2024 届北京市北师大附中高三下第一次测试数学试题

注意事项

1．考生要认真填写考场号和座位序号。

2．试题所有答案必须填涂或书写在答题卡上，在试卷上作答无效。第一部分必须用 2B 铅笔作答；第二部分必须用黑色字迹的签字笔作答。

3．考试结束后，考生须将试卷和答题卡放在桌面上，待监考员收回。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1．已知双曲线 C：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>0$，$b>0$）的焦距为 8，一条渐近线方程为 $y=\sqrt{3}x$，则 C 为（　　）

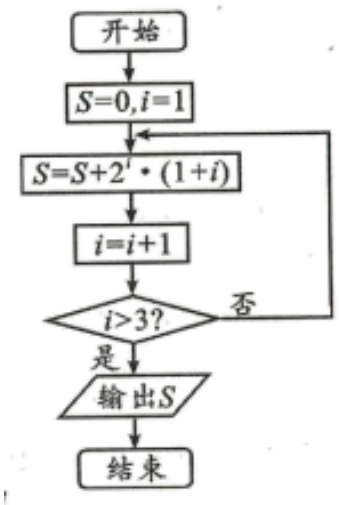
A．$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$　　B．$\frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{4}=1$

C．$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{48}=1$　　D．$\frac{x^2}{48}-\frac{y^2}{16}=1$

2．要排出高三某班一天中，语文、数学、英语各 2 节，自习课 1 节的功课表，其中上午 5 节，下午 2 节，若要求 2 节语文课必须相邻且 2 节数学课也必须相邻（注意：上午第五节和下午第一节不算相邻），则不同的排法种数是（　　）

A．84　　B．54　　C．42　　D．18

3．执行如图所示的程序框图，则输出 S 的值为（　　）



A．16　　B．48　　C．96　　D．128

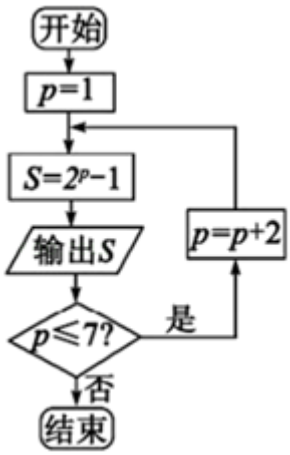
4．已知集合 $A=\{x\mid x^2<1\}$，$B=\{x\mid \ln x<1\}$，则

A．$A\cap B=\{x\mid 0<x<e\}$　　B．$A\cap B=\{x\mid x<e\}$

C．$A\cup B=\{x\mid 0<x<e\}$　　D．$A\cup B=\{x\mid -1<x<e\}$

5．

马林●梅森是 17 世纪法国著名的数学家和修道士，也是当时欧洲科学界一位独特的中心人物，梅森在欧几里得、费马等人研究的基础上对 2^p-1 作了大量的计算、验证工作，人们为了纪念梅森在数论方面的这一贡献，将形如 2^p-1（其中 p 是素数）的素数，称为梅森素数.若执行如图所示的程序框图，则输出的梅森素数的个数是（　　）



A．3　　B．4　　C．5　　D．6

6．已知圆 $x^2+y^2-4x+2y+1=0$ 关于双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\left(a>0,b>0\right)$ 的一条渐近线对称，则双曲线 C 的离心率为（　　）

A．$\sqrt{5}$　　B．5　　C．$\dfrac{\sqrt{5}}{2}$　　D．$\dfrac{5}{4}$

7．设正项等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，若 $S_2=3$，$a_3+a_4=12$，则公比 $q=$（　　）

A．±4　　B．4　　C．±2　　D．2

8．下列函数中既关于直线 $x=1$ 对称，又在区间 $[-1,0]$ 上为增函数的是(　　)

A．$y=\sin \pi x$.　　B．$y=|x-1|$

C．$y=\cos \pi x$　　D．$y=\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}$

9．已知双曲线 C：$\dfrac{x^2}{4}-y^2=1$，F_1，F_2 为其左、右焦点，直线 l 过右焦点 F_2，与双曲线 C 的右支交于 A，B 两点，且点 A 在 x 轴上方，若 $\left|AF_2\right|=3\left|BF_2\right|$，则直线 l 的斜率为(　)

