．54　　D．64

11．已知$0<a<b<1$，则（　　）

A．$(1-a)^{\frac{1}{b}}>(1-a)^{b}$ B．$(1-a)^{b}>(1-a)^{\frac{b}{2}}$ C．$(1+a)^{a}>(1+b)^{b}$ D．$(1-a)^{a}>(1-b)^{b}$

12．已知平面$ABCD\perp$平面$ADEF, AB\perp AD, CD\perp AD$，且$AB=3, AD=CD=6, ADEF$是正方形，在正方形$ADEF$内部有一点$M$，满足$MB, MC$与平面$ADEF$所成的角相等，则点$M$的轨迹长度为（　　）

A．$\frac{4}{3}$　　B．16　　C．$\frac{4}{3}\pi$　　D．8π

二、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分。

13．圆心在曲线$y=\frac{k}{x}(x>0,k>0)$上的圆中，存在与直线$2x+y+1=0$相切且面积为5π的圆，则当k取最大值时，该圆的标准方程为_____.

14．若实数$□, □$满足不等式组$\begin{cases} □+□-4\le 0, \\ 2□-3□-8\le 0, \\ □\ge 1, \end{cases}$则目标函数$□=3□-□$的最大值为_____.

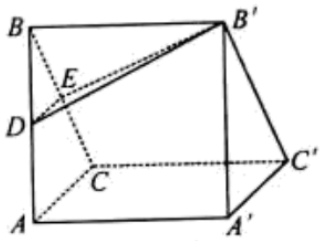
15．已知函数$f(x)=\sqrt{3}\sin(2x+\varphi)-\cos(2x+\varphi)(0\le\varphi<\pi)$是定义在$R$上的奇函数，则$f\left(-\frac{\pi}{8}\right)$的值为_____.

16．如图所示，边长为1的正三角形ABC中，点M，N分别在线段AB，AC上，将ΔAMN沿线段MN进行翻折，得到右图所示的图形，翻折后的点A在线段BC上，则线段AM的最小值为_____.



三、解答题：共70分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17．（12分）如图，在直三棱柱$ABC-A'B'C'$中，$AC\perp AB$，$A'A=AB=AC=2$，**D**，**E**分别为**AB**，**BC**的中点.

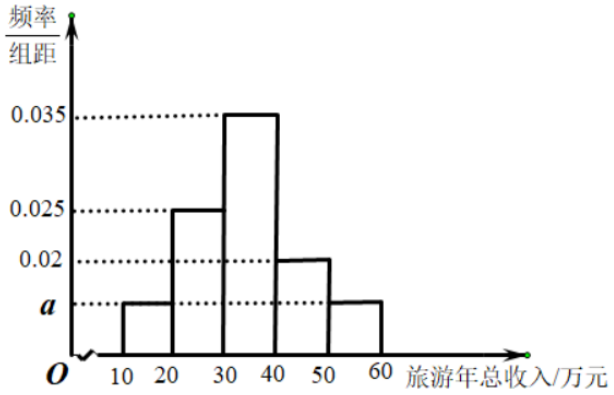


（1）证明：平面$B'DE\perp$平面$A'ABB'$；

（2）求点C'到平面$B'DE$的距离.

18．（12分）

2019 年 9 月 26 日，携程网发布《2019 国庆假期旅游出行趋势预测报告》，2018 年国庆假日期间，西安共接待游客 1692.56 万人次，今年国庆有望超过 2000 万人次，成为西部省份中接待游客量最多的城市.旅游公司规定：若公司某位导游接待旅客，旅游年总收人不低于 40(单位：万元)，则称该导游为优秀导游.经验表明，如果公司的优秀导游率越高，则该公司的影响度越高.已知甲、乙家旅游公司各有导游 40 名，统计他们一年内旅游总收入，分别得到甲公司的频率分布直方图和乙公司的频数分布表如下：



分组	[10,20)	[20,30)	[30,40)	[40,50)
频数	2	b	20	10

（1）求 a，b 的值，并比较甲、乙两家旅游公司，哪家的影响度高？

（2）从甲、乙两家公司旅游总收人在 $[10,20)$ (单位：万元)的导游中，随机抽取 3 人进行业务培训，设来自甲公司的人数为 X，求 X 的分布列及数学期望.