A．1　　B．-2　　C．-1　　D．2

10．已知等差数列{a_n}，则“$a_2>a_1$”是“数列{a_n}为单调递增数列”的（　）

A．充分而不必要条件

B．必要而不充分条件

C．充分必要条件

D．既不充分也不必要条件

11．设等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，若$a_4=5,S_9=81$，则$a_{10}=$（　　）

A．23　　**B．25**　　**C．28**　　**D．29**

12．已知命题P：$\forall x\in R$，$\sin x\le 1$，则$\neg p$为(　　)

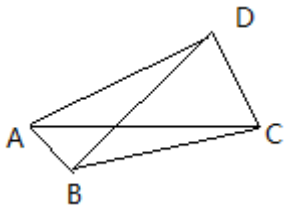
A．$\exists x_0\in R$，$\sin x_0\ge 1$　　**B．**$\forall x\in R$，$\sin x\geqslant 1$

C．$\exists x_0\in R$，$\sin x_0>1$　　**D．**$\forall x\in R$，$\sin x>1$

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13．已知直线$4x-y=b$被圆$x^2+y^2-2x-2y+1=0$截得的弦长为 2，则b的值为__

14．如图，在平面四边形□□□□中，$|\square\square|=3,|\square\square|=4$，则$(\overrightarrow{\square\square}+\overrightarrow{\square\square})\cdot(\overrightarrow{\square\square}+\overrightarrow{\square\square})=$_____



15．已知函数$f(x)=e^x-e^{-x}-1$，则关于x的不等式$f(2x)+f(x+1)>-2$的解集为_____.

16．已知实数a,b满足$a+bi=i^{2019}$（i 为虚数单位），则$a+b$的值为_____.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17．（12 分）已知等差数列$\{a_n\}$的前 *n* 项和为S_n，等比数列$\{b_n\}$的前 *n* 项和为T_n，且$a_1=b_1=1$，$a_5=S_3$，$a_4+b_4=15$.

（1）求数列$\{a_n\}$与$\{b_n\}$的通项公式；

（2）求数列$\left\{\dfrac{S_n\cdot T_n}{n}\right\}$的前 *n* 项和.

18．（12 分）已知椭圆 *E*：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$）的离心率为$e=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，且短轴的一个端点 *B* 与两焦点 *A*，*C* 组成的三角形面积为$\sqrt{3}$.

（Ⅰ）求椭圆 *E* 的方程；

（Ⅱ）若点 *P* 为椭圆 *E* 上的一点，过点 *P* 作椭圆 *E* 的切线交圆 *O*：$x^2+y^2=a^2$于不同的两点 *M*，*N*（其中 *M* 在 *N* 的右侧），求四边形 *ACMN* 面积的最大值.

19．（12 分）设数阵$A_0=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}$，其中$a_{11}$、$a_{12}$、$a_{21}$、$a_{22}\in\{1,2,\cdots,6\}$．设$S=\{e_1,e_2,\cdots,e_l\}\subseteq\{1,2,\cdots,6\}$

，其中$e_1<e_2<\cdots<e_l$，$l\in N^*$且$l\leqslant 6$．定义变换φ_k为“对于数阵的每一行，若其中有k或$-k$，则将这一行中每个数都乘以-1；若其中没有k且没有$-k$，则这一行中所有数均保持不变”（$k=e_1$、e_2、$\cdots$、e_l）．$\varphi_S\left(A_0\right)$表示“将$A_0$经过$\varphi_{e_1}$变换得到$A_1$，再将$A_1$经过$\varphi_{e_2}$变换得到$A_2$、$\cdots$，以此类推，最后将$A_{l-1}$经过$\varphi_{e_l}$变换得到$A_l$”，记数阵$A_l$中四个数的和为$T_S\left(A_0\right)$．

（1）若$A_0=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 5\end{pmatrix}$，写出$A_0$经过$\varphi_2$变换后得到的数阵$A_1$；

（2）若$A_0=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 3 & 6\end{pmatrix}$，$S=\{1,3\}$，求$T_S\left(A_0\right)$的值；

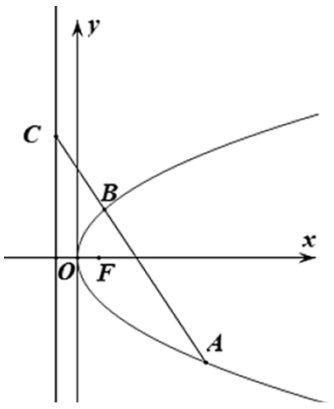
（3）对任意确定的一个数阵A_0，证明：$T_S\left(A_0\right)$的所有可能取值的和不超过-4．

20．（12 分）已知函数$f\left(x\right)=m\ln\left(1+x\right)-x$，$g\left(x\right)=mx-\sin x$．

（1）若函数$f\left(x\right)$在$\left(0,+\infty\right)$上单调递减，且函数$g\left(x\right)$在$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$上单调递增，求实数$m$的值；

（2）求证：$\left(1+\sin 1\right)\left(1+\sin\frac{1}{1\times 2}\right)\left(1+\sin\frac{1}{2\times 3}\right)\cdots\left(1+\sin\frac{1}{\left(n-1\right)\times n}\right)<e^2$（$n\in N^*$，且$n\geq 2$）．

21．（12 分）已知抛物线$G:y^2=2px$，焦点为F，直线l交抛物线G于A,B两点，交抛物线G的准线于点C，如图所示，当直线l经过焦点F时，点F恰好是AC的中点，且$\left|BC\right|=\frac{8}{3}$．



（1）求抛物线G的方程；

（2）点O是原点，设直线OA,OB的斜率分别是k_1,k_2，当直线l的纵截距为 1 时，有数列$\left\{a_n\right\}$满足$a_1=1,k=-16a_{n-1},k_2=4\left(a_{\mathrm{n}}+2\right)^2$，设数列$\left\{\frac{a_n}{1+a_n}\right\}$的前 *n* 项和为$S_n$，已知存在正整数$m$使得$m\leq S_{2020}<m+1$，求 *m* 的值.

22.（10 分）在全面抗击新冠肺炎疫情这一特殊时期，我市教育局提出“停课不停学”的口号，鼓励学生线上学习.某校数学教师为了调查高三学生数学成绩与线上学习时间之间的相关关系，对高三年级随机选取 45 名学生进行跟踪问卷，其中每周线上学习数学时间不少于 5 小时的有 19 人，余下的人中，在检测考试中数学平均成绩不足 120 分的占$\frac{8}{13}$，统计成绩后得到如下2×2列联表：

	分数不少于 120 分	分数不足 120 分	合计
线上学习时间不少于 5 小时		4	19
线上学习时间不足 5 小时			
合计			45

（1）请完成上面2×2列联表；并判断是否有 99%的把握认为“高三学生的数学成绩与学生线上学习时间有关”；

（2）①按照分层抽样的方法，在上述样本中从分数不少于 120 分和分数不足 120 分的两组学生中抽取 9 名学生，设抽到不足 120 分且每周线上学习时间不足 5 小时的人数是X，求X的分布列（概率用组合数算式表示）；

②若将频率视为概率，从全校高三该次检测数学成绩不少于 120 分的学生中随机抽取 20 人，求这些人中每周线上学习时间不少于 5 小时的人数的期望和方差.

（下面的临界值表供参考）

$P(K^2\geq k_0)$	0.10	0.05	0.025	0.010	0.005	0.001
k_0	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879	10.828

（参考公式$K^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$其中$n=a+b+c+d$）

参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1、A

【解析】

由题意求得 c 与 $\frac{b}{a}$ 的值，结合隐含条件列式求得 a^2，b^2，则答案可求.

【详解】

由题意，$2c=8$，则 $c=4$，

又 $\frac{b}{a}=\sqrt{3}$，且 $a^2+b^2=c^2$，

解得 $a^2=4$，$b^2=12$.

∴双曲线 C 的方程为 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$.

故选：A.

【点睛】

本题考查双曲线的简单性质，属于基础题.

2、C

【解析】

根据题意，分两种情况进行讨论：①语文和数学都安排在上午；②语文和数学一个安排在上午，一个安排在下午.分别求出每一种情况的安排方法数目，由分类加法计数原理可得答案.