19.（12 分）在极坐标系中，已知曲线 $C_1:\rho\cos\theta-\sqrt{3}\rho\sin\theta-1=0$，$C_2:\rho=2\cos\theta$.

（1）求曲线 C_1、C_2 的直角坐标方程，并判断两曲线的形状；

（2）若曲线 C_1、C_2 交于 A、B 两点，求两交点间的距离.

20.（12 分）已知函数 $f(x)=\dfrac{ax}{e^x}(a\neq 0)$.

（1）求函数 $f(x)$ 的单调区间；

（2）当 $a=1$ 时，如果方程 $f(x)=t$ 有两个不等实根 x_1，x_2，求实数 t 的取值范围，并证明 $x_1+x_2>2$.

21.（12 分）已知函数 $f\left(x\right)=A\sin\left(\omega x+\varphi\right)\left(A>0,\omega>0,-\dfrac{\pi}{2}<\varphi<\dfrac{\pi}{2}\right)$ 的最小正周期是 π，且当 $x=\dfrac{\pi}{6}$ 时，$f\left(x\right)$ 取得最大值 2.

（1）求 $f\left(x\right)$ 的解析式；

（2）作出 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上的图象（要列表）.

22.（10 分）已知直线 l 的参数方程为 $\begin{cases} x=m+\dfrac{\sqrt{2}}{2}t \\ y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}t \end{cases}$（$t$ 为参数），以坐标原点为极点，x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系，曲线 C 的极坐标方程为 $\rho^2\cos^2\theta+3\rho^2\sin^2\theta=12$，且曲线 C 的左焦点 F 在直线 l 上.

（Ⅰ）求 l 的极坐标方程和曲线 C 的参数方程；

（Ⅱ）求曲线 C 的内接矩形的周长的最大值.

参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1、B

【解析】

以 O 为圆心，以 $|OF|$ 为半径的圆的方程为 $x^2+y^2=c^2$，联立 $\begin{cases} x^2+y^2=c^2 \\ \dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1 \end{cases}$，可求出点 $A\left(\dfrac{a\sqrt{c^2+b^2}}{c},\dfrac{b^2}{c}\right)$，则 $\dfrac{\dfrac{b^2}{c}}{\dfrac{a\sqrt{c^2+b^2}}{c}}=\dfrac{4}{3}$，整理计算可得离心率.

【详解】

解：以 O 为圆心，以 $|OF|$ 为半径的圆的方程为 $x^2+y^2=c^2$，

联立 $\begin{cases} x^2+y^2=c^2 \\ \dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1 \end{cases}$，取第一象限的解得 $\begin{cases} x=\dfrac{a\sqrt{c^2+b^2}}{c} \\ y=\dfrac{b^2}{c} \end{cases}$，

即 $A\left(\dfrac{a\sqrt{c^2+b^2}}{c},\dfrac{b^2}{c}\right)$，则 $\dfrac{\dfrac{b^2}{c}}{\dfrac{a\sqrt{c^2+b^2}}{c}}=\dfrac{4}{3}$，

整理得$\left(9c^2-5a^2\right)\left(c^2-5a^2\right)=0$，

则$\frac{c^2}{a^2}=\frac{5}{9}<1$（舍去），$\frac{c^2}{a^2}=5$，

$\therefore e=\frac{c}{a}=\sqrt{5}$.

故选：B.

【点睛】

本题考查双曲线离心率的求解，考查学生的计算能力，是中档题.

2、D

【解析】

根据线面平行和面面平行的性质，可判定 A；由线面平行的判定定理，可判断 B；C 中可判断α，β所成的二面角为90^0；D 中有可能$n\subset\alpha$，即得解.