【详解】

根据题意，分两种情况进行讨论：

①语文和数学都安排在上午，要求 2 节语文课必须相邻且 2 节数学课也必须相邻，将 2 节语文课和 2 节数学课分别捆绑，然后在剩余 3 节课中选 1 节到上午，由于 2 节英语课不加以区分，此时，排法种数为 $\frac{C_3^1A_2^2A_3^3}{A_2^2}=18$ 种；

②语文和数学都一个安排在上午，一个安排在下午.

语文和数学一个安排在上午，一个安排在下午，但 2 节语文课不加以区分，2 节数学课不加以区分，2 节英语课也不加以区分，此时，排法种数为 $\frac{C_2^1A_4^4}{A_2^2}=24$ 种.

综上所述，共有 $18+24=42$ 种不同的排法.

故选：C.

【点睛】

本题考查排列、组合的应用，涉及分类计数原理的应用，属于中等题.

3、B

【解析】

列出每一次循环，直到计数变量i满足$i>3$退出循环.

【详解】

第一次循环：$S=2^{1}(1+1)=4,i=2$；第二次循环：$S=4+2^{2}(1+2)=16,i=3$；

第三次循环：$S=16+2^{3}(1+3)=48,i=4$，退出循环，输出的S为48.

故选：B.

【点睛】

本题考查由程序框图求输出的结果，要注意在哪一步退出循环，是一道容易题.

4、D

【解析】

因为$A=\{x\,|\,x^{2}<1\}=\{x\,|\,-1<x<1\}$，$B=\{x\,|\,\ln x<1\}=\{x\,|\,0<x<\mathrm{e}\}$，

所以$A\cap B=\{x\,|\,0<x<1\}$，$A\cup B=\{x\,|\,-1<x<\mathrm{e}\}$，故选 D.

5、C

【解析】

模拟程序的运行即可求出答案.

【详解】

解：模拟程序的运行，可得：

$p=1$，

$S=1$，输出 S 的值为 1，

满足条件 $p\leq 7$，执行循环体，$p=3$，$S=7$，输出 S 的值为 7，

满足条件 $p\leq 7$，执行循环体，$p=5$，$S=31$，输出 S 的值为 31，

满足条件 $p\leq 7$，执行循环体，$p=7$，$S=127$，输出 S 的值为 127，

满足条件 $p\leq 7$，执行循环体，$p=9$，$S=511$，输出 S 的值为 511，

此时，不满足条件 $p\leq 7$，退出循环，结束，

故若执行如图所示的程序框图，则输出的梅森素数的个数是 5，

故选：C.

【点睛】

本题主要考查程序框图，属于基础题.

6、C

【解析】

将圆$x^{2}+y^{2}-4x+2y+1=0$，化为标准方程为，求得圆心为$(2,-1)$.根据圆$x^{2}+y^{2}-4x+2y+1=0$关于双曲线

$C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的一条渐近线对称，则圆心在渐近线上，$\frac{b}{a}=\frac{1}{2}$.再根据 $e=\frac{c}{a}=\sqrt{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2}$ 求解.

【详解】

已知圆 $x^2+y^2-4x+2y+1=0$，

所以其标准方程为：$(x-2)^2+(y+1)^2=4$，

所以圆心为 $(2,-1)$.

因为双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$，

所以其渐近线方程为 $y=\pm\frac{b}{a}x$，

又因为圆 $x^2+y^2-4x+2y+1=0$ 关于双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的一条渐近线对称，

则圆心在渐近线上，

所以 $\frac{b}{a}=\frac{1}{2}$.

所以 $e=\frac{c}{a}=\sqrt{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2}=\frac{\sqrt{5}}{2}$.

故选：C

【点睛】

本题主要考查圆的方程及对称性，还有双曲线的几何性质 ，还考查了运算求解的能力，属于中档题.

7、D

【解析】

由 $S_2=3$ 得 $a_1+a_2=3$，又 $a_3+a_4=(a_1+a_2)q^2=12$，两式相除即可解出 q.

【详解】

解：由 $S_2=3$ 得 $a_1+a_2=3$，

又 $a_3+a_4=(a_1+a_2)q^2=12$，

$\therefore q^2=4$，$\therefore q=-2$，或 $q=2$，

又正项等比数列 $\{a_n\}$ 得 $q>0$，

$\therefore q=2$，

故选：D.