【详解】

选项 A：若$m\ //\ \alpha$，$\alpha\ //\ \beta$，根据线面平行和面面平行的性质，有$m\ //\ \beta$或$m\subset\beta$，故 A 正确；

选项 B：若$m\ //\ n$，$m\ //\ \alpha$，$n\subset\alpha$，由线面平行的判定定理，有$n\ //\ \alpha$，故 B 正确；

选项 C：若$m\perp n$，$m\perp\alpha$，$n\perp\beta$，故α，β所成的二面角为90^0，则$\alpha\perp\beta$，故 C 正确；

选项 D，若$m\perp n$，$m\perp\alpha$，有可能$n\subset\alpha$，故 D 不正确.

故选：D

【点睛】

本题考查了空间中的平行垂直关系判断，考查了学生逻辑推理，空间想象能力，属于中档题.

3、D

【解析】

由两向量垂直可得$\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}-\vec{b}\right)=0$，整理后可知$\left|\vec{a}\right|^2-\left|\vec{b}\right|^2=0$，将已知条件代入后即可求出实数$m$的值.

【详解】

解：$\because\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\perp\left(\vec{a}-\vec{b}\right)$，$\therefore\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}-\vec{b}\right)=0$，即$\left|\vec{a}\right|^2-\left|\vec{b}\right|^2=0$，

将$\left|\vec{a}\right|=1$和$\left|\vec{b}\right|^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2+m^2$代入，得出$m^2=\frac{3}{4}$，所以$m=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$.

故选:D.

【点睛】

本题考查了向量的数量积，考查了向量的坐标运算.对于向量问题，若已知垂直，通常可得到两个向量的数量积为0，继而结合条件进行化简、整理.

4、C

【解析】

根据正负相关的概念判断.

【详解】

由散点图知y随着x的增大而减小，因此是负相关．相关系数为负．

故选：C.

【点睛】

本题考查变量的相关关系，考查正相关和负相关的区别．掌握正负相关的定义是解题基础.

5、B

【解析】

求得$f\left(x\right)$的导函数$f^{'}\left(x\right)$，由此构造函数$g\left(x\right)=x^2+\left(2-m\right)x+2-m$，根据题意可知$g\left(x\right)$在$(1,2)$上有变号零点.

由此令$g\left(x\right)=0$，利用分离常数法结合换元法，求得m的取值范围.

【详解】

$f'\left(x\right)=e^x\left[x^2+\left(2-m\right)x+2-m\right]$，

设$g\left(x\right)=x^2+\left(2-m\right)x+2-m$，

要使$f\left(x\right)$在区间$[1,2]$上不是单调函数，

即$g\left(x\right)$在$(1,2)$上有变号零点，令$g\left(x\right)=0$，

则$x^2+2x+2=m\left(x+1\right)$，

令$t=x+1\in\left(2,3\right)$，则问题即$m=t+\frac{1}{t}$在$t\in\left(2,3\right)$上有零点，由于$t+\frac{1}{t}$在$\left(2,3\right)$上递增，所以m的取值范围是

$\left(\frac{5}{2},\frac{10}{3}\right)$.

故选：B

【点睛】

本小题主要考查利用导数研究函数的单调性，考查方程零点问题的求解策略，考查化归与转化的数学思想方法，属于中档题.

6、A

【解析】

根据条件将问题转化为$\frac{\ln x+1}{x-1}>\frac{k}{x}$，对于$x>1$恒成立，然后构造函数$h(x)=x\cdot\frac{\ln x+1}{x-1}$，然后求出$h(x)$的范围，进一步得到$k$的最大值.

【详解】

Q $f(x)=\frac{k}{x}(k\in \mathrm{N}_+)$，$g(x)=\frac{\ln x+1}{x-1}$，对任意的$c>1$，存在实数$a,b$满足$0<a<b<c$，使得$g(a)=f(b)=g(c)$，

$\therefore$易得$g(c)=f(b)>f(c)$，即$\frac{\ln c+1}{c-1}>\frac{k}{c}$恒成立，

$\therefore\frac{\ln x+1}{x-1}>\frac{k}{x}$，对于$x>1$恒成立,

设$h(x)=x\cdot\frac{\ln x+1}{x-1}$，则$h'(x)=\frac{x-2-\ln x}{(x-1)^2}$，

令$q(x)=x-2-\ln x$，$\therefore q'(x)=1-\frac{1}{x}>0$在$x>1$恒成立，

Q $q(3)=3-2-\ln 3<0$，$q(4)=4-2-\ln 4>0$，

故存在$x_0\in(3,4)$，使得$q\left(x_0\right)=0$，即$x_0-2=\ln x_0$，

当$x\in(1,x_0)$时，$q(x)<0$，$h(x)$单调递减；

当$x\in(x_0,+\infty)$时，$q(x)>0$，$h(x)$单调递增.