【点睛】

本题主要考查等比数列的性质的应用，属于基础题.

8、C

【解析】

根据函数的对称性和单调性的特点，利用排除法，即可得出答案.

【详解】

A 中，当 $x=1$ 时，$y=\sin \pi x=0 \neq 1$，所以 $y=\sin \pi x$ 不关于直线 $x=1$ 对称，则 A 错误；

B 中，$y=|x-1|=\begin{cases} x-1,(x \geq 1) \\ -x+1,(x<1) \end{cases}$，所以在区间 $[-1,0]$ 上为减函数，则 B 错误；

D 中，$y=f(x)=e^{x}+e^{-x}$，而 $f(0)=2, f(2)=e^{2}+e^{-2}$，则 $f(0) \neq f(2)$，所以 $y=\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x}$ 不关于直线 $x=1$ 对称，则 D 错误；

故选：C.

【点睛】

本题考查函数基本性质，根据函数的解析式判断函数的对称性和单调性，属于基础题.

9、D

【解析】

由$|AF_2|=3|BF_2|$，可得 $\overrightarrow{AF_2}=3\overrightarrow{F_2B}$.设直线 l 的方程 $x=my+\sqrt{5}$，$m>0$，设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，即 $y_1=-3y_2$①，

联立直线 l 与曲线 C,得 $y_1+y_2=-\frac{2\sqrt{5}m}{m^2-4}$②，$y_1y_2=\frac{1}{m^2-4}$③，求出 m 的值即可求出直线的斜率.

【详解】

双曲线 C：$\frac{x^2}{4}-y^2=1$，F_1，F_2 为左、右焦点，则 F_2（$\sqrt{5}$，0），设直线 l 的方程 $x=my+\sqrt{5}$，$m>0$，∵双曲线的渐近线方程为 $x=\pm 2y$，∴$m\neq\pm 2$，

设 A（x_1，y_1），B（x_2，y_2），且 $y_1>0$，由$|AF_2|=3|BF_2|$，∴ $\overrightarrow{AF_2}=3\overrightarrow{F_2B}$，∴$y_1=-3y_2$①

由 $\begin{cases} x=my+\sqrt{5} \\ x^2-4y^2-4=0 \end{cases}$，得 $(m^2-4)y^2+2\sqrt{5}my+1=0$

∴$\Delta=(2\sqrt{5}m)^2-4(m^2-4)>0$，即 $m^2+4>0$ 恒成立，

∴$y_1+y_2=-\frac{2\sqrt{5}m}{m^2-4}$②，$y_1y_2=\frac{1}{m^2-4}$③，

联立①②得$-2y_2=-\frac{2\sqrt{5}m}{m^2-4}>0$，联立①③得$-3y_2^2=\frac{1}{m^2-4}<0$，

$\therefore y_2=\frac{\sqrt{5}m}{m^2-4}$，$y_2^2=\frac{1}{12-3m^2}$即：$\frac{1}{12-3m^2}=\left(\frac{\sqrt{5}m}{m^2-4}\right)^2$，$m>0$，解得：$m=\frac{1}{2}$，直线$l$的斜率为$2$，

故选 D.

【点睛】

本题考查直线与双曲线的位置关系，考查韦达定理的运用，考查向量知识，属于中档题.

10、C

【解析】

试题分析：根据充分条件和必要条件的定义进行判断即可.

解：在等差数列{a_n}中，若 $a_2>a_1$，则 $d>0$，即数列{a_n}为单调递增数列，

若数列{a_n}为单调递增数列，则 $a_2>a_1$，成立，

即“$a_2>a_1$”是“数列{a_n}为单调递增数列”充分必要条件，

故选 C.

考点：必要条件、充分条件与充要条件的判断.

11、D

【解析】

由$S_9=81$可求$a_5=9$，再求公差，再求解即可.

【详解】

解：$\because\{a_n\}$是等差数列

$\therefore S_9=9a_5=81$

$\therefore a_5=9$，又$\because a_4=5$，

$\therefore$公差为$d=4$，

$\therefore a_{10}=a_4+6d=29$，

故选：D

【点睛】

考查等差数列的有关性质、运算求解能力和推理论证能力，是基础题.

12、C

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：https://d.book118.com/448003032054006052