$\therefore h(x)_{\min}=h(x_0)=\frac{x_0\ln x_0+x_0}{x_0-1}$,将$x_0-2=\ln x_0$代入得：

$\therefore h(x)_{\min}=h(x_0)=\frac{x_0(x_0-2)+x_0}{x_0-1}=x_0$，

Q $k\in \mathrm{N}_+$，且$k<h(x)_{\min}=x_0$，

$\therefore k\le 3$

故选：A

【点睛】

本题考查了利用导数研究函数的单调性，零点存在定理和不等式恒成立问题，考查了转化思想，属于难题.

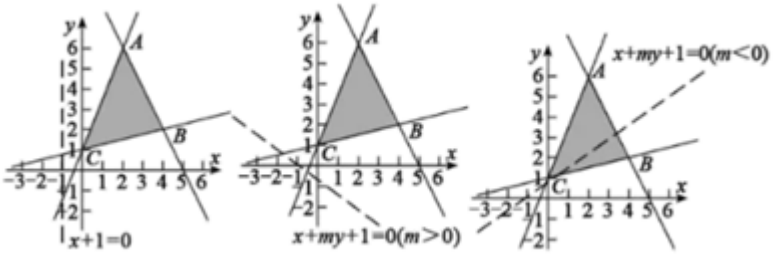
7、B

【解析】

依据线性约束条件画出可行域，目标函数$x_0+my_0+1\le 0$恒过$D\left(-1,0\right)$，再分别讨论m的正负进一步确定目标函数与可行域的基本关系，即可求解

【详解】

作出不等式对应的平面区域，如图所示：



其中 $A(2,6)$，直线 $x+my+1=0$ 过定点 $D(-1,0)$，

当 $m=0$ 时，不等式 $x+1\le 0$ 表示直线 $x+1=0$ 及其左边的区域，不满足题意；

当 $m>0$ 时，直线 $x+my+1=0$ 的斜率 $-\frac{1}{m}<0$，

不等式 $x+my+1\le 0$ 表示直线 $x+my+1=0$ 下方的区域，不满足题意；

当 $m<0$ 时，直线 $x+my+1=0$ 的斜率 $-\frac{1}{m}>0$，

不等式 $x+my+1\le 0$ 表示直线 $x+my+1=0$ 上方的区域，

要使不等式组所表示的平面区域内存在点 (x_0,y_0)，

使不等式 $x_0+my_0+1\le 0$ 成立，只需直线 $x+my+1=0$ 的斜率 $-\frac{1}{m}\le k_{AD}=2$，解得 $m\le -\frac{1}{2}$.

综上可得实数 m 的取值范围为 $(-\infty,-\frac{1}{2}]$，

故选：**B.**

【点睛】

本题考查由目标函数有解求解参数取值范围问题，分类讨论与数形结合思想，属于中档题

8、**D**

【解析】

根据点差法得 $\frac{2}{a^2}=\frac{5}{b^2}$，再根据焦点坐标得 $a^2+b^2=7$，解方程组得 $a^2=2$，$b^2=5$，即得结果.

【详解】

设双曲线的方程为 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$，由题意可得 $a^2+b^2=7$，设 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，则 MN 的中点为 $\left(-\frac{2}{3},-\frac{5}{3}\right)$，由 $\frac{x_1^2}{a^2}-\frac{y_1^2}{b^2}=1$ 且 $\frac{x_2^2}{a^2}-\frac{y_2^2}{b^2}=1$，得 $\frac{(x_1+x_2)(x_1-x_2)}{a^2}=\frac{(y_1+y_2)(y_1-y_2)}{b^2}$，$\frac{2\times(-\frac{2}{3})}{a^2}=$

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：https://d.book118.com/447200010154006